第 33 卷第 4 期 四川轻化工大学学报(自然科学版) Vol. 33 No. 4
2020 年 8 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Aug. 2020
文章编号:2096-7543(2020)04-0083-06 DOI:10.11863/j.suse.2020.04.12

关于对偶对的 Gorenstein 平坦模及其维数

何东林, 樊 亮

(陇南师范高等专科学校数信学院, 甘肃 陇南 742500)

摘 要:基于 Wang 等人引入的 Gorenstein (x,y)-平坦模的概念,利用环模理论和同调代数的方法,研究了 Gorenstein (x,y)-平坦模类 $\mathrm{GF}_{(x,y)}$ 的稳定性,讨论了任意左 R-模 M 的 $\mathrm{GF}_{(x,y)}$-投射维数 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(M)$ 的若干性质,其中 (x,y) 是 R-模范畴的一个完备对偶对。证明了 x 是模类 $\mathrm{GF}_{(x,y)}$ 的生成子和余生成子,且在左 R-模短正合列 (ε):$0\to U\to V\to W\to 0$ 中各项的 $\mathrm{GF}_{(x,y)}$-投射维数之间存在着密切的联系。结果表明:当 (x,y) 是一个完备对偶对, $\mathrm{GF}_{(x,y)}$ 是投射可解的,且 $\mathrm{Tor}^R_{i\geqslant 1}(y,x)=0$ 时,如果 V 是 Gorenstein (x,y)-平坦模,那么 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(W)\leqslant \mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)+1$;如果 U 是 Gorenstein (x,y)-平坦模,那么 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V)\leqslant \mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(W)$;如果 W 是 Gorenstein (x,y)-平坦模且 (ε) 在函子 $\mathrm{Hom}_R(x,-)$ 下正合,那么等式 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)=\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V)$ 成立。

关键词:对偶对;Gorenstein (x,y)-平坦模;维数;投射可解

中图分类号:O154 **文献标志码**:A

引 言

投射模、内射模和平坦摸是同调代数和环模理论的主要研究对象。利用这 3 类模可以引入模的投射维数、内射维数和平坦维数这 3 种同调不变量。1967 年 Auslander 和 Bridger[1]在双边 Noether 环上引入了有限生成模的另一个同调维数 G-维数,来刻画 Gorenstein 环上模的相关性质。局部 Noetherian 环 (R,m) 是 Gorenstein 环当且仅当 $k=R/m$ 具有有限的 G-维数,当且仅当所有有限生成 R-模都具有有限 G-维数。1995 年 Enochs 和 Jenda[2]引入了一般环上的 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模[2],以及 Gorenstein 平坦模[3]。2004 年 Holm[4]在任意环上提出了 Gorenstein 投射模、内射模和平坦模及其维数的概念,并对其性质进行了系统的讨论。称 R-模 M 是 Gorenstein 投射模,如果存在一个完全投射分解 $P=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$ 使得 $M\cong \mathrm{lm}(P_0\to P^0)$,类似地可定义 Gorenstein 内射模和 Gorenstein 平坦模,2007 年 Bennis 和 Mahdou[5]研究了 Gorenstein 投射模内射模和平坦模的一些特殊情况,并给出了 Gorenstein 投射模、内射模和平坦模的一个简单刻画。左 R-模 M 是 Gorenstein 投射的当且仅当它是强 Gorenstein 投射模的直和因子。近年来,仍有许多学者从事该方面的研究[6-11]。特别地,Wang 等[12]引入了关于对偶对 (x,y) 的 Gorenstein 平坦模,并证明了 Gorenstein (x,y)-平坦

收稿日期:2020-03-22
基金项目:甘肃省高等学校创新能力提升项目(2019B-224);甘肃省高等学校科研项目(2018A-269)
作者简介:何东林(1983-),女,甘肃白银人,讲师,硕士,主要从事同调代数方面的研究,(E-mail)hdl7979085@163.com

模类具有很好的性质,例如 $GF^1_{(x,y)}=GF^2_{(x,y)}$,其中 $GF^1_{(x,y)}=GF_{(x,y)}$ 表示所有 Gorenstein (x,y)-平坦模组成的类,$GF^2_{(x,y)}=\{$模 $M\mid$ 存在 $y\otimes_R-$ 正合的正合列 $\cdots\to G_1\to G_0\to G^0\to G^1\to\cdots$,其中 $G_i,G^i\in GF_{(x,y)}\}$。基于以上研究背景,本文进一步讨论任意 Gorenstein (x,y)-平坦模类 $GF_{(x,y)}$ 的稳定性,以及任意模的 $GF_{(x,y)}$-投射维数,并研究左 R-模正合列 $(\varepsilon):0\to U\to V\to W\to 0$ 中各项的 $GF_{(x,y)}$-投射维数之间的联系。

文中的环 R 均指有单位元的结合环,模指酉模。设 x 是一个左 R-模类,称 x 是投射可解的,如果 x 关于扩张和满同态的核封闭且 $P(R)\subseteq x$,其中 $P(R)$ 表示投射左 R-模类。设 w 和 x 是 R-模类且 $w\subseteq x$,称 w 是 x 的生成子[13],如果对任意 $X\in x$ 都存在正合列 $0\to X'\to W\to X\to 0$,其中 $X'\in x$ 且 $W\in w$。进而若对任意 $X\in x$ 和 $W\in w$ 有 $\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant1}(W,X)=0$,则称生成子 w 是投射的。对偶地可定义余生成子和内射余生成子。

1 定义和引理

设 x 是一个左 R-模类,y 是一个右 R-模类,M 为任意左 R-模。

定义 1[12] 称 M 是 Gorenstein (x,y)-平坦模,如果存在左 R-模正合列

$$X:\cdots\to X_1\to X_0\to X^0\to X^1\to\cdots,$$

其中 $X_i,X^i\in x$,使得 $M\cong\mathrm{Ker}(X^0\to X^1)$ 且 X 在 $y\otimes_R-$ 下正合(即对任意 $Y\in y$,X 在函子 $Y\otimes_R-$ 下正合)。

用 $GF_{(x,y)}$ 表示所有 Gorenstein (x,y)-平坦模组成的类。

例 1 (1)对任意 $X\in x$,有 $X\in GF_{(x,y)}$。

(2)正合列 X 的每个核、像及余核均是 Gorenstein (x,y)-平坦模。

(3)如果 x 是平坦左 R-模类 $F(R)$,y 是内射右 R-模类 $I(R)$,则 Gorenstein (x,y)-平坦模就是 Gorenstein-平坦模。

(4)如果 x 是平坦左 R-模类 $F(R)$,那么 Gorenstein (x,y)-平坦模与 Gorenstein y-平坦模一致。

引理 1[12] 设 $GF_{(x,y)}$ 关于扩张封闭,则以下条件等价:

(1) M 具有 $y\otimes_R-$ 正合的 x-余分解。

(2) M 具有 $y\otimes_R-$ 正合的 $GF_{(x,y)}$-余分解。

定义 2[12] 称 (x,y) 是一个对偶对,如果满足以下条件:

(1) $X\in x$ 当且仅当 $X^+\in y$,其中 $X^+=\mathrm{Hom}_R(X,Q/Z)$。

(2) y 关于直和因子和有限直和封闭。

进而,称对偶对 (x,y) 是完备的,如果 $R\in x$ 且 x 关于扩张及直和因子封闭。

引理 2[14] 如果 (x,y) 是一个完全对偶对,那么 $F(R)\subseteq x$ 且 $I(R)\subseteq y$。

例 2 (1) (F_n,I_n) 是一个完备对偶对,其中 F_n 是平坦维数不超过 n 的左 R-模组成的类,I_n 是平坦维数不超过 n 的右 R-模组成的类。

(2) (F_n,FI_n) 是一个完备对偶对,其中 F_n 是 FP-内射维数不超过 n 的右 R-模组成的类。

如果对任意 $X\in x$ 和 $Y\in y$,有 $\mathrm{Tor}^R_{i\geqslant1}(Y,X)=0$,则记 $\mathrm{Tor}^R_{i\geqslant1}(y,x)=0$。如果存在正合列 $0\to G_n\to\cdots\to G_1\to G_0\to M\to 0$(其中 $G_i\in GF_{(x,y)}$),则称 M 的 $GF_{(x,y)}$-投射维数 $GF_{(x,y)}\text{-pd}(M)\leqslant n$,并记 $GF_{(x,y)}\text{-pd}(M)=\inf\{n\mid GF_{(x,y)}\text{-pd}(M)\leqslant n\}$。否则称 M 的 $GF_{(x,y)}$-投射维数 $GF_{(x,y)}\text{-pd}(M)=+\infty$。

引理 3[12] 设 $\mathrm{Tor}^R_{i\geqslant1}(y,x)=0$ 且 $P(R)\subseteq x$,则以下条件等价:

(1) M 是 Gorenstein (x,y)-平坦模。

(2)对任意 $Y\in y$ 有 $\mathrm{Tor}^R_{i\geqslant1}(Y,M)=0$ 且存在 $y\otimes_R-$ 正合的正合列

$0\to M\to X^0\to X^1\to\cdots$,其中 $X^i\in x$。

(3)存在左 R-模正合列 $0\to M\to X\to G\to 0$,其中 $X\in x$ 且 $G\in GF_{(x,y)}$。

引理 4 设 w 是 x 的余生成子且 v 是 y 的生成子,x 和 y 关于扩张封闭,$0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是 R-模正合列,则以下说法成立:

(1) 如果 w 关于直和因子封闭,$M,M''\in x$ 且 $\mathrm{Ext}^1_R(x,M')=0$,则 $M'\in w$。

(2) 如果 v 关于直和因子封闭,$M,M'\in y$ 且 $\mathrm{Ext}^1_R(M'',y)=0$,则 $M''\in v$。

证明 由文献[12]中命题 3.1 易证。

2　主要结果

下文均假设 $\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^{R}(\mathcal{Y},\mathcal{X})=0$，$P(R)\subseteq\mathcal{X}$ 且 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ 是投射可解的。

命题 1　对任意正整数 n，都有 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{1}=\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{2}=\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{3}=\cdots=\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{n}$，其中 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{1}=\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$，当 $k\geqslant 2$ 时，$\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{k}=\{M\mid$ 存在 $\mathcal{Y}\underset{R}{\otimes}-$ 正合的正合列 $\cdots\to G_1\to G_0\to G^0\to G^1\to\cdots$，其中 $G_i,G^i\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{k-1}\}$。

证明　由例 1 的(1)知，对任意 $X\in\mathcal{X}$，有 $X\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。可见 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{1}\subseteq\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{2}$。设 $M\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{2}$，则由引理 3 知，$M\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{1}$ 当且仅当对任意 $Y\in\mathcal{Y}$ 有 $\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^{R}(Y,M)=0$ 且 M 具有 $\mathcal{Y}\underset{R}{\otimes}-$ 正合的 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-余分解。又根据引理 1 可得，$M\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{1}$ 当且仅当对任意 $Y\in\mathcal{Y}$ 有 $\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^{R}(Y,M)=0$ 且 M 具有 $\mathcal{Y}\underset{R}{\otimes}-$ 正合的 $\mathcal{X}$-余分解。可见 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{2}\subseteq\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{1}$，从而有 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{1}=\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{2}$。

因为 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{3}=\{M\mid$ 存在 $\mathcal{Y}\underset{R}{\otimes}-$ 正合的正合列 $\cdots\to G_1\to G_0\to G^0\to G^1\to\cdots$，其中 $G_i,G^i\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{2}\}$，且 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{1}=\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{2}$，所以 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{3}=\{M\mid$ 存在 $\mathcal{Y}\underset{R}{\otimes}-$ 正合的正合列 $\cdots\to G_1\to G_0\to G^0\to G^1\to\cdots$，其中 $G_i,G^i\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{1}\}$。从而有 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{2}=\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{3}$。依此类推，可得对任意正整数 n，都有 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{1}=\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{2}=\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{3}=\cdots=\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}^{n}$。

命题 2　设 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是一个完全对偶对，则以下条件等价：

(i) M 是 Gorenstein $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-平坦模。

(ii) 对任意 $Y\in\mathcal{Y}$，有 $\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^{R}(Y,M)=0$ 且存在 $\mathcal{Y}\underset{R}{\otimes}-$ 正合的正合列

$0\to M\to X^0\to X^1\to\cdots$，其中 $X^i\in\mathcal{X}$。

(iii) $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-$\mathrm{pd}(M)$ 有限且对任意 $Y\in\mathcal{Y}$ 有 $\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^{R}(Y,M)=0$。

(iv) 存在 $\mathcal{Y}\underset{R}{\otimes}-$ 正合的正合列 $0\to G\to X\to M\to 0$，其中 $X\in\mathcal{X}$ 且 $G\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。

(v) 存在左 R-模正合列 $0\to M\to X'\to G'\to 0$，其中 $X'\in\mathcal{X}$ 且 $G'\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。

证明　(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (v) 由引理 3 易证。

(i)$\Rightarrow$(iv)　设 M 是 Gorenstein $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-平坦模，则由定义 1 知存在左 R-模正合列

$X:\cdots\to X_1\to X_0\to X^0\to X^1\to\cdots$，其中 $X_i,X^i\in\mathcal{X}$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(X^0\to X^1)$ 且 X 在 $\mathcal{Y}\underset{R}{\otimes}-$ 下正合。令 $G\cong\mathrm{Ker}(X_0\to X^0)$ 且 $X=X_0$，则正合列 $0\to G\to X\to M\to 0$ 是 $\mathcal{Y}\underset{R}{\otimes}-$ 正合的，其中 $X\in\mathcal{X}$。又由例 1 的(2)知 $G\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。

(iv)$\Rightarrow$(iii)　因为对任意 $X\in\mathcal{X}$，有 $X\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$，所以 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-$\mathrm{pd}(M)$ 有限。对任意 $Y\in\mathcal{Y}$，由引理 3 知 $\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^{R}(Y,G)=0$ 且 $\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^{R}(Y,X)=0$。用函子 $Y\underset{R}{\otimes}-$ 作用于正合列 $0\to G\to X\to M\to 0$ 可得长正合列

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_2^R(Y,M)\to\mathrm{Tor}_1^R(Y,G)\to\mathrm{Tor}_1^R(Y,X)\to\mathrm{Tor}_1^R(Y,M)\to Y\underset{R}{\otimes}G\to\cdots\tag{1}$$

可见，$\mathrm{Tor}_{i\geqslant 2}^{R}(Y,M)=0$。又因为正合列 $0\to G\to X\to M\to 0$ 是 $\mathcal{Y}\underset{R}{\otimes}-$ 正合的且 $\mathrm{Tor}_1^R(Y,X)=0$，所以 $\mathrm{Tor}_1^R(Y,M)=0$。因此 $\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^{R}(Y,M)=0$。

(iii)$\Rightarrow$(i)　设正合列 $0\to G\to X\to M\to 0$ 是 $\mathcal{Y}\underset{R}{\otimes}-$ 正合的，其中 $X\in\mathcal{X}$ 且 $G\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$，根据定义 1 易知 M 是 Gorenstein $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-平坦模。

定理 1　设 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是一个完全对偶对，$(\varepsilon):0\to U\to V\to W\to 0$ 是左 R-模正合列，则

(i) 如果 $U,W\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$，那么 $V\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。

(ii) 如果 $U,V\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ 且对任意 $Y\in\mathcal{Y}$ 有 $\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^{R}(Y,W)=0$，那么 $W\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。

(iii) 如果 $V,W\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$，那么 $U\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。

证明　(i) 设 $U,W\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。因为 $\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ 是投射可解的，由文献[12]中命题 2.12 知，$\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ 关于扩张封闭，所以 $V\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。

(ii) 设 $U,V\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ 且对任意 $Y\in\mathcal{Y}$ 有 $\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^{R}(Y,W)=0$。根据文献[12]中命题 2.15 可得 $W\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。

(iii) 设 $V,W\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。由 V 是 Gorenstein $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-平坦模及命题 2 可知，存在正合列 $0\to G\to X\to V\to 0$，其中 $X\in\mathcal{X}$ 且 $G\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。构造拉回图，如图 1 所示。

在正合列 $0\to H\to X\to W\to 0$ 中，$X\in\mathcal{X}$ 且 $W\in\mathrm{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。根据命题 1 可得 H 是 Gorenstein $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-平坦模。对任意 $Y\in\mathcal{Y}$，用函子 $Y\underset{R}{\otimes}-$ 作用于图 1 中第一列正合列可得长正合列

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_1^R(Y,G)\to\mathrm{Tor}_1^R(Y,H)\to\mathrm{Tor}_1^R(Y,U)\to\mathrm{Tor}_2^R(Y,G)\to\cdots\tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & G \arrow[d] \arrow[r, equal] & G \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图1 $U \to V$ 与 $X \to V$ 的拉回图

又因为 $H,G \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$，由命题 1 知 $\mathrm{Tor}_1^R(Y,H)=0=\mathrm{Tor}_2^R(Y,G)$。根据文献[12]中命题 2.15 可得 $U \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$。

定理 2 设 (x,y) 是一个完全对偶对，(ε):$0 \to U \to V \to W \to 0$ 是左 R-模正合列，则

(i) 如果 $V \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$，那么 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(W) \leqslant \mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)+1$。

(ii) 如果 $U \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$，那么 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V) \leqslant \mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(W)$。

证明 (i) 设 $V \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$。若 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)=+\infty$，则 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(W) \leqslant \mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)+1$ 显然成立。若 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)<+\infty$，不妨设 x - $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)=n$，则存在长度为 n 的正合列

$$0 \to G_n \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to U \to 0 \tag{3}$$

其中 $G_i \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$ ($i=0,1,\cdots,n$)。将式(3)与 (ε) 拼接可得正合列

$$0 \to G_n \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to V \to W \to 0 \tag{4}$$

其中 $G_i \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$ 且 $V \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$。从而 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(W) \leqslant n+1=\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)+1$。

(ii) 设 $U \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$。若 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(W)=+\infty$，则不等式显然成立。若 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(W)<+\infty$，不妨设 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(W)=m$，由文献[12]中定理 2.16 知，存在正合列 $0 \to K_0 \to X_0 \to W \to 0$，其中 $X_0 \in x$ 且 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(K_0)=m-1$。构造拉回图，如图 2 所示。

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K_0 \arrow[d] \arrow[r, equal] & K_0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, equal] & H \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & V \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图2 $V \to W$ 与 $X_0 \to W$ 的拉回图

在中间行正合列 $0 \to U \to H \to X_0 \to 0$ 中，$U, X_0 \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$ 且 $\mathrm{GF}_{(x,y)}$ 关于扩张封闭，可见 $H \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$。又因为图 2 中间列正合列 $0 \to K_0 \to H \to V \to 0$ 中，$\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(K_0)=m-1$，所以 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V) \leqslant m-1+1=m$，即 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V) \leqslant \mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(W)$。

定理 3 设 (x,y) 是一个完全对偶对，(ε):$0 \to U \to V \to W \to 0$ 是左 R-模正合列，如果 $W \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$ 且 (ε) 在 $\mathrm{Hom}_R(x,-)$ 下正合，那么 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)=\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V)$。

证明 设 $W \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$ 且 (ε) 在 $\mathrm{Hom}_R(x,-)$ 下正合。

先证不等式 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U) \leqslant \mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V)$。若 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V)=+\infty$，则不等式显然成立。若 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V)<+\infty$，不妨设 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V)=n$。当 $n=0$ 时，V 是 Gorenstein (x,y)-平坦模。由 $W \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$ 及定理 1 可知，$U \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$。可见 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)=0 \leqslant \mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V)$，不等式成立。当 $n \geqslant 0$ 时，存在长度为 n 的正合列

$$0 \to G_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to V \to 0 \tag{5}$$

其中 $X_i \in x$ 且 $G_n \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$。令 $K_0=\mathrm{Ker}(X_0 \to V)$，显然 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(K_0)=n-1$。构造拉回图，如图 3 所示。

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K_0 \arrow[d] \arrow[r, equal] & K_0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图3 $U \to V$ 与 $X_0 \to V$ 的拉回图

在正合列 $0 \to H \to X_0 \to W \to 0$ 中，$X_0 \in x$ 且 $W \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$，由命题 1 可得 $H \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$。考虑图 3 中第一列正合列 $0 \to K_0 \to H \to U \to 0$，因为 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(K_0)=n-1$ 且 $H \in \mathrm{GF}_{(x,y)}$，所以 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U) \leqslant n-1+1=n$，即 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U) \leqslant \mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V)$。

再证 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V) \leqslant \mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)$。若 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)=+\infty$，则不等式显然成立。若 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)<+\infty$，不妨设 $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)=m$。对 m

用数学归纳法,当 $m=0$ 时,由 $GF_{(x,y)}$ 关于扩张封闭易知 $GF_{(x,y)}\text{-}pd(V)=0$,可见结论成立。假设结论对于 m-1 成立,下面讨论对于 m 的情形。由文献[12]中定理 2.16 知,存在长度为 m 的正合列

$$0\to G'_m\to X'_{m-1}\to\cdots\to X'_1\to X'_0\to U\to 0 \quad (6)$$

其中 $X'_i\in x$ 且 $G'_m\in GF_{(x,y)}$。令 $K'_0=Ker(X'_0\to U)$,则 $GF_{(x,y)}\text{-pd}(K'_0)=m-1$。由 $W\in GF_{(x,y)}$ 知存在正合列 $0\to K''_0\to X''_0\to W\to 0$,其中 $X''_0\in x$ 且 $K''_0\in GF_{(x,y)}$。又因为正合列 (ε) 在 $\mathrm{Hom}_R(x,-)$ 下正合,所以可构造交换图,如图 4 所示。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & K'_0 & \to & N & \to & K''_0 & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X'_0 & \to & X'_0\oplus X'' & \to & X''_0 & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & U & \to & V & \to & W & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

图 4 交换图

在正合列 $0\to K'_0\to N\to K''_0\to 0$ 中,$GF_{(x,y)}\text{-pd}(K'_0)=m-1$。由归纳假设知,$GF_{(x,y)}\text{-pd}(N)\leqslant GF_{(x,y)}\text{-pd}(K'_0)=m-1$。考虑上图中间列正合列 $0\to N\to X'_0\oplus X''_0\to V\to 0$,由 $X'_0\oplus X''_0\in x$ 可得 $GF_{(x,y)}\text{-pd}(V)\leqslant m-1+1=m=GF_{(x,y)}\text{-pd}(U)$。可见结论对于 m 也成立。

综上所述,$GF_{(x,y)}\text{-pd}(U)=GF_{(x,y)}\text{-pd}(V)$。

定理 4 设 (x,y) 是一个完全对偶对,则 x 是 $GF_{(x,y)}$ 的生成子和余生成子。

证明 对任意左 R-模 $M\in GF_{(x,y)}$,根据定义 3 可得,存在左 R-模正合列

$$X:\cdots\to X_1\to X_0\to X^0\to X^1\to\cdots, \quad (7)$$

其中 $X_i,X^i\in x$,使得 $M\cong\mathrm{Ker}(X^0\to X^1)$ 且 X 在 $y\underset{R}{\otimes}-$ 下正合(即对任意 $Y\in y$,X 在函子 $Y\underset{R}{\otimes}-$ 下正合)。令 $M'\cong\mathrm{Ker}(X_0\to X^0)$ 且 $M''\cong\mathrm{Ker}(X^1\to X^2)$,则有两个短正合列

$0\to M'\to X_0\to M\to 0$ 和 $0\to M\to X^0\to M''\to 0$,其中 $X_0,X^0\in x$。又由例 1 中(2)可知,$M'\in GF_{(x,y)}$ 且 $M''\in GF_{(x,y)}$。因此 x 是 $GF_{(x,y)}$ 的生成子和余生成子。

推论 1 设 (x,y) 是一个完全对偶对,$0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是 R-模正合列,则

(1)如果 $M,M''\in GF_{(x,y)}$ 且 $\mathrm{Ext}^1_R(GF_{(x,y)},M')=0$,则 $M'\in x$。

(2)如果 $M,M'\in GF_{(x,y)}$ 且 $\mathrm{Ext}^1_R(M'',GF_{(x,y)})=0$,则 $M''\in x$。

证明 根据定理 4、引理 4 以及完备对偶对的定义可证。

3 结束语

利用环模理论和同调代数的方法,研究了 Gorenstein (x,y)-平坦模类 $GF_{(x,y)}$ 的稳定性,以及任意左 R-模 M 的 $GF_{(x,y)}$-投射维数。证明了 x 是模类 $GF_{(x,y)}$ 的生成子和余生成子。结果表明:当 (x,y) 是一个完备对偶对,$GF_{(x,y)}$ 是投射可解的且 $\mathrm{Tor}^R_{i\geqslant 1}(y,x)=0$ 时,任意左 R-模短正合列 (ε):$0\to U\to V\to W\to 0$ 中各项的 Gorenstein (x,y)-平坦维数之间的具有密切联系。从而补充了 Gorenstein 同调代数中的相关理论,并进一步完善了对 Gorenstein 模类及其维数后续问题的研究,具有一定的理论价值。

参 考 文 献:

[1] AUSLANDER M,BRIDGER M.Stable module theory[M].New York:American Mathematical Soc,1969.

[2] ENOCHS E E,JENDA O M G.Gorenstein injective and projective modules[J].Mathematische Zeitschrift,1995,220(1):611-633.

[3] ENOCHS E E,JENDA O M G,Torrecillas B.Gorenstein flflat modules[J].Journal of Nanjing University(Mathematical Biquarterly),1993,10(2):1-9.

[4] HOLM H.Gorenstein homological dimensions[J].Journal of pure and applied algebra,2004,189(3):167-193.

[5] BENNIS D,MAHDOU N.Strongly Gorenstein projective,injective,and flat modules[J].Journal of Pure and Applied Algebra,2007,210(2):437-445.

[6] 杨刚.Gorenstein 投射、内射和平坦复形[J].数学学报中文版,2011,54(3):451-459.

[7] ZHAO R Y, REN W. VW-Gorenstein complexes[J]. Turkish Journal of Mathematics,2017,41(3):537-547.

[8] REN W.Gorenstein projective modules and Frobenius

extensions[J].Science China,2018,61(7):1175-1186.

[9] 李煜彦,何东林,樊亮.强 G_C-FP-投射模[J].青岛大学学报(自然科学版),2019,32(4):110-115.

[10] ESTRADA S, IACOB A, YEOMANS K. Gorenstein Projective Precovers[J].Mediterranean Journal of Mathematics,2017,14(1):33-36.

[11] 何东林,李煜彦.复形的 C-Gorenstein 投射维数[J].四川理工学院学报(自然科学版),2019,32(3):89-94.

[12] WANG Z, YANG G, ZHU R. Gorenstein flat modules with respect to duality pairs[J].Communications in Algebra,2019,357(2):1-18.

[13] LIANG L, DING N Q, YANG G. Some remarks on projective generators and injective cogenerators[J].Acta Mathematica Sinica English,2014,30(12):2063-2078.

[14] HOLM H, JORGENSEN P. Cotorsion pairs induced by duality pairs [J]. Journal of Commutative Algebra, 2009,1(4):621-633.

[15] GILLESPIE J. Duality pairs and stable module categories[J].Journal of Pure and Applied Algebra,2019,223(8):3425-3435.

Gorenstein Flat Modules and Dimension with Respect to Duality Pairs

HE Donglin, FAN Liang

(School of Mathematics and Information Science, Longnan Teachers College, Longnan 742500, China)

Abstract: Based on the notion of Gorenstein (x,y)-flat modules introduced by Wang et al, using methods of rings and modules and homological algebras, the stability of the class for Gorenstein (x,y)-flat modules is investigated, some properties of $\mathrm{GF}_{(x,y)}$-projective dimension $\mathrm{GF}_{(x,y)}$-pd(M) are duscussed with an arbitary left R-module$M$, where (x,y) is a perfect duality pair in the category of R-module. It is proved that x is a generator and cogenerator of module class $\mathrm{GF}_{(x,y)}$, and there are close connections between $\mathrm{GF}_{(x,y)}$-projective dimension for each term in a short exact sequence $(\varepsilon): 0 \to U \to V \to W \to 0$ of left R-modules. The results indicate that: if V is a Gorenstein (x,y)-flat module, then $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(W) \leqslant \mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U)+1$; if U is a Gorenstein (x,y)-flat module, then $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V) \leqslant \mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(W)$; if W is a Gorenstein (x,y)-flat module and (ε) is exact under the functor $\mathrm{Hom}_R(x,-)$, then the equation $\mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(U) = \mathrm{GF}_{(x,y)}\text{-pd}(V)$ holds, when (x,y) is a perfect duality pair, $\mathrm{GF}_{(x,y)}$ is projectively resolving and $\mathrm{Tor}^R_{i\geqslant 1}(y,x) = 0$.

Key words: duality pairs; Gorenstein (x,y)-flat modules; dimensions; projectively resolving