第 25 卷第 4 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 25 No. 4
2012 年 8 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Aug. 2012
文章编号:1673-1549(2012)04-0085-04 DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2012.04.023

随机利率下的半连续型变额寿险模型

郭 欣

(上海财经大学应用数学系,上海 200433)

摘 要:寿险中的利率随机问题是近来保险精算研究的热点和重点问题之一。在传统精算学基础上,对利息力服从标准 Brownian 运动进行建模,得到了一个半连续时间情形下的随机利率模型。在此模型下计算出了纯保费、年金和责任准备金的简洁表达式,并在 De Moive 假设下通过数值计算分析了相关的风险。

关键词:随机利率;Brownian 运动;精算现值;变额寿险;风险管理

中图分类号:O211.6;F803.9 **文献标识码**:A

传统的精算理论假定利率是确定的,然而事实上利率具有随机性。随着精算理论研究的深入,利息随机性的研究在近几十年来逐步受到重视。由死亡率随机性产生的风险,可以通过出售大量的(充分多的)保单来分散,但是由利息随机性产生的风险却不能,从这个意义上说,利息风险要比死亡率风险更为重要。

1971 年 J. H. Polland 首次把利率(利息力)视为变量,对精算函数进行了研究,其后一批学者开始采用各种随机模型来模拟随机利率。关于利率随机性的建模一般有两种方法:一种是利息力累计函数建模,一种是利息力建模。到目前为止,大部分学者采用利息力累积函数建模,对随机利率服从 Gauss 过程、Poisson 过程及反射 Brownian 运动等随机过程建模,并得到了相应的矩的简洁表达式。本文的特点是将利息力由常数推广到由标准 Brownian 运动建模,并在死亡服从 De Moive 假设下,根据精算等价原理及 Brownian 运动随机积分的相关性质,得到了保费为年初给付,保险金为死亡后立即给付的半连续型变额寿险模型,使其更符合现实情况,具有较强的实用性和操作性。

1 预备知识

设 $A(t)$ 表示期初投入 1 单位本金在 t 时刻的累积值(终值),称为累积因子;$V(t)$ 表示 t 时刻 1 单位金额在期初 0 时刻的贴现值(现值),称为贴现因子;$\delta_t = A'(t)/A(t)$ 表示 t 时刻单位时间的利息力[1]。根据利息理论有 $A(t) = e^{\int_0^t \delta_s ds}$, $V(t) = e^{-\int_0^t \delta_s ds}$。假设利息力函数服从 $\delta_t = \delta + \alpha \frac{dB(t)}{dt} (0 \leqslant t < +\infty)$ [2],其中 $\delta > 0$ 为常数利息力,α 为参数,B(t)为 Brownian 运动。

引理 1[3] 标准 Brownian 运动 $B(t), t \in \mathbf{R}_+$ 具有下列性质:

(1) $B(0) = 0$ 几乎处处成立。

(2) $\forall t \in [0, +\infty), B(t) \sim N(0, tI)$。

(3)每条路径均连续,但几乎每条路径处处不可微。

(4)独立平稳增量过程,即:对于任意的有限的时间序列 $t_0 < t_1 < \cdots\cdots < t_n$,增量 $B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \cdots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ 相互独立。

(5) $\{B(t), t \geqslant 0\}$ 的密度函数为:

$$f_{B(t)}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{X^2}{2t}}$$

定理 1 $A(t) = e^{(\delta - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B(t)}, V(t) = e^{-(\delta - \frac{1}{2}\alpha^2)t - \alpha B(t)}$。

证明 $\delta_t = \frac{A'(t)}{A(t)} = \delta + \alpha \frac{dB(t)}{dt}$

$$A'(t) = \delta A(t) + \alpha A(t) \frac{dB(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow dA(t) = \delta A(t) dt + \alpha A(t) dB(t)$$

令 $F(t,x) = \text{In} x$,由 Brownian 运动的 Itô 公式[4]:

$$d\text{In} x = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2} (dx)^2$$

收稿日期:2012-04-15

作者简介:郭 欣(1989-),女,新疆喀什人,硕士生,主要从事概率论与数理统计方面的研究,(E-mail)xguo.cindy@gmail.com

$$\mathrm{dIn}A(t)=0+\frac{1}{A(t)}\mathrm{d}A(t)-\frac{1}{2}\frac{1}{A^2(t)}(\mathrm{d}A(t))^2=$$

$$\delta\mathrm{d}t+\alpha\mathrm{d}B(t)-\frac{1}{2}\alpha^2\mathrm{d}t=(\delta-\frac{1}{2}\alpha^2)\mathrm{d}t+\alpha\mathrm{d}B(t)$$

则 $\mathrm{In}A(t)=\mathrm{In}A(0)+(\delta-\frac{1}{2}\alpha^2)t+\alpha B(t)$

$\because A(t)$ 是累积因子,则

$\mathrm{In}A(0)=1$

$\Rightarrow \mathrm{In}A(t)=(\delta-\frac{1}{2}\alpha^2)t+\alpha B(t)$

$\therefore A(t)=e^{(\delta-\frac{1}{2}\alpha^2)t+\alpha B(t)}$,$V(t)=\frac{1}{A(t)}=e^{-(\delta-\frac{1}{2}\alpha^2)t-\alpha B(t)}$

定理 2 $E(e^{-\alpha B(t)})=e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t}$。

证明 $E(e^{-\alpha B(t)})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}\mathrm{d}x=$

$$e^{\frac{\alpha^2 t}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x+\alpha t)^2}{2t}}\mathrm{d}x$$

令 $z=x+\alpha t$,则

$$E(e^{-\alpha B(t)})=e^{\frac{\alpha^2 t}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z=e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

2 均衡纯保费的计算

保险实务中,纯保费与保险金的发生通常不会在同一时间点上,而对纯保费与保险金的比较不能单纯地看其数额的大小,还要考虑资金的时间价值以及投保人的死亡时间。为了解决这个问题,引入精算现值。精算现值与通常的资金现值的不同之处在于,前者还考虑了投保人的死亡概率。收入(纯保费)与支出(保额)在保单生效时的精算现值相等就是所谓的"精算等价原理"[5],纯保费就是运用精算等价原理来计算的。

考虑半连续的 n 年期变额寿险,即如果保险人在第 n 年末生存,保险公司不需要支付保险金;如果保险人在保险期内死亡,则保险公司立即支付保险金。投保人的缴费方式为离散型,即采用期初缴纳保费的方式。假定(x) 表示年龄为 x 的投保人;T 表示(x) 的剩余寿命;${}_tp$ 表示(x) 在 t 年内生存的概率;T 的密度函数为$f_T={}_tp\mu_{x+t}$,其中μ_{x+t} 表示$x+t$时刻的瞬间死亡力。用$C(t)$ 表示关于时间t的保险金函数,则给付现值函数为[6]:

$$Z(t)=C(t)V(t)=\begin{cases}C(t)e^{-\int_0^t\delta_s\mathrm{d}s} & 0\leqslant t\leqslant n\\ 0 & t>n\end{cases}$$

用 $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ 表示死亡立即给付保险金的精算现值,则有

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}=E[Z(t)]=E_BE_T[V(t)C(t)]$$

$$=\int_0^n E_B[V(t)]C(t){}_tp\mu_{x+t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^n e^{-(\delta-\frac{1}{2}\alpha^2)t}E_B(e^{-\alpha B(t)})C(t){}_tp\mu_{x+t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^n e^{(\alpha^2-\delta)t}C(t){}_tp\mu_{x+t}\mathrm{d}t$$

用 $\ddot{a}_{\overline{[T(x)]+1\wedge n}|}$ 表示给付额为 1 的期初生存年金的现值随机变量,这一生存年金的精算现值用 $\ddot{a}_{x:n}$ 表示,则有

$$\ddot{a}_{x:n}=E[\ddot{a}_{\overline{[T(x)]+1\wedge n}|}]=E_BE_T[\sum_{t=0}^{n-1}V(t)I_{\{T\geqslant t\}}]$$

$$=\sum_{t=0}^{n-1}E_B[V(t)]_tp=\sum_{t=0}^{n-1}e_t^{(\alpha^2-\delta)t}p$$

在死亡力服从 De Moive 假设下,有 $\mu_x=\frac{1}{\omega-x}$,${}_tp=\frac{\omega-x-t}{\omega-x}$,则生存时间 T 的密度函数为:

$$f_T(t)={}_tp\mu_{x+t}=\frac{1}{\omega-x}(0<t<\omega-x)$$

其中 ω 表示人类存活的最大寿命(一般而言 ω 取 100,因为年龄超过100 岁的概率非常小)。设变额保险金函数为 $C(t)=1+at$,即考虑一类变额保险精算模型,则有

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{\omega-x}\int_0^n e^{(\alpha^2-\delta)t}(1+at)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{\omega-x}\left[(\alpha^2-\delta+\frac{an}{\alpha^2-\delta}-c)e^{n(\alpha^2-\delta)}-(\alpha^2-\delta)+a\right]$$

$$\ddot{a}_{x:n}=\frac{1}{\omega-x}\sum_{t=0}^{n-1}(\omega-x-t)e^{(\alpha^2-\delta)t}=$$

$$\frac{1}{\omega-x}\left[\frac{1-e^{n(\alpha^2-\delta)}}{1-e^{\alpha^2-\delta}}(\omega-x-e^{\alpha^2-\delta})+ne^{n(\alpha^2-\delta)}\right]$$

令 $\beta_0=\alpha^2-\delta$,$\beta_1=e^{\alpha^2-\delta}$,由"精算等价原理"可得纯保费为:

$$p(\bar{A}_x)=\frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:n}}=$$

$$\frac{(1-\beta_1)[\beta_0(1-\beta_1)(a-\beta_0)+an\beta_1]}{\beta_0[(\omega-x)-\beta_1-(\omega-x-n)\beta_1-(n-1)\beta_1]}\quad(1)$$

3 均衡纯保费责任准备金的计算

根据精算等价原理,投保人缴纳的纯保费与保险人未来支付的保险金在保单签发生效之时的精算现值相等,保险公司的期望损失为零。但这种平衡不是持续存在的,对于保险人而言,事先确定一定金额的基金以确保未来保险金的给付是一项重要的工程,这种基金就是均衡纯保费下的责任准备金,其设立的用途就是为了应付未来保险责任的履行。因此,投保人(x)在第 t_0 时刻的责任准备金为:

$${}_{t_0}V=\bar{A}^1_{x+t_0:\overline{n-t_0}|}-p(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+t_0:n-t_0}\quad 0\leqslant t_0<n$$

令 $M=\omega-x-t_0$,$N=n-t_0$,则有

$${}_{t_0}V=\frac{1}{M}\{\frac{1}{\beta_0}[\beta_0(1-\beta_1)(a-\beta_0)+aN\beta_1]$$

$$-\frac{p(\overline{A}_x)}{1-\beta_1}[M-\beta_1-(M-N(1+\beta_1)+\beta_1)\beta_1]\} \quad (2)$$

4　风险分析

根据纯保费责任准备金的计算原理,则保险公司在 t_0 时刻的亏损随机变量为:

$$\begin{aligned} {}_{t_0}L_x &= C(t+t_0)e^{-\int_0^t \delta_s ds} - p(\overline{A}_x)\ddot{a}_{\overline{[T(x)-t_0]+1\wedge n}|} \\ &= X_1 - pX_2 \end{aligned} \quad (3)$$

其中,$X_1 = C(t+t_0)e^{-\int_0^t \delta_s ds}$,$X_2 = \ddot{a}_{\overline{[T(x)-t_0]+1\wedge n}|}$,$p = p(\overline{A}_x)$,$\ddot{a}_{\overline{[T(x)-t_0]+1\wedge n}|}$ 表示投保人(x)第 t_0 时刻起直到死亡给付额为 1 的定期生存年金的现值,则损失变量的方差为:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}({}_{t_0}L) &= \mathrm{Var}(X_1 - pX_2) \\ &= \mathrm{Var}(X_1) + p^2\mathrm{Var}(X_2) - 2p\mathrm{Cov}(X_1,X_2) \\ &= E(X_1) - [E(X_1)]^2 + p^2E(X_2) - p^2[E(X_2)]^2 - \\ &\quad 2p[E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)] \end{aligned} \quad (4)$$

其中,

$$E(X_1) = \frac{1}{M\beta_0}[\beta_0(1-\beta_1)(a-\beta_0) + aN\beta_1]$$

$$E(X_2) = \frac{1}{M(1-\beta_1)}[M-\beta_1-(M-N)\beta_1 - (N-1)\beta_1$$

令 $\beta_2 = 3\alpha^2 - 2\delta$,$\beta_3 = e^{3\alpha^2-2\delta}$

$$W = a^2 + 2at_0 - 2a,\ Y = 1 - at_0$$

$$\begin{aligned} E(X_1) &= E_BE_T[C^2(t+t_0)e^{-2\int_0^t \delta_s ds}] \\ &= \frac{1}{M\beta_2}[(WN - W\beta_2 + Y^2)\beta_3 + W\beta_2 - Y^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X_2) &= E_BE_T[(\ddot{a}_{\overline{[T(x)-t_0]+1\wedge n}|})^2] \\ &= \frac{1}{M(1-\beta_3)}[M-\beta_3-(M-N)\beta_3-(N-1)\beta_3] \\ &+ \frac{\omega - x}{(1-\beta_1)^2}[1-2\beta_1-N\beta_1+(N+1)\beta_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X_1X_2) &= E_BE_T[C(t+t_0)V(t)\sum_{k=0}^{n-1-t_0}V(k)I_{\{T\geq k\}}] \\ &= \frac{1}{M}\sum_{t=0}^{N}C(t+t_0)(\omega-x-t)\beta_1^{-t}\int_0^N \frac{\beta_1^u}{M-u}\,du \end{aligned} \quad (5)$$

将式(5)代入(4)可得损失变量的方差 $Var({}_{t_0}L)$。

5　模型的应用

考虑 25 岁投保人投保 10 年期半连续型死亡保险,假设利息力 δ_t 始终围绕着 6% 的水平随机波动,此波动为标准 Brownian 运动,设参数 $\alpha = 0.1$。在 De Moive 假设下,死亡率采用中国人寿保险业经验生命表(2000-2003)[7]计算。由于未来损失方差的大小可以用来反映保险公司在设定了纯保费责任准备金后需要承担的风险的大小,通过改变 $C(t)$ 的参数 a 的大小,分析其对责任准备金和损失方差的影响。下面设定 $a_1 = 0.6$,$a_2 = 0.3$,$a_3 = 0$,用 Matlab 编程作图可以得到。

图 1 和图 2 比较了函数 $C(t) = 1 + at$ 中不同 a 的取值下责任准备金和损失方差的大小关系。从中可以看出,随着 a 的增大责任准备金和损失方差都逐渐增大,这说明了随着变额保险金的变大,保险公司储备的责任准备金数额也要相应的增加,同时由于保险金数额变大而带来的给付风险也会随之增大。另外,随着时间的变化,当责任准备金增加的幅度越来越大时,损失方差先变大再变小,这说明了随着投保人年龄的增大,死亡给付成本将逐年增加,即保险公司赔付的概率不断增大,这就需要更多的责任准备金。同样,随着赔偿的确定性的增加,保险公司的损失风险就会呈递减的趋势,这一结论完全符合实际的寿险业务[8-9]。

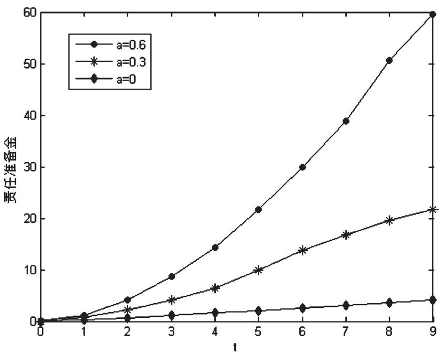

图 1　责任准备金曲线

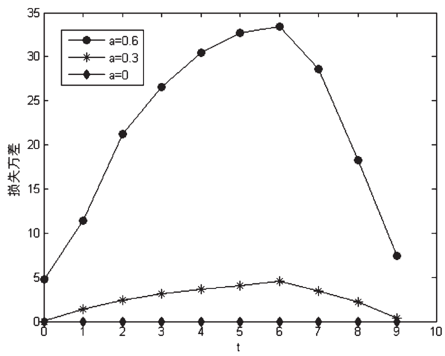

图 2　损失方差曲线

6　结束语

本文采用利息力服从 Brownian 运动建模,将随机利率引入半连续型的死亡保险中,根据精算等价原理和随机积分相关性质,得到了死亡服从 De Moive 假设下的均衡纯保费、责任准备金和损失方差的一般表达式,并利用未来的损失方差有效地分析了保险公司提取责任准备金后所面临的风险。同时,通过参数变化的数值分析得到了与保险务实完全相符的结论。当 $n \to \infty$ 时,可以

得到相应的终身寿险的模型。另外,本文中的赔付额与时间有关,即不同形式的 $C(t)$ 所表示的寿险模型亦不同,这样使得险种更加灵活,对保险公司的寿险实务具有参考价值。

参 考 文 献:

[1] 刘占国.利息理论[M].北京:中国财经出版社,2006.

[2] 张千祥.一类随机利率模型下的年金计算问题[J].巢湖学院学报,2006(3):1-2.

[3] 胡迪鹤.随机过程论:基础、理论、应用[M].湖北:武汉大学出版社,2005.

[4] Nicolas Privault,著.韦 晓,译.随机利率模型及相关衍生品定价[M].天津:南开大学出版社,2010.

[5] 杨静平.寿险精算基础[M].北京:北京大学出版社,2002.

[6] Wang Liyan,Wang Lijuan,Yang Deli.Increasing Life Insurance Model under Random Rates of Interest[J].OR TRANSACTIONS,2006,4:39-48.

[7] 李晓林,孙佳美.生命表基础[M].北京:中财政经济出版社,2006.

[8] 王卫星,贺兴时,吴晓蕊.基于分数跳-扩散下的寿险模型研究[J].四川理工学院学报:自然科学版,2010,23(4):399-400.

[9] 王腾华.随机利率下的准备金评估和寿险风险分析[D].南京:南京大学,2007.

Model of Semi-continuous Variable Life Insurance Under the Stochastic Interest Rate

GUO Xin

(Department of Applied Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China)

Abstract: The study on actuary model of life insurance under stochastic interest rate is becoming popular and important in actuarial studies. Based on the traditional actuarial science, the interest force is modeled with standard Brownian motion. The semi-continuous death insurance under the stochastic interest rate is built. Based on this model, the expression of net premium, annuity and reserve are calculated. Under the hypothesis of De Moive, the risk of insurance company is analyzed by numerical computing.

Key words: stochastic interest rate; Brownian motion; actuarial present value; variable life insurance; risk management