第 33 卷第 5 期　　四川轻化工大学学报(自然科学版)　　Vol. 33　No. 5
2020 年 10 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Oct. 2020
文章编号:2096-7543(2020)05-0096-05　　DOI:10.11863/j.suse.2020.05.15

关于半对偶模的弱 Ding-投射模

何东林，樊　亮

(陇南师范高等专科学校数信学院，甘肃　陇南　742500)

摘　要:设 R 是有单位元的交换环,C 是半对偶 R- 模。基于 D_C- 投射模和 C-f- 投射模的概念，给出了关于半对偶模 C 的弱 Ding-投射模的定义,称之为弱 D_C -投射模。利用环模理论和同调代数的方法,讨论了弱 D_C -投射模与 D_C -投射模及 C -Gorenstein 投射模之间的关系。研究了弱 D_C -投射模的若干性质和等价刻画。结果表明:M 是弱 D_C -投射模,当且仅当 $M \in {}^{\perp}\mathrm{P}^f_C(R)$ 且存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}^f_C(R))$- 正合的正合列 $0 \to M \to C \otimes_R P_{-1} \to C \otimes_R P_{-2} \to \cdots$，其中 $P_i(i<0)$ 是投射 R -模且 $\mathrm{P}^f_C(R)$ 是 C-f- 投射 R- 模组成的类;所有弱 D_C -投射 R -模组成的类是投射可解的且关于任意直和因子封闭。

关键词:交换环;半对偶模;C -f -投射模;弱 D_C -投射模;投射可解

中图分类号:O154　　**文献标志码**:A

引　言

Gorenstein 同调理论是相对同调代数的研究热点之一,许多学者先后对其进行了研究和推广。特别地,Holm 和 Jørgensen[1] 在交换 Noether 环上引入了 C -Gorenstein 投射模和 C -Gorenstein 内射模的概念,并研究了与其相关的投射模类。White[2] 进一步讨论了一般交换环上的 C- Gorenstein 投射模和 C- Gorenstein 内射模,并称之为 G_C- Gorenstein 投射模和 G_C- Gorenstein 内射模。Gillespie[3] 介绍了 Ding-投射模和 Ding-内射模。Ding-投射模与强 Gorenstein 平坦模[4]是一致的,而 Ding-内射模与 Gorenstein FP-内射模是一致的。为了研究 Ding-投射模和 Ding-内射模的可数部分及相关的投射和内射模类,Zhang 等[5]引入了 D_C- 投射模和 D_C- 内射模。f- 投射模[7]是投射模的一个重要推广,每个投射模都是 f- 投射模,每个 f- 投射模都是平坦模,但反之不真。C-Gorenstein 投射模与 C -投射模[8]密切相关,D_C- 投射模与 C- 平坦模[8]密切相关。Mao[9]引入的关于半对偶模 C 的 C -f -投射模是介于 C- 投射模与 C- 平坦模之间的一类模。因而,可考虑与 C -f -投射模密切相关的模类。本文主要研究关于半对偶模 C 的弱 Ding-投射模(即弱 D_C -投射模),并讨论弱 D_C -投射模与 D_C -投射模及 C -Gorenstein 投射模之间的关系,以及弱 D_C -投射模的若干性质和等价刻画。

文中的环 R 均指有单位元的交换环,模均指酉 R-模。如果 R- 模 C 满足条件:(1) C 具有有限生成投射分解,(2) $R \cong \mathrm{Hom}(C,C)$ 且 $\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(C,C)=0$,则称 C 是半对偶模。如果对 R -模 M 的任意有限生成子模 K,都存在有限生成自由模 R^n 及 R- 模同态 $\alpha: R^n \to M$ 和 $\beta: K \to R^n$,使得 $i=\alpha\beta$,其中 $i: K \to M$ 是标准的包含同态,则

收稿日期:2020-06-01
基金项目:甘肃省高等学校创新基金项目(2020A-277)
作者简介:何东林(1983-),女,甘肃白银人,讲师,硕士,主要从事同调代数方面的研究,(E-mail)hdl7979085@163.com

称 M 是 f-投射模[7]。记 $\mathrm{P}_C(R)=\{C\underset{R}{\otimes}P \mid P$ 是投射模$\}$, $\mathrm{F}_C(R)=\{C\underset{R}{\otimes}P \mid P$ 是平坦模$\}$,分别表示 C-投射模和 C-平坦模组成的模类,其中的模分别称之为 C-投射模和 C-平坦模[8]。如果存在 $\mathrm{Hom}_R(-,P_C(R))$-正合的正合列 $\cdots\to P_1\to P_0\to C\underset{R}{\otimes}P_{-1}\to C\underset{R}{\otimes}P_{-2}\to\cdots$,其中 $P_i(i\in Z)$ 是投射模,使得 $N\cong\mathrm{Coker}(P_1\to P_0)$,则称模 N 是 C-Gorenstein 投射模[1]。用 $\mathrm{GP}_C(R)$ 表示所有 C-Gorenstein 投射模组成的类。如果存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{F}_C(R))$-正合的正合列 $\cdots\to P_1\to P_0\to C\underset{R}{\otimes}P_{-1}\to C\underset{R}{\otimes}P_{-2}\to\cdots$,其中 $P_i(i\in Z)$ 是投射 R-模,使得 $N\cong\mathrm{Coker}(P_1\to P_0)$,则称 R-模 N 是 D_C-投射模[1]。用 $\mathrm{DP}_C(R)$ 表示所有 D_C-投射模组成的类。设 x 是 R-模类,如果 x 包含所有投射模且关于扩张和满同态的和封闭,则称 x 是投射可解的[10]。记 $x^{\perp}=\{M\mid$ 对任意 $X\in x$ 有 $\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(X,M)=0\}$, ${}^{\perp}x=\{M\mid$ 对任意 $X\in x$ 有 $\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(M,X)=0\}$。下文中的 C 均指固定的半对偶双模 ${}_RC_R$,其余未涉及的概念和记号参见文献[11-13]。

1　定义和引理

定义 1[9]　称 M 是 C-f-投射模,如果存在 f-投射模 Q,使得 $M=C\underset{R}{\otimes}Q$。用 $\mathrm{P}_C^f(R)$ 表示所有 C-f-投射 R-模组成的类,显然 $\mathrm{P}_C^f(R)=\{C\underset{R}{\otimes}P\mid P$ 是 C-f-投射模$\}$。

引理 1[9]　关于 C-f-投射模类 $\mathrm{P}_C^f(R)$,以下说法成立:

(1) $\mathrm{P}_C^f(R)$ 关于任意扩张、满同态的核、直和及直和因子封闭。

(2) $\mathrm{P}_C(R)\subseteq\mathrm{P}_C^f(R)\subseteq\mathrm{F}_C(R)$。

引理 2[9]　设 M 是 R-模,则

(1) M 是 f-投射模当且仅当 $C\underset{R}{\otimes}M$ 是 C-f-投射模。

(2) M 是 C-f-投射模当且仅当 $\mathrm{Hom}_R(C,M)$ 是 f-投射模。

例 1　(1) $\prod\limits_{i=1}^{\infty}Z$ 是 f-投射 Z-模,但不是投射 Z-模,其中 Z 表示整数环。从而 $C\underset{Z}{\otimes}\prod\limits_{i=1}^{\infty}Z$ 是 C-f-投射模,但不是 C-投射模。

(2)设 k 是一个域, $R=\prod\limits_{i=1}^{\infty}k$ 且 $I=\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty}k$,则 $\dfrac{R}{I}$ 是平坦 R-模,但不是 f-投射 R-模。从而 $C\underset{R}{\otimes}\dfrac{R}{I}$ 是 C-平坦模,但不是 C-f-投射模。

(3)当 R 是 Noether 环或者 Prüfer 环时, C-平坦模是 C-f-投射模,从而 $\mathrm{P}_C^f(R)=\mathrm{F}_C(R)$。

定义 2　称 R-模 M 是弱 D_C-投射模,如果存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}_C^f(R))$-正合的正合列

$$\cdots\to P_1\to P_0\to C\underset{R}{\otimes}P_{-1}\to C\underset{R}{\otimes}P_{-2}\to\cdots$$

其中 $P_i(i\in Z)$ 是投射 R-模,使得 $M\cong\mathrm{Coker}(P_1\to P_0)$。用 $\mathrm{wDP}_C(R)$ 表示所有弱 D_C-投射模组成的类。

引理 3　以下说法成立:

(1) $\mathrm{DP}_C(R)\subseteq\mathrm{wDP}_C(R)\subseteq\mathrm{GP}_C(R)$。

(2)当 R 是 Noether 环时,弱 D_C-投射模与 D_C-投射模一致,从而 $\mathrm{DP}_C(R)=\mathrm{wDP}_C(R)$。

证明　(1)由引理 1 知, $\mathrm{P}_C(R)\subseteq\mathrm{P}_C^f(R)\subseteq\mathrm{F}_C(R)$。根据 D_C-投射模、C-Gorenstein 投射模及定义 2 易得, $\mathrm{DP}_C(R)\subseteq\mathrm{wDP}_C(R)\subseteq\mathrm{GP}_C(R)$。

(2)当 R 是 Noether 环时,由例 1 的第(3)条知 $\mathrm{P}_C^f(R)=\mathrm{F}_C(R)$。根据定义可得弱 D_C-投射模与 D_C-投射模一致,从而 $\mathrm{DP}_C(R)=\mathrm{wDP}_C(R)$。

引理 4[8]　设 $0\to X'\to X\to X''\to 0$ 是 R-模正合列。若 X' 和 X'' 是 C-投射模,则该正合列可裂且 X 也是 C-投射模。

2　主要结果

定理 1　设 M 是 R-模,则以下条件等价:

(1) M 是弱 D_C-投射模。

(2) $M\in{}^{\perp}\mathrm{P}_C^f(R)$ 且存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}_C^f(R))$-正合的正合列 $0\to M\to C\underset{R}{\otimes}P_{-1}\to C\underset{R}{\otimes}P_{-2}\to\cdots$,其中 $P_i(i<0)$ 是投射 R-模。

证明 (1)⇒(2)　设 M 是弱 D_C-投射模,则由定义 2 知,存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}_C^f(R))$-正合的正合列

$$\cdots\to P_1\xrightarrow{\partial_1}P_0\xrightarrow{\partial_0}C\underset{R}{\otimes}P_{-1}\xrightarrow{\partial_{-1}}C\underset{R}{\otimes}P_{-2}\to\cdots,\tag{1}$$

其中 $P_i(i\in Z)$ 是投射 R-模,使得 $M\cong\mathrm{Coker}\partial_1$。因为 $\mathrm{Coker}\partial_1=\dfrac{P_0}{\mathrm{Ker}\partial_0}\cong\mathrm{Im}\partial_0=\mathrm{Ker}\partial_{-1}$,所以 $M\cong\mathrm{Ker}\partial_{-1}$。序列(1)可分为如下两个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}_C^f(R))$-正合的正合列

$$\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0,\tag{2}$$

$$0\to M\to C\underset{R}{\otimes}P_{-1}\to C\underset{R}{\otimes}P_{-2}\to\cdots\tag{3}$$

显然序列(3)就是满足要求的正合列。对任意 $Q\in$

$\mathrm{P}_C^f(R)$，用函子 $\mathrm{Hom}_R(-,Q)$ 作用于序列(2)后可得正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,Q) \to \mathrm{Hom}_R(P_0,Q) \to \mathrm{Hom}_R(P_1,Q) \to \cdots$$

因为序列(2)是 M 的投射分解，由 Ext 函子的性质可知，$\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(M,Q)=0$。由 Q 的任意性可知 $M \in {}^{\perp}\mathrm{P}_C^f(R)$。

(2)⇒(1) 设 $M \in {}^{\perp}\mathrm{P}_C^f(R)$ 且存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}_C^f(R))$- 正合的正合列

$$0 \to M \to C \underset{R}{\otimes} P_{-1} \to C \underset{R}{\otimes} P_{-2} \to \cdots \tag{4}$$

其中 $P_i(i<0)$ 是投射 R-模。不妨取 M 的投射分解

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0, \tag{5}$$

其中 $P_i(i \geqslant 0)$ 是投射 R-模。因为 $M \in {}^{\perp}\mathrm{P}_C^f(R)$，所以正合列(6)是 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}_C^f(R))$- 正合的。将序列(4)和序列(5)拼接可得 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}_C^f(R))$ -正合的正合列

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to C \underset{R}{\otimes} P_{-1} \to C \underset{R}{\otimes} P_{-2} \to \cdots$$

其中 $P_i(i \in Z)$ 是投射 R- 模，使得 $M \cong \mathrm{Coker}(P_1 \to P_0)$。因此 M 是弱 D_C- 投射模。

定理 2 设 M 是弱 D_C- 投射模，如果存在正合列

$$0 \to C \underset{R}{\otimes} Q_n \to C \underset{R}{\otimes} Q_{n-1} \to \cdots \to C \underset{R}{\otimes} Q_1 \to C \underset{R}{\otimes} Q_0 \to N \to 0,$$

其中 $Q_j(0 \leqslant j \leqslant n)$ 是 f-投射模，则 $\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(M,N)=0$。

证明 设存在正合列 $0 \to C \underset{R}{\otimes} Q_n \to C \underset{R}{\otimes} Q_{n-1} \to \cdots \to C \underset{R}{\otimes} Q_1 \to C \underset{R}{\otimes} Q_0 \to N \to 0$，其中 $Q_j(0 \leqslant j \leqslant n)$ 是 f-投射模。由 M 是弱 D_C -投射模及定理 1 可得，$\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(M,Q_j)=0$。令 $U_j=\mathrm{Coker}(C \underset{R}{\otimes} Q_j \to C \underset{R}{\otimes} Q_{j-1})(1 \leqslant j \leqslant n)$，显然 $N \cong U_1$。用函子 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 作用于短正合列 $0 \to C \underset{R}{\otimes} Q_n \to C \underset{R}{\otimes} Q_{n-1} \to U_n \to 0$ 可得长正合列

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_R^i(M,C \underset{R}{\otimes} Q_n) \to \mathrm{Ext}_R^i(M,C \underset{R}{\otimes} Q_{n-1}) \to \mathrm{Ext}_R^i(M,U_n) \to \mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,C \underset{R}{\otimes} Q_n) \to \cdots,$$

可见 $\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(M,U_n)=0$。再用 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 作用于正合列 $0 \to U_n \to C \underset{R}{\otimes} Q_{n-2} \to U_{n-1} \to 0$ 可得长正合列

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_R^i(M,U_n) \to \mathrm{Ext}_R^i(M,C \underset{R}{\otimes} Q_{n-2}) \to \mathrm{Ext}_R^i(M,U_{n-1}) \to \mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,U_n) \to \cdots$$

从而有 $\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(M,U_{n-1})=0$。依次类推，可得 $\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(M,N)=0$。

定理 3 设 P 是有限生成投射模且 M 是弱 D_C- 投射模，则 $\mathrm{Hom}_R(P,M)$ 是弱 D_C- 投射模。

证明 由 M 是弱 D_C- 投射模知，存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}_C^f(R))$- 正合的正合列

$$\cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} C \underset{R}{\otimes} P_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} C \underset{R}{\otimes} P_{-2} \to \cdots \tag{6}$$

其中 $P_i(i \in Z)$ 是投射 R -模，使得 $M \cong \mathrm{Coker}\partial_1$。因为 P 是有限生成投射模，所以用函子 $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ 作用于序列(6)后仍正合，即序列

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_R(P,P_1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(P,\partial_1)} \mathrm{Hom}_R(P,P_0) \to \mathrm{Hom}_R(P,C \underset{R}{\otimes} P_{-1}) \to \mathrm{Hom}_R(P,C \underset{R}{\otimes} P_{-2}) \to \cdots$$

正合，且 $\mathrm{Hom}_R(P,M) \cong \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_R(P,\partial_1))$。因为 P 是有限生成投射模且 R 为交换环，根据文献[14]中命题 20.10 可得，对任意整数 $i<0$，有同构

$$\mathrm{Hom}_R(P,C \underset{R}{\otimes} P_i) \cong C \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}_R(P,P_i)。$$

由文献[15]中 P_{14} stability 中第 6 条可得，$\mathrm{Hom}_R(P,P_i)(i \in Z)$ 是投射模。从而有正合列

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_R(P,P_1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(P,\partial_1)} \mathrm{Hom}_R(P,P_0) \to C \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}_R(P,P_{-1}) \to C \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}_R(P,P_{-2}) \to \cdots \tag{7}$$

其中 $\mathrm{Hom}_R(P,P_i)(i \in Z)$ 是投射模，且 $\mathrm{Hom}_R(P,M) \cong \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_R(P,\partial_1))$。以下只需证正合列(7)是 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}_C^f(R))$ -正合的。对任意 $C \underset{R}{\otimes} Q \in \mathrm{P}_C^f(R)$，由引理 2 中式(1)知 Q 是 f-投射模。可见 Q 是平坦模。根据文献[14]中命题 20.11 可知，

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(P,(10)),C \underset{R}{\otimes} Q) \cong P \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}_R((6),C \underset{R}{\otimes} Q)$$

由序列 $P \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}_R((6),C \underset{R}{\otimes} Q)$ 的正合性可得，序列 $\mathrm{Hom}_R(P,(6))$ 在函子 $\mathrm{Hom}_R(-,C \underset{R}{\otimes} Q)$ 下正合。又由 $C \underset{R}{\otimes} Q$ 的任意性知，正合列(7)是 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}_C^f(R))$- 正合的。

综上所述，$\mathrm{Hom}_R(P,M)$ 是弱 D_C- 投射模。

定理 4 设 P 是投射模且 M 是弱 D_C- 投射模，则 $M \underset{R}{\otimes} P$ 是弱 D_C -投射模。

证明 证明过程与定理 3 对偶。

定理 5 设 M 是任意 R- 模，则存在正合列 $\cdots \to W_1 \to W_0 \to M \to 0$，其中 $W_i(i \geqslant 0)$ 是弱 D_C- 投射模。

证明 设 M 是任意 R- 模，由文献[6]中命题 1.8 可得，M 具有 D_C- 投射分解，即存在正合列

$$\cdots \to W_1 \to W_0 \to M \to 0$$

其中 $W_i(i \geqslant 0)$ 是 D_C- 投射模。又由引理 3 知，$\mathrm{DP}_C(R)$

$\subseteq \mathrm{wDP}_C(R)$,所以 $W_i(i \geqslant 0)$ 是弱 D_C- 投射模。

定理 6　弱 D_C -投射模类 $\mathrm{wDP}_C(R)$ 关于任意扩张封闭。

证明　设 $0 \to L \to M \to N \to 0$ 是 R- 模正合列,其中 $L,N \in \mathrm{wDP}_C(R)$。由定理 1 知,$L,N \in {}^{\perp}\mathrm{P}^f_C(R)$ 且存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}^f_C(R))$- 正合的正合列如图 1 所示。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & L & \to & M & \to & N & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C \underset{R}{\otimes} P_{-1} & \to & (C \underset{R}{\otimes} P_{-1}) \oplus (C \underset{R}{\otimes} Q_{-1}) & \to & C \underset{R}{\otimes} Q_{-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C \underset{R}{\otimes} P_{-1} & \to & (C \underset{R}{\otimes} P_{-2}) \oplus (C \underset{R}{\otimes} Q_{-2}) & \to & C \underset{R}{\otimes} Q_{-2} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

图 1　正合交换图

因为 $(C \underset{R}{\otimes} P_i) \oplus (C \underset{R}{\otimes} Q_i) \cong C \underset{R}{\otimes} (P_i \oplus Q_i)$ 且投射模类关于直和封闭,所以由交换图可知存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}^f_C(R))$ -正合的正合列:

$$0 \to M \to C \underset{R}{\otimes} (P_{-1} \oplus Q_{-1}) \to C \underset{R}{\otimes} (P_{-2} \oplus Q_{-2}) \to \cdots$$

其中 $P_i \oplus Q_i (i < 0)$ 是投射模。因为 $L,N \in {}^{\perp}\mathrm{P}^f_C(R)$ 且 ${}^{\perp}\mathrm{P}^f_C(R)$ 关于扩张封闭,所以 $M \in {}^{\perp}\mathrm{P}^f_C(R)$。根据定理 1 得,$M$ 是弱 D_C- 投射模。因此弱 D_C- 投射模类 $\mathrm{wDP}_C(R)$ 关于任意扩张封闭。

定理 7　弱 D_C -投射模类 $\mathrm{wDP}_C(R)$ 关于任意满同态的核封闭。

证明　由定理 1 和 Ext 函子的性质可证。

定理 8　弱 D_C- 投射模类 $\mathrm{wDP}_C(R)$ 关于任意满同态的核封闭。

证明　设 $0 \to L \to M \to N \to 0$ 是 R- 模正合列,其中 $M,N \in \mathrm{wDP}_C(R)$。由定理 1 可知,$L,N \in {}^{\perp}\mathrm{P}^f_C(R)$ 且存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}^f_C(R))$- 正合的正合列

$$0 \to M \to C \underset{R}{\otimes} P_{-1} \to C \underset{R}{\otimes} P_{-2} \to \cdots$$

$$0 \to N \to C \underset{R}{\otimes} Q_{-1} \to C \underset{R}{\otimes} Q_{-2} \to \cdots$$

其中 P_i 和 $Q_i (i < 0)$ 是投射 R-模。因为 $M,N \in {}^{\perp}\mathrm{P}^f_C(R)$ 且 ${}^{\perp}\mathrm{P}^f_C(R)$ 关于满同态的核封闭,所以 $L \in {}^{\perp}\mathrm{P}^f_C(R)$。由引理 1 中的第(2) 条知 $\mathrm{P}_C(R) \subseteq \mathrm{P}^f_C(R)$。可见所有 $C \underset{R}{\otimes} P_i$ 和 $C \underset{R}{\otimes} Q_i$ 都是 C-f- 投射模,即所有 $C \underset{R}{\otimes} P_i$ 和 $C \underset{R}{\otimes} Q_i$ 都在 $\mathrm{P}^f_C(R)$ 内。根据引理 1 中的第(1)条及文献[6]中定理 1.12 的证明过程易得,存在正合列

$$0 \to L \to C \underset{R}{\otimes} P'_{-1} \to C \underset{R}{\otimes} P'_{-2} \to \cdots$$

其中 $P'_i (i < 0)$ 是投射 R- 模。根据定理 1 得,L 是弱 D_C- 投射模。因此弱 D_C- 投射模类 $\mathrm{wDP}_C(R)$ 关于任意满同态的核封闭。

定理 9　弱 D_C- 投射模类 $\mathrm{wDP}_C(R)$ 是投射可解的且关于任意直和因子封闭。

证明　由引理 3 及文献[6]中命题 1.8 知,$\mathrm{wDP}_C(R)$ 包含所有投射模。根据定理 6 和定理 8 可得,$\mathrm{wDP}_C(R)$ 关于任意扩张和满同态的核封闭。从而弱 D_C- 投射模类 $\mathrm{wDP}_C(R)$ 是投射可解的。又因为 $\mathrm{wDP}_C(R)$ 关于任意直和封闭,由文献[16]中命题 1.4 可得,$\mathrm{wDP}_C(R)$ 关于任意直和因子封闭。

3　结束语

利用环模理论和同调代数的方法,讨论了弱 D_C- 投射模与 D_C- 投射模及 C- Gorenstein 投射模之间的关系。研究了弱 D_C- 投射模的若干性质和等价刻画。结果表明:所有弱 D_C- 投射 R- 模组成的类是投射可解的且关于任意直和因子封闭。从而补充了 Gorenstein 同调代数中的相关理论,并进一步完善了对 Gorenstein 模类及其维数后续问题的研究,具有一定的理论价值。

参 考 文 献:

[1] HOLM H, JØRGENSEN.Semi-dualizing modules and related Gorenstein homological dimensions[J].2005,205(2):423-445.

[2] WHITE D.Gorenstein projective dimension with respect to a semidualizing module[J].Journal of Commutative Algebra,2010,2(1):111-137.

[3] GILLESPIE J.Model structures on modules over Ding-Chen rings[J].Homology Homotopy and Applications,2009,12(1):61-73.

[4] DING N,LI Y,MAO L.Strongly gorenstein flat modules[J].Journal of the Australian Mathematical Society,2009,86(3):323-338.

[5] MAO L,DING N,ZELMANOV E.Gorenstein FP-injective and gorenstein flat modules[J].Journal of Algebra & Its Applications,2008,7(4):491-506.

[6] ZHANG C X,WANG L M,LIU Z K.Ding projective modules with respect to a semidualizing module[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society,2015,51(2):339-356.

[7] JONES F,MARSHA C.F-projectivity and flat epimorphisms[J].Communications in Algebra,1981,9(16):1603-1616.

[8] HOLM H,WHITE D.Foxby equivalence over associative rings[J].Journal of Mathematics of Kyoto University,2007,47(4):781-808.

[9] Mao L.Finitely projective modules with respect to a semidualizing module[J].Journal of Algebra and Its Applications,2019,195(49):1-16.

[10] ENOCHS E E,JENDA O M G.Relative Homological Algebra[M].Berlin:Walter de Gruyter,2000.

[11] REN W.Gorenstein projective modules and Frobenius extensions[J].Science China,2018,61 (7):1175-1186.

[12] 李煜彦,何东林,樊亮.强 G_C-FP-投射模[J].青岛大学学报(自然科学版),2019,32(4):110-115.

[13] 何东林,李煜彦.复形的 C-Gorenstein 投射维数[J].四川理工学院学报(自然科学版),2019,32(3):89-94.

[14] ANDERSON F W,Fuller K R.Rings and categories of modules[M].New York:Spring Verlag,1992.

[15] CHRISTENSEN L W.Gorenstein Dimensions[M].New York:Spring Verlag,2000.

[16] HOLM H,Gorenstein homological dimensions[J].Journal of Pure Applications of Algebra,2004,22(3):167-193.

Weak Ding-Projective Modules with Respect to a Semidualizing Module

HE Donglin, *FAN Liang*

(School of Mathematics and Information Science, Longnan Teachers College, Longnan 742500, China)

Abstract: Let R be a communicative ring with identity, C be a semidualizing R- module. Based on the notion of D_C- projective modules and C-f- projective modules, the definition of weak Ding-projective modules with respect to a semidualizing module C is given, which are called weak D_C- projective modules. By using methods of rings and modules and homological algebra, the relationships between weak D_C- projective modules, D_C- projective modules and C- Gorenstein projective modules are discussed. Some properties and equivalent characterizations of weak D_C- projective modules are investigated. The results indicate that: M is a weak D_C- projective module, if and only if $\mathrm{M} \in {}^{\perp}\mathrm{P}^{f}_{C}(\mathrm{R})$ and there exists a $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{P}^{f}_{C}(R))$- exact exact sequence $0 \to M \to C \otimes_R P_{-1} \to C \otimes_R P_{-2} \to \cdots$, where $P_i (i<0)$ is projective R- module and $\mathrm{P}^{f}_{C}(R)$ denotes the class of C-f- projective R- modules; the class of all weak D_C- projective R- modules is projectively resolving and closed under arbitray direct summands.

Key words: communicative ring; semidualizing modules; C-f- projective modules; weak D_C- projective modules; projectively resolving