

# 均值-方差准则下相依双险种最优再保险

蒋兰青

(闽江师范高等专科学校初等教育系,福州 350108)

**摘要:**随着保险业务的扩大与发展,保险公司必须通过再保险来分散风险,扩大承保能力。为此,建立了一类双险种再保险模型,假设两险种理赔的发生均为复合 Poisson 过程,保险公司对两险种分别采取成数及超额赔款再保险。考虑到两险种的理赔之间不是独立的、不同风险业务可能引发共同的因素,因此进一步将某种理赔相依关系引入上述模型中,建立了一类更符合实际的再保险模型。针对改进模型,运用均值-方差原理和期望保费计算原理,通过解决总体风险最小和期望收益最大的双目标规划问题,得到了模型的相应参数,从而选取最优自留额。

**关键词:**成数再保险;超额损失再保险;均值-方差;相依风险;最优自留额

**中图分类号:** O29

**文献标志码:** A

## 引言

随着对保险破产概率研究的成熟和完善,越来越多的学者开始关注再保险对破产概率的影响,以及再保险设计如何达到最优,从而为原保险公司分散风险,扩大承保能力。已有不少文献研究过单一的成数或超额赔款再保险模型的破产概率,或者进一步讨论模型的最优自留额。王旭在文献[1]中讨论了离散时间比例再保险模型的破产概率,文献[2-3]均利用最小化破产概率讨论了最优的比例再保险问题,文献[4-7]利用期望效用函数最大化研究了最优化比例或超额损失再保险策略。而早在 2002 年,Centeno M L 就在文献[8]中研究了成数超额赔款混合再保险模型,其中成数再保险保费按原

始条款计算,而超额赔款再保费则依据期望值原则计算,并且假设理赔过程是一个复合 Poisson 过程。李兴玉等在文献[9]中以经典破产理论为基础,将比例再保险和超额赔款再保险纳入考量,构造与风险态度有关的投资函数,再根据鞅方法得到与投资谨慎性有关的破产概率。

受前人的启发,本文建立成数和超额损失混合双险种再保险模型,并考虑两险种的理赔之间不是独立的,将 Centeno M L 在文献[10]中的某种相依关系引入到模型中,建立了一类更符合实际的再保险模型。其次,考虑到原保险人利用再保险转嫁风险必然会减少其原有的期望收益,但是一个合理的再保险又可以通过增加安全性来降低风险,综合这两方面因素,保险人必须通过

收稿日期:2018-09-23

基金项目:福建省中青年骨干教师教育科研项目(JAT171171)

作者简介:蒋兰青(1986-),女,福建三明人,硕士生,主要从事应用概率统计方面的研究,(E-mail)158883574@qq.com

权衡收益和风险来得到最优策略。文献[11-14]均从不同角度研究了均值-方差准则下的最优再保险问题。文献[11]将保险公司比例再保险的收益和风险通过线性组合的方式,转化为单目标的最优决策模型,通过确定分出比例来使再保险的风险效用达到最大。根据该思想,最优再保险的决策问题就转化为再保险中相应参数的选取问题。本文运用均值-方差原理,即通过将总体风险最小和期望收益最大的双目标规划转化为单目标问题,得到了模型的相应参数,从而选取最优自留额。

### 1 预备知识与模型建立

**定义 1**<sup>[15]</sup> 计数过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  称为参数为  $\lambda (\lambda > 0)$  的齐次 Poisson 过程,如果:

- (1)  $N(0) = 0$ ;
- (2) 过程有独立增量;
- (3) 对任意的  $s, t \geq 0$ ;

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$$

**定理 1**<sup>[16]</sup> 关于齐次 Poisson 过程的可加性。设  $M = \{M_t, t \geq 0\}$  和  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  是强度分别为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的齐次 Poisson 过程,并且两个过程相互独立,对于每一个  $\omega \in \Omega$  和任意的  $t \geq 0$ , 令:

$$K_t(\omega) = M_t(\omega) + N_t(\omega)$$

则上式定义的过程  $K = \{K_t, t \geq 0\}$  称为过程  $M = \{M_t, t \geq 0\}$  和  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  的叠加,且是服从强度为  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  的齐次 Poisson 过程。

**定理 2**<sup>[16]</sup> 设  $\{S(t), t \geq 0\}$  是一个复合 Poisson 过程, Poisson 过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  的强度为  $\lambda$ , 则:

- (1)  $S(t)$  有独立增量;
- (2) 若  $E(X_i) < +\infty$ , 则  $E(S(t)) = \lambda t E(X_1)$ ,

$$Var(S(t)) = \lambda t E(X_1^2).$$

下面进行模型的建立。

设  $(\Omega, F, P)$  为一个完备的概率空间,本文考虑的所有随机变量都是定义在该概率空间上的。假设保险公司对两类险种采取不同的再保险策略,具体而言,对险种一的理赔选择自留比例为  $a$  的成数再保险,对险种二的理赔选择自留额为  $M$  的超额赔款再保险,建立如下的相依混合双险种再保险风险模型,保险公司的盈余过程与盈利过程分别为式(1)和式(2):

$$U(t, a, M) = u + (P - P_a - P_M)t - \sum_{i=1}^{N_1(t)} aX_i - \sum_{j=1}^{N_2(t)} h(Y_j) + \sigma W(t), t \geq 0 \tag{1}$$

$$S(t, a, M) = U(t, a, M) - u, t \geq 0 \tag{2}$$

其中:

(1)  $u \geq 0$  为保险公司的初始资金,  $P$  为单位时间的保费率。

(2)  $\{X_i, i \geq 1\}, \{Y_j, j \geq 1\}$  是取值于  $[0, \infty)$  上非负独立同分布的随机变量序列,分别表示险种一在第  $i$  次的理赔额及险种二在第  $j$  次的理赔额,设其分布函数分别为  $F(x), G(y)$ , 均值分别为  $\mu_1, \mu_2$ , 且对  $x \leq 0$  有  $F(x) = 0$ , 对  $y \leq 0$  有  $G(y) = 0$ 。

(3)  $N_1(t), N_2(t)$  分别表示两类险种在  $t$  时间内的理赔次数,令  $N_1(t) = K_1(t) + K(t), N_2(t) = K_2(t) + K(t)$ , 其中  $K_1(t), K_2(t), K(t)$  分别服从参数为  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$  的 Poisson 分布且相互独立,这样两险种的各自理赔总额便通过  $K(t)$  联系起来。由定理 1 易知  $N_1(t), N_2(t)$  是分别服从强度为  $\lambda_1 + \lambda, \lambda_2 + \lambda$  的齐次 Poisson 过程。

(4)  $h(Y_j) = \min\{Y_j, M\}$  表示险种二在第  $j$  次的理赔额,  $P_a, P_M$  分别为成数再保险和超额赔款再保险的单位时间再保费率,假设原保险公司与再保险公司都是按期望值原理收取保费,且原保险、成数再保险和超额赔款再保险的安全负载分别为  $\theta, \theta_1, \theta_2 (\theta \leq \theta_1, \theta \leq \theta_2)$ , 于是  $P = (1 + \theta)[(\lambda_1 + \lambda)\mu_1 + (\lambda_2 + \lambda)\mu_2]$ ,  $P_a = (1 + \theta_1)(1 - a)(\lambda_1 + \lambda)\mu_1$ ,  $P_M = (1 + \theta_2)(\lambda_2 +$

$\lambda)E[(Y_j - M)_+]$ 。

(5)  $\{W(t), t \geq 0\}$  为标准维纳过程,表示保险公司不确定的收益和支出,  $\sigma > 0$  为干扰因子。且假设  $\{X_i, i \geq 1\}, \{Y_j, j \geq 1\}, \{N_1(t), t \geq 0\}, \{N_2(t), t \geq 0\}, \{W(t), t \geq 0\}$  之间相互独立。

定义 2 记  $T_{a,M} = \inf\{t | U(t, a, M) < 0\}$  表示保险公司的破产时刻,若对所有  $t$ , 均有  $U(t, a, M) > 0$ , 则  $T_{a,M} = \infty$ ; 记  $\psi(u, a, M) = P(T_{a,M} < \infty | U(0) = u)$ ,  $\forall u \geq 0$  表示最终破产概率。

## 2 均值方差下的最优再保险

引言中已指出均值—方差原理的思想,即通过将总体风险最小和期望收益最大的双目标规划转化为单目标问题,本节将利用该方法求解以下模型的最优自留额:

$$U(t, a, M) = u + (P - P_a - P_M)t - \sum_{i=1}^{N_1(t)} aX_i - \sum_{j=1}^{N_2(t)} h(Y_j) + \sigma W(t), t \geq 0$$

这里考虑在某一时间段内的理赔,记两类总理赔分别为:

$$V_1 = \sum_{i=1}^{N_1} aX_i$$

$$V_2 = \sum_{j=1}^{N_2} h(Y_j)$$

由模型中的相关符号定义知,保险公司在该时间段内的期望收益为:

$$E[S(a, M)] = P - P_a - P_M - EV_1 - EV_2 = (1 + \theta)[(\lambda_1 + \lambda)\mu_1 + (\lambda_2 + \lambda)\mu_2] - (1 + \theta_1)(1 - a)(\lambda_1 + \lambda)\mu_1 - (1 + \theta_2)(\lambda_2 + \lambda) \int_M^\infty (1 - G(y)) dy - (\lambda_1 + \lambda)a\mu_1 - (\lambda_2 + \lambda) \int_0^M (1 - G(y)) dy = (\theta + a\theta_1 - \theta_1)(\lambda_1 + \lambda)\mu_1 + \theta(\lambda_2 + \lambda)\mu_2 - \theta_2(\lambda_2 + \lambda) \int_M^\infty (1 - G(y)) dy \quad (3)$$

原自留总风险的方差为:

$$Var(V_1 + V_2) = VarV_1 + VarV_2 + 2Cov(V_1, V_2) \quad (4)$$

其中:

$$VarV_1 + VarV_2 = (\lambda_1 + \lambda)a^2 \int_0^\infty x^2 dF(x) + (\lambda_2 + \lambda) \left[ \int_0^M y^2 dG(y) + \int_M^\infty M^2 dG(y) \right] \quad (5)$$

$$Cov(V_1, V_2) = E(V_1, V_2) - EV_1 \cdot EV_2 = E[E(V_1, V_2) | N_1, N_2] - E[E(V_1 | N_1)] \cdot E[E(V_2 | N_2)] = a\mu_1 \left[ \int_0^M (1 - G(y)) dy \right] E(N_1, N_2) - (\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)a\mu_1 \left[ \int_0^M (1 - G(y)) dy \right] = a\mu_1 \left[ \int_0^M (1 - G(y)) dy \right] [Cov(N_1, N_2) + EN_1EN_2] - (\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)a\mu_1 \left[ \int_0^M (1 - G(y)) dy \right] = \lambda a\mu_1 \int_0^M (1 - G(y)) dy \quad (6)$$

从而:

$$Var(V_1 + V_2) = (\lambda_1 + \lambda)a^2 \int_0^\infty x^2 dF(x) + (\lambda_2 + \lambda) \left[ \int_0^M y^2 dG(y) + \int_M^\infty M^2 dG(y) \right] + 2\lambda a\mu_1 \int_0^M (1 - G(y)) dy \quad (7)$$

原保险公司是为了得到一个最优的再保险合同,即选取适当的  $a, M$  后,能使总期望收益尽量的大,而同时总的风险尽量的小。然而这是一个非线性的双目标规划问题,两个目标相互冲突,当保险人厌恶风险时,其获得的收益就小,而当保险人追求收益时,其面临的就增大,因此无法得出最优解。但可以通过控制一个目标变量,而使另一个目标变量达到最优。本节就是在既定的期望收益下,使保险公司的总风险方差达到最小。

假设期望收益为  $k$ , 可以利用 Lagrange 乘数法来求

上述问题的最优解,此时 Lagrange 函数为:

$$\begin{aligned}
 L(a, M, \eta) = & \text{Var}(V_1 + V_2) + \eta(ES - k) = \\
 & (\lambda_1 + \lambda)a^2 \int_0^\infty x^2 dF(x) + \\
 & (\lambda_2 + \lambda) \left[ \int_0^M y^2 dG(y) + \int_M^\infty M^2 dG(y) \right] + \\
 & 2\lambda a \mu_1 \int_0^M (1 - G(y)) dy + \theta(\lambda_2 + \lambda)\mu_2 + \\
 & \eta[(\theta + a\theta_1 - \theta_1)(\lambda_1 + \lambda)\mu_1 - \\
 & \theta_2(\lambda_2 + \lambda) \int_M^\infty (1 - G(y)) dy - k]
 \end{aligned} \tag{8}$$

式(8)分别对  $a, M, \eta$  求偏导,并令其为0,得:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial a} = & 2a(\lambda_1 + \lambda) \int_0^\infty x^2 dF(x) + \\
 & 2\lambda \mu_1 \int_0^M (1 - G(y)) dy + \eta \theta_1 (\lambda_1 + \lambda) \mu_1 \\
 = & 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial M} = & 2M(\lambda_2 + \lambda) + 2\lambda a \mu_1 + \eta \theta_2 (\lambda_2 + \lambda) \\
 = & 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \eta} = & (\theta + a\theta_1 - \theta_1)(\lambda_1 + \lambda)\mu_1 + \theta(\lambda_2 + \lambda)\mu_2 - \\
 & \theta_2(\lambda_2 + \lambda) \int_M^\infty (1 - G(y)) dy - k \\
 = & 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

由式(9) - 式(11)组成的方程组的解即为所要的最优解。当理赔的分布函数确定时,代入上述方程组即可求得最优解。

### 3 应用举例

设两险种理赔额  $\{X_i, i \geq 1\}, \{Y_j, j \geq 1\}$  均服从参数为1的指数分布,即  $F(x) = 1 - e^{-x}, x > 0; G(y) = 1 - e^{-y}, y > 0$ , 于是  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ , 且:

$$\begin{aligned}
 M_X(aR_{a,M}) &= \frac{1}{1 - aR_{a,M}} \\
 M_{h(y)}(R_{a,M}) &= \frac{R_{a,M} \cdot e^{(R_{a,M}-1)} - 1}{R_{a,M} - 1}
 \end{aligned}$$

假设  $\theta = 0.2, \theta_1 = \theta_2 = 0.3, \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \sigma =$

$0.05, k = 0.6$ , 根据这些数据并利用 Matlab 计算得:成数再保险的最优自留比例  $a = 0.6075$ , 超额赔款再保险的最优自留额  $M = 1.2939$ 。

### 参考文献:

- [1] 王旭.离散时间比例再保险模型的破产概率[J].经济数学,2018,35(1):39-42.
- [2] 曹玉松.基于最小破产概率的最优比例再保险策略[J].许昌学院学报,2016,35(2):28-31.
- [3] 华婷,梁志彬.最大化调节系数的最优比例再保险和破产概率—扩散逼近模型[J].南京师大学报:自然科学版,2015,38(4):47-51.
- [4] 胡祥,张连增.基于期望效用函数最大化的最优再保险策略[J].统计与决策,2017(8):50-52.
- [5] 曾敏,陈萍.一种比例再保险和投资最优化问题[J].数学理论与应用,2016,36(2):45-52.
- [6] 李振华,杭晓渝,毛丽芹.一类非线性期望保费的再保险模型[J].山东科技大学学报:自然科学版,2017,36(2):101-106.
- [7] CAI J,CHRISTIANE L,AND LIU F D.Optimal reinsurance from the perspectives of both an insurer and a reinsurer[J].ASTIN Bulletin,2016,46(3):815-849.
- [8] CENTENO,LOURDES M D.Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient in Sparre Anderson model [J].Insurance: Mathematics and Economics, 2002,5(2):169-182.
- [9] 李兴玉,罗守贵.混合再保险下的破产概率和投资决策[J].统计与决策,2017(18):59-61.
- [10] CENTENO M D L.Dependent risks and excess of loss reinsurance[J].Insurance Mathematics and Economics, 2005,37(2):229-238.
- [11] 程兰芳.基于收益与风险线性组合的最优比例再保险决策模型[J].统计与决策,2006(1):36-37.

- [12] CHEN P, YAM S C P. Optimal proportional reinsurance and investment with regime-switching for mean-variance insurers[J]. Insurance Mathematics and Economics, 2013, 53(3): 871-883.
- [13] 杨鹏. 均值方差准则下 CEV 模型的最优投资和再保险[J]. 系统科学与数学, 2014, 34(9): 1100-1107.
- [14] 杨鹏, 林祥, 王献锋. 复合 Poisson-Geometric 风险过程下最优再保险投资组合选择[J]. 应用数学学报, 2015, 38(1): 174-182.
- [15] GRANDELL J. Aspects of risk theory[M]. New York: Springer-Verlag, 2011.
- [16] 殷小琴. 复合泊松过程及其在保险风险中若干应用[J]. 数学理论与应用, 2009, 29(4): 122-124.

## Optimum Reinsurance for Dependent Double Insurance Under Mean-variance Criteria

*JIANG Lanqing*

(Department of Elementary Education, Minjiang Teachers College, Fuzhou 350108, China)

**Abstract:** With the expansion and development of insurance business, insurance companies must spread risks and expand underwriting capacity through reinsurance. Therefore, a kind of reinsurance model with double risks is established, in which it is assumed that the claims of the two kinds of insurance are both compound Poisson processes. The insurance company adopts the component reinsurance with quota-share reinsurance and excess of loss reinsurance for the two types of insurance respectively. Taking into account that the claims of two types of insurance are not independent and different risk business may lead to common factors, some claims dependence are further introduced into the above model, a more realistic reinsurance model is established. For this improved model, by using the mean-variance principle and the expected premium calculation principle, the corresponding parameters of the model are obtained by solving the problem of the minimum overall risk and the maximum expected return, and the optimal retention amount is selected.

**Key words:** quota-share reinsurance; excess of loss reinsurance; mean-variance; dependent risks; optimal retention