第 32 卷第 5 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 32 No. 5
2019 年 10 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Oct. 2019
文章编号:1673-1549(2019)05-0076-04 DOI:10.11863/j. suse. 2019. 05. 12

Silting 模的一个推广

何东林, 李煜彦

(陇南师范高等专科学校数信学院, 甘肃 陇南 742500)

摘 要:基于 Angeleri Hügel 等人提出的 silting 模的概念,以及 Breaz 等人对 silting 模生成的 torsion 类的研究,给出了 n -silting 模的定义。称左 R 模 T 是 n -silting 模,如果存在正合列 $P_{n+1} \xrightarrow{\sigma} P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to T \to 0$, 其中 $P_i(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ 为投射模,且 $Pres^n(T) = D_\sigma$。n -silting 模是 silting 模的一个推广,1-silting 模与 silting 模是一致的。利用环模理论和同调代数的方法,研究了 n -silting 模的若干性质和等价刻画,得出当 T 是 n -silting 模时, $Pres^n(T) = Gen(T) = D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i \geqslant n}}$ 成立,其中 $D_\sigma = \{X \in \mathbf{R}\text{-}Mod \mid Hom_R(\sigma, X)$ 是满同态$\}$。并讨论了 n -silting 模与 n -tilting 模之间的关系,结果表明,如果存在左 R 模正合列 $0 \to P_{n+1} \xrightarrow{\sigma} P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to T \to 0$ 且 $D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i \geqslant 1}}$, 其中 $P_i(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ 为投射模,那么以下说法等价:(1) T 是 n -silting 模;(2) T 是 n -tilting 模。

关键词:silting 模; n -silting 模; n -tilting 模;正合列

中图分类号:O153 **文献标志码**:A

引 言

倾斜理论作为 Artin 代数表示论中重要的研究课题之一,受到许多作者的关注[1-5]。

Colpi 等[6]给出了 1-tilting 模(未必有限生成)的一个等价刻画: T 是 1-tilting 模当且仅当 $Gen(T) = T^{\perp_1}$, 其中 $Gen(T)$ 表示由模 T 生成的模类。Bazzoni[7]将其推广,得到了 n -tilting 模的一个等价刻画: T 是 n -tilting 模当且仅当 $Pres^n(T) = T^{\perp_{i \geqslant 1}}$, 其中 $Pres^n(T)$ 表示由模 Tn 表示的模类。为了研究 Dynkin 箭图表示的有界导出范畴的 τ 结构,Keller 等[8]引入了 silting 复形的概念。在此基础上,2014 年 Angeleri Hügel 等[9]给出 silting 模的定义,并证明 T 是 1-tilting 模,等价于 T 是具有正合列 $0 \to P_2 \to P_1 \to T \to 0$ 的 silting 模,其中 P_1, P_2 为投射模。2018 年 Breza 等[10]研究了 silting 模生成的 torsion 类。Marks 等[11]讨论了导出范畴的 silting 模和 cosilting 模。Hügel[12]研究了 silting 模的数量。2019 年 Marks 等[13]又讨论了通过 silting 模的广泛局部化。因此,可考虑 silting 模的一个推广— n -silting 模,研究其性质和等价刻画,并讨论 n -silting 模与 n -tilting 模之间的关系。

文中的环 R 均指有单位元的结合环,所有模均指有单位元的酉左 R 模。用 R -Mod 表示左 R 模范畴, $Add_R(T)$ 表示同构于 T 的拷贝直和的直和因子的模组成的类[14]。记 $Pres^n(T) = \{M \in R\text{-Mod} \mid$ 存在正合列 $T_{n+1} \to \cdots \to T_2 \to T_1 \to M \to 0$, 其中 $T_i \in Add_R(T)(1 \leqslant i \leqslant n+1)\}$。显然 $Pres^1(T) = Gen(T)$。记 $T^{\perp_i} = \{N \in$

收稿日期:2019-09-02

基金项目:甘肃省高等学校创新能力提升项目(2019B-224);甘肃省高等学校科研项目(2018A-269)

作者简介:何东林(1983-),女,甘肃白银人,讲师,硕士,主要从事同调代数方面的研究,(E-mail)hdl7979085@163.com

R-Mod| $Ext_R^i(T,N)=0\}$, $T^{\perp_{i\geq n}}=\{N\in R$-Mod|对任意 $i\geq n$, 有 $Ext_R^i(T,N)=0\}$(参见[15])。设 $\sigma:U\to V$ 是左 R 模同态,记 $D_\sigma=\{X\in R$-Mod| $Hom_R(\sigma,X):Hom_R(V,X)\to Hom_R(U,X)$ 为满同态$\}$。

1　定义和引理

定义 1[9]　称左 R 模 T 是 silting 模,如果存在正合列 $P_2\xrightarrow{\sigma}P_1\to T\to 0$ 且 $Gen(T)=D_\sigma$, 其中 P_1,P_2 为投射模。

定义 2[7]　称左 R 模 T 是 n-tilting 模,如果以下条件成立:

(1) $pd_R(T)\leq n$,其中 $pd_R(T)$ 表示模 T 的投射维数;

(2)对任意基数 k,都有 $Ext_R^i(T,T^{(k)})=0$;

(3)存在正合列 $0\to R\to T_1\to T_2\cdots\to T_{n+1}\to 0$,其中 $T_1\in Add_R(T)(1\leq i\leq n+1)$。

引理 1[7]　设 T 是左 R-模,则以下条件等价:

(1) T 是 n-tilting 模;

(2) $Pres^n(T)=T^{\perp_{i\geq 1}}$。

引理 2[9]　设 T 是左 R 模,则以下条件等价:

(1) T 是 1-tilting 模;

(2) T 是 silting 模且存在正合列 $0\to P_2\xrightarrow{\sigma}P_1\to T\to 0$, 其中 P_1,P_2 为投射模。

下面引入 n-silting 模的概念。

定义 3　称左 R 模 T 是 n-silting 模,如果存在正合列

$$P_{n+1}\xrightarrow{\sigma}P_n\to\cdots\to P_2\to P_1\to T\to 0,$$

其中 $P_i(1\leq i\leq n+1)$ 为投射模,且 $Pres^n(T)=D_\sigma$。

显然 1-silting 模就是 silting 模。

2　主要结果

命题 1　如果 T 是 n-silting 模,那么 $Gen(T)\subseteq D_\sigma\subseteq T^{\perp_n}$。

证明　设 T 是 n-silting 模,则存在正合列

$$P_{n+1}\xrightarrow{\sigma}P_n\to\cdots\to P_2\to P_1\to T\to 0,\qquad(1)$$

其中 $P_i(1\leq i\leq n+1)$ 为投射模,且 $Pres^n(T)=D_\sigma$。

先证 $Gen(T)\subseteq D_\sigma$。对任意 $M\in Gen(T)$, 存在满同态 $\alpha:T^{(I)}\to M$, 其中 I 为集合。对任意同态 $f\in Hom_R(P_{n+1},M)$, 由 P_{n+1} 是投射模及 α 是满同态知,存在同态 $g\in Hom_R(P_{n+1},T^{(I)})$ 使得 $f=\alpha g$。因为 $T^{(I)}\in Pres^n(T)=D_\sigma$, 所以存在同态 $h\in Hom_R(P_n,T^{(I)})$, 使得 $g=h\sigma$。令 $\beta=\alpha h$, 则 $f=\alpha g=\alpha h\sigma=\beta\sigma$, 即下图可交换

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[dr, "f"] & P_n \arrow[dl, dashed, "h"] \arrow[d, dashed, "\beta"] \\
T^{(I)} \arrow[r, "\alpha"'] & M
\end{tikzcd}$$

图 1　$f=\beta\sigma$ 的交换图

可见 $M\in D_\sigma$。由 M 的任意性知 $Gen(T)\subseteq D_\sigma$。

再证 $D_\sigma\subseteq T^{\perp_n}$。将同态 $\sigma:P_{n+1}\to P_n$ 分解为满同态 $\pi:P_{n+1}\to \mathrm{lm}\sigma$ 和包含同态 $\lambda:\mathrm{lm}\sigma\to P_n$。令 $C=Coker\sigma$, 对任意模 $N\in D_\sigma$, 用函子 $Hom_R(-,N)$ 作用于正合列

$$0\to C\to P_{n-1}\to\cdots\to P_2\to P_1\to T\to 0,\qquad(2)$$

由维数转移公式可得 $Ext_R^1(C,N)\cong Ext_R^n(T,N)$。考虑短正合列 $0\to \mathrm{lm}\sigma\to P_n\to C\to 0$, 用函子 $Hom_R(-,N)$ 作用可得如下长正合列

$$0\to Hom_R(C,N)\to Hom_R(P_n,N)\to Hom_R(Im\sigma,N)\to Ext_R^1(C,N)\to 0\qquad(3)$$

对任意 $\xi\in Hom_R(\mathrm{lm}\sigma,N)$, 由 $N\in D_\sigma$ 易得如下交换图

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dashed, "\pi"] & P_n \arrow[d, dashed, "\eta"] \\
\mathrm{Im}\sigma \arrow[r, "\xi"] & N
\end{tikzcd}$$

图 2　$\eta\sigma=\xi\pi$ 的交换图

即存在同态 $\eta\in Hom_R(P_n,N)$, 使得 $\eta\sigma=\xi\pi$。而 $\sigma=\lambda\pi$, 可见 $\eta\lambda\pi=\xi\pi$。因为 π 为满同态且满同态右可消, 所以 $\xi=\eta\lambda$。从而 $Hom_R(P_n,N)\to Hom_R(\mathrm{lm}\sigma,N)$ 为满同态且 $Ext_R^1(C,N)=0$。因此 $Ext_R^n(T,N)=0$。由 N 的任意性知, $D_\sigma\subseteq T^{\perp_n}$。

综上所述, $Gen(T)\subseteq D_\sigma\subseteq T^{\perp_n}$ 成立。

例 1　设左 R 模 T 是 silting 模,则有 $Gen(T)=D_\sigma\subseteq T^{\perp_1}$ 成立。

证明　因为左 R 模 T 是 silting 模,即 1-silting 模。根据命题 1 可得, $Gen(T)=D_\sigma\subseteq T^{\perp_1}$ 显然成立。

定理 1 设 T 是左 R 模，$0 \to P_{n+1} \xrightarrow{\sigma} P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to T \to 0$ 是左 R 模正合列且 $D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq 1}}$，其中 $P_i(1 \leq i \leq n+1)$ 为投射模。如果 T 是 n -tilting 模，那么 T 是 n -silting 模。

证明 设 T 是 n -tilting 模，则由引理 1 知 $Pres^n(T) = T^{\perp_{i\geq 1}}$。

先证 $Pres^n(T) \subseteq D_\sigma$。对任意 $M \in Pres^n(T) \subseteq Gen(T)$，存在满同态 $\alpha: T^{(I)} \to M$，其中 I 为集合。对任意 $f \in Hom_R(P_{n+1}, M)$，由 P_{n+1} 是投射模及 α 是满同态知，存在同态 $\beta \in Hom_R(P_{n+1}, T^{(I)})$ 使得 $f = \alpha\beta$。因为 $T^{(I)} \in Pres^n(T) = T^{\perp_{i\geq 1}}$，所以存在同态 $\gamma \in Hom_R(P_n, T^{(I)})$，使得 $\beta = \gamma\sigma$。不妨令 $g = \alpha\gamma$，则 $g \in Hom_R(P_n, M)$ 且 $f = g\sigma$。可见 $Hom_R(P_{n+1}, M) \to Hom_R(P_n, M)$ 为满同态。从而 $M \in D_\sigma$。由 M 的任意性可知，$Pres^n(T) \subseteq D_\sigma$。

再证 $D_\sigma \subseteq Pres^n(T)$。由假设知 $D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq 1}}$。又因为 $Pres^n(T) = T^{\perp_{i\geq 1}}$，所以 $D_\sigma \subseteq Pres^n(T)$。

因此 T 是 n -silting 模。

定理 2 设 T 是左 R 模，$0 \to P_{n+1} \xrightarrow{\sigma} P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to T \to 0$ 是左 R 模正合列且 $D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq 1}}$，其中 $P_i(1 \leq i \leq n+1)$ 为投射模。如果 T 是 n -silting 模，那么 T 是 n -tilting 模。

证明 设 T 是 n -silting 模，则由引理 1 知 $Pres^n(T) = D_\sigma$。先证 $T^{\perp_{i\geq 1}} \subseteq D_\sigma$。对任意 $N \in T^{\perp_{i\geq 1}}$，有 $Ext_R^{i\geq 1}(T, N) = 0$。令 $C = Coker\sigma$，用 $Hom_R(-, N)$ 作用于短正合列 $0 \to P_{n+1} \to P_n \to C \to 0$ 可得长正合列

$$0 \to Hom_R(C, N) \to Hom_R(P_n, N) \to Hom_R(P_{n+1}, N) \to Ext_R^1(C, N) \to 0 \tag{4}$$

由维数转移公式得 $Ext_R^1(C, N) \cong Ext_R^n(T, N) = 0$。可见 $Hom_R(P_{n+1}, N) \to Hom_R(P_n, N)$ 为满同态。从而 $N \in D_\sigma$。由 N 的任意性知，$T^{\perp_{i\geq 1}} \subseteq D_\sigma$。由假设知 $D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq 1}}$。可见等式 $Pres^n(T) = D_\sigma = T^{\perp_{i\geq 1}}$ 成立。根据引理 1 可得，T 是 n -tilting 模。

定理 3 设 T 是左 R 模，$0 \to P_{n+1} \xrightarrow{\sigma} P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to T \to 0$ 是左 R 模正合列且 $D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq 1}}$，其中 $P_i(1 \leq i \leq n+1)$ 为投射模。则以下条件等价：

(1) T 是 n -tilting 模；

(2) T 是 n -silting 模。

证明 由定理 1 和定理 2 易证。

例 2 设 T 是 n -silting 模且对应的 σ 为单同态，求证 $Pres^n(T) = Gen(T) = D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq n}}$。

证明 $Pres^n(T) \subseteq Gen(T)$ 显然成立。由命题 1 知，$Gen(T) \subseteq D_\sigma \subseteq T^{\perp_n}$。又因为 T 是 n -silting 模，所以 $Pres^n(T) = D_\sigma$。从而 $Pres^n(T) = Gen(T) = D_\sigma \subseteq T^{\perp_n}$。

下证 $D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq n}}$。对任意 $M \in D_\sigma$，令 $C = Coker\sigma$，考虑正合列 $0 \to P_{n+1} \to P_n \to C \to 0$，用函子 $Hom_R(-, M)$ 作用于该正合列可得如下长正合列

$$\cdots \to Hom_R(P_n, M) \to Hom_R(P_{n+1}, N) \to Ext_R^1(C, M) \to 0 \to 0 \to Ext_R^2(C, M) \to 0 \to \cdots \tag{5}$$

可见 $Ext_R^{i\geq 2}(C, M) = 0$。又因为 $M \in D_\sigma$，所以 $Hom_R(P_{n+1}, M) \to Hom_R(P_n, M)$ 为满同态。易知 $Ext_R^1(C, M) = 0$。从而 $Ext_R^{i\geq 1}(C, M) = 0$. 由维数转移公式可得 $Ext_R^i(C, M) \cong Ext_R^{i+n-1}(T, M)$。可见对任意 $i \geq n$，都有 $Ext_R^i(T, M) = 0$，即 $M \in T^{\perp_{i\geq n}}$。由 M 的任意性可知，$D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq n}}$。

综上所述，$Pres^n(T) = Gen(T) = D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq n}}$ 成立。

例 3 设 T 是 silting 模，则有 $Gen(T) = D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq 1}}$ 成立。

证明 因为 T 是 silting 模，即 1-silting 模。根据定理 1 得，$Pres^1(T) = Gen(T) = D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq 1}}$ 成立。可见 $Gen(T) = D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq 1}}$ 显然成立。

例 4 正则模 $_RR$ 既是 n -silting 模，又是 n -tilting 模。

证明 先证 $_RR$ 是 n -silting 模。因为 $_RR$ 是投射模，考虑正合列

$$0_{n+1} \xrightarrow{\sigma=0} 0_n \to \cdots \to 0_2 \to R \xrightarrow{1_R} R \to 0, \tag{6}$$

其中 $0_i = 0 (i = 2, 3, \cdots n+1)$，显然 $D_\sigma = R\text{-Mod} = Pres^n(R)$。由定理 3 可得 $_RR$ 是 n -silting 模。

再证 $_RR$ 是 n -tilting 模。因为 $Pres^n(R) = R\text{-Mod} = R^{\perp_{i\geq 1}}$，根据引理 1 易得 $_RR$ 是 n -tilting 模。

3 结束语

利用环模理论和同调代数的方法，给出了 silting 模的一个推广，研究了 n -silting 模的若干性质和等价刻画。证明当 T 是 n -silting 模时，$Pres^n(T) = Gen(T) = D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq n}}$ 成立。结果表明如果存在左 R 模正合列

$0 \to P_{n+1} \xrightarrow{\sigma} P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to T \to 0$ 且 $D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq 1}}$,其中 P_i ($1 \leqslant i \leqslant n+1$) 为投射模,那么以下说法等价:(1) T 是 n -silting 模;(2) T 是 n -tilting 模。从而补充了 silting 模和 tilting 模的相关结论,进一步完善了对 silting 模及 tilting 模后续问题的研究,具有一定的理论价值。

参 考 文 献:

[1] MIYASHITA Y. Tilting modules of finite projective dimension[J]. Mathematische Zeitschrift, 1986, 193(1): 113-146.

[2] MIYASHITA Y.Tilting modules associated with a series of idempotent ideals[J].Journal of Algebra,2001,283(2): 485-501.

[3] WAKAMATSU T. Stable equivalence of self-injective algebras and a generalization of tilting modules[J].Journal of Algebra,1990,134(2):298-325.

[4] HÜGEL L A,HERBERA D,TRLIFAJ J.Tilting modules and Gorenstein rings[C].Berlin:Walter de Gruyter, 2006,18(2):211-229.

[5] MANTESE F,REITEN I.Wakamatsu tilting modules[J]. Journal of Algebra,2004,278(2):532- 552.

[6] COLPI R,TRLIFAJ J.Tilting modules and tilting torsion theories[J].Journal of Algebra,1995,178(2):614- 634.

[7] BAZZONI S.A characterization of n-cotilting and n-tilting modules[J].Journal of Algebra,2004,273(1):359-372.

[8] KELLER B,VOSSIECK D.Aisles in derived categories[J]. Bull Soc Math Belg Sér A,1988,40(2):239-253.

[9] HÜGEL L A,MARKS F,VITORIA J.Silting modules[J]. International Mathematics Research Notices, 2016(4): 1251-1284.

[10] BREAZ S,ŽEMLICKA J.Torsion classes generated by silting modules[J]. Arkiv för matematik,2018,56(1): 15-32.

[11] MARKS F,VITORIA J.Silting and cosilting classes in derived categories[J].Journal of Algebra,2018,50(1): 526-544.

[12] HÜGELl L A.On the abundance of silting modules[J]. Surveys in representation theory of algebras,2018,716 (1):27-39.

[13] MARKS F,ŠTOVICEK J. Universal localizations via silting[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A:Mathematics,2019,149(2):511-532.

[14] DI Z, WEI J, ZHANG X, et al. Tilting subcategories with respect to cotorsion triples in abelian categories [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section AMathematics,2017,147(4):703-726.

[15] ENOCHS E E,JENDA O M G.Relative homological algebra[M].Berlin:Walter de Gruyter,2011.

A Generalization of Silting Modules

HE Donglin, *LI Yuyan*

(School of Mathematics and Information Science, Longnan Teachers College, Longnan 742500, China)

Abstract: Based on the notion of silting modules introduced by Angeleri Hügel et al, and investigations of Breaz et al for torsion class generated by silting modules, the definition of n-silting modules is given. An R-module T is called n-silting module, if there is an exact sequence $P_{n+1} \xrightarrow{\sigma} P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to T \to 0$ with P_i ($1 \leqslant i \leqslant n+1$) projective module, and $Pres^n(T) = D_\sigma$. n-silting module is a generalization of silting module, 1-silting modules are coincide with silting modules. Using methods of rings and modules and homological algebras, some properties and characterizations of n-silting modules are investigated, it is got that $Pres^n(T) = Gen(T) = D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq n}}$, when T is n -silting module. And the relationship between n-silting modules and n -tilting modules is discussed, the results indicate that the following statements are equivalent: (1) T is n-silting module; (2) T is n-tilting module, if there exists an exact sequence $0 \to P_{n+1} \xrightarrow{\sigma} P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to T \to 0$ and $D_\sigma \subseteq T^{\perp_{i\geq 1}}$ with P_i ($1 \leqslant i \leqslant n+1$) is projective module.

Key words: silting modules; n-silting modules; n-tilting modules; exact sequences