

求解不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 57y(y+1)(y+2)(y+3)$

杨群

(西南大学数学与统计学院, 重庆 400715)

摘要:不定方程是数论的一个重要分支,其中除了部分确定系数的多项式的解被解决了外,还存有很多问题有待被研究。鉴于此,对形如 $mx(x+1)(x+2)(x+3) = ny(y+1)(y+2)(y+3), (n,m) = 1$ 的不定方程,首次使用 GP 辅助软件进一步计算其不同形式的整数解。研究主要运用了 Pell 方程、递归数列、同余式及(非)平方剩余等一系列的证明方法,将不定方程转化成 Pell 方程。通过证明 Pell 方程的四个结合类,运用勒让德符号、同余式和递归数列,并借助 Matlab 软件和 GP 软件工具,完全搜索了四个结合类的解,证明了不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 57y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解。

关键词:不定方程;整数解;Pell 方程;递归数列;GP 软件

中图分类号: O156

文献标志码: A

引言

不定方程作为数论的一个重要分支,大约是从公元 3 世纪开始被研究,直到目前仍存有很多问题有待解决,其中一种特殊的形式就是形如 $nx(x+1)(x+2)(x+3) = my(y+1)(y+2)(y+3)$ 的不定方程,这类不定方程已经有将近 40 年的研究历史了^[1-18],到目前为止,只那些确定系数的多项式的解被解决了,而其他的都有待被解决。1971 年, Cohn^[17] 证明了 $(m,n) = (1,2)$ 时,仅有正整数解 $(x,y) = (5,4)$; 1975 年, Ponnudurai^[18] 证明了 $(m,n) = (1,3)$ 时, 整数解 $(x,y) = (2,1)$; 1991 年, 罗明^[15] 证明了 $(m,n) = (1,7)$ 的整数解只有 $(x,y) = (4,2)$; 1996 年, 钟梅、邓谋杰^[14] 证明了 $(m,n) = (3,4)$ 的整数解只有 $(x,y) = (12,13)$; 1997 年徐学

文^[13]证明了 $(m,n) = (1,7)$ 没有整数解; 2007 年, 程瑶、马玉林^[12] 证明了 $(m,n) = (1,11)$ 没有整数解, ..., 直到 2018 年, 陈琼^[1] 证明 $(m,n) = (1,33)$ 的整数解只有 $(x,y) = (9,3)$ 。但是, 对于 n 和 m 的值比较大的数字还没有研究过, 如当 $(m,n) = (1,57)$ 时, 不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 57y(y+1)(y+2)(y+3)$ 的正整数解还未知, 以及更多该类不定方程都有待被研究。

先将原不定方程化为:

$$(x^2 + 3x + 1)^2 - 57(y^2 + 3y + 1)^2 = -56$$

方程 $x^2 - 57y^2 = -56$ 的全部整数解, 由以下 4 个类给出:

$$x_n + y_n \sqrt{57} = \pm (1 + \sqrt{57})(151 + 20\sqrt{57})^n, n \in \mathbf{Z}$$

$$\overline{x_n} + \overline{y_n} \sqrt{57} = \pm (-1 + \sqrt{57})(151 + 20\sqrt{57})^n, n \in \mathbf{Z}$$

收稿日期: 2018-07-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(11471265)

作者简介: 杨群(1993-), 女, 四川眉山人, 硕士生, 主要从事计算书论方面的研究, (E-mail)941455853@qq.com

$$x_n' + y_n' \sqrt{57} = \pm (37 + 5\sqrt{57})(151 + 20\sqrt{57})^n, n \in \mathbf{Z}$$

$$\overline{x_n'} + \overline{y_n'} \sqrt{57} = \pm (-37 + 5\sqrt{57})(151 + 20\sqrt{57})^n, n \in \mathbf{Z}$$

式中, $1 + \sqrt{57}, 37 + 5\sqrt{57}$ 是不定方程 $x^2 - 57y^2 = -56$ 相应结合类的基本解, $151 + 20\sqrt{57}$ 是 Pell 方程 $u^2 - 57v^2 = 1$ 的基本解。于是 $x^2 - 57y^2 = -56$ 方程的解应满足:

$$(2x + 3)^2 = 4x_n + 5 \tag{1}$$

$$(2x + 3)^2 = 4\overline{x_n} + 5 \tag{2}$$

$$(2x + 3)^2 = 4x_n' + 5 \tag{3}$$

$$(2x + 3)^2 = 4\overline{x_n'} + 5 \tag{4}$$

由于限制条件 $x_n \geq -1, \overline{x_n} \geq -1, x_n' \geq -1, \overline{x_n'} \geq -1$, 故式(1) ~ 式(4) 中, $x_n, \overline{x_n}, x_n', \overline{x_n'}$ 只需满足下列 4 个式子:

$$x_n + y_n \sqrt{57} = (1 + \sqrt{57})(u_n + v_n \sqrt{57}) =$$

$$(1 + \sqrt{57})(151 + 20\sqrt{57})^n, n \geq 0$$

$$\overline{x_n} + \overline{y_n} \sqrt{57} = (-1 + \sqrt{57})(u_n + v_n \sqrt{57}) =$$

$$(-1 + \sqrt{57})(151 + 20\sqrt{57})^n, n \geq 0$$

$$x_n' + y_n' \sqrt{57} = (37 + 5\sqrt{57})(u_n + v_n \sqrt{57}) =$$

$$(37 + 5\sqrt{57})(151 + 20\sqrt{57})^n, n \geq 0$$

$$\overline{x_n'} + \overline{y_n'} \sqrt{57} = (-37 + 5\sqrt{57})(u_n + v_n \sqrt{57}) =$$

$$(-37 + 5\sqrt{57})(151 + 20\sqrt{57})^n, n \geq 0$$

由这 4 个式子可推出下列关系式:

$$x_{n+1} = 302x_n - x_{n-1}, x_0 = 1, x_1 = 1291$$

$$\overline{x_{n+1}} = 302\overline{x_n} - \overline{x_{n-1}}, x_0 = -1, x_1 = 989$$

$$x_{n+1}' = 302x_n' - x_{n-1}', x_0 = 37, x_1 = 11287$$

$$\overline{x_{n+1}'} = 302\overline{x_n'} - \overline{x_{n-1}'}, x_0 = -37, x_1 = 113$$

式中:

$$v_{n+1} = 302v_n - v_{n-1}, v_0 = 0, v_1 = 20$$

$$u_{n+1} = 302u_n - u_{n-1}, u_0 = 1, u_1 = 151$$

$$u_{2n} = 2u_n^2 - 1, v_{2n} = 2u_n v_n$$

$$x_n = u_n + 57v_n, \overline{x_n} = -u_n + 57v_n$$

$$x_n' = 37u_n + 285v_n, \overline{x_n'} = 37u_n + 285u_n \tag{5}$$

$$u_{n+2h} \equiv -u_n \pmod{u_h}, v_{n+2h} \equiv -v_n \pmod{u_h}$$

$$\overline{u_{n+2h}} \equiv -\overline{u_n} \pmod{u_h}, \overline{v_{n+2h}} \equiv -\overline{v_n} \pmod{u_h} \tag{6}$$

$$x_{n+2h}' \equiv -x_n' \pmod{u_h}, \overline{x_{n+2h}'} \equiv -\overline{x_n'} \pmod{u_h}$$

$$1 \quad (2x + 3)^2 = 4x_n + 5$$

将考虑(1)式的解,即 n 取何值时 $4x_n + 5$ 为完全平方数。

引理 1 设 $2 \mid n, n > 0$, 则:

$$\left(\frac{\pm 228v_{2n+5}}{u_{2n}}\right) = -\left(\frac{\pm 228v_n + 5u_n}{937}\right)$$

证明 由于 $2 \mid n, u_n \equiv 1 \pmod{2}, u_n \equiv 1 \pmod{4}, u_{2n} \equiv 2u^2 - 1 \equiv 1 \pmod{8}$, 故 $\left(\frac{2}{u_{2n}}\right) = 1, \left(\frac{-1}{u_n}\right) = 1$, 所以:

$$\left(\frac{\pm 228v_{2n+5}}{u_{2n}}\right) = \left(\frac{\pm 456u_n v_n + 10u_n^2}{u_{2n}}\right) =$$

$$\left(\frac{2}{u_{2n}}\right)\left(\frac{u_n}{u_{2n}}\right)\left(\frac{\pm 228v_n + 5u_n}{u_{2n}}\right) =$$

$$\left(\frac{\pm 228v_n + 5u_n}{u_{2n}}\right) = \left(\frac{u_{2n}}{\pm 228v_n + 5u_n}\right) =$$

$$\left(\frac{u_n^2 + 57v_n^2}{\pm 228v_n + 5u_n}\right) = \left(\frac{53409}{\pm 228v_n + 5u_n}\right) =$$

$$\left(\frac{3}{\pm 228v_n + 5u_n}\right) \cdot \left(\frac{19}{\pm 228v_n + 5u_n}\right) \cdot$$

$$\left(\frac{937}{\pm 228v_n + 5u_n}\right)$$

因为 $\pm 228v_n + 5u_n \equiv 5 \pmod{19}, \pm 228v_n + 5u_n \equiv$

$2 \pmod{3}$, 所以 $\left(\frac{\pm 228v_{2n+5}}{u_{2n}}\right) = -\left(\frac{\pm 228v_n + 5u_n}{937}\right)$

引理 2 $(\pm 228v_n + 5u_n)$ 是一个非平方数。

证明 用对序列 $\{\pm 228v_n + 5u_n\}$ 取模的方法证明。

$\{\pm 228v_n + 5u_n\}$ 取 mod 937, 可以得到两个剩余序列周期都为 78; 序列 2^t 取 mod 78 的剩余序列的周期为 12 (除 $t = 0$ 以外)。对 k 分两种情况讨论。

令 $n = 2 \cdot k \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 2^t (t \geq 1, 2 \perp t)$, 当 $k \equiv 1 \pmod{4}$ 时, 令

$$m = \begin{cases} 2^t, t \equiv 0, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10 \pmod{12} \\ 5 \cdot 2^t, t \equiv 1, 5, 6, 11 \pmod{12} \end{cases}$$

则有表 1:

表1 $k \equiv 1 \pmod{4}$ 情况下的数

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$m \pmod{78}$	40	10	4	8	16	4	8	50	22	44	10	22
$228v_m + 5u_m (937)$	307	110	649	443	19	457	443	869	408	312	219	408

对表1中的所有 m , 均有 $4x_n + 5 \equiv 4x_{2m} + 5 \equiv 228v_{2m} + 5 \pmod{u_{2m}}$, 故:

$$\left(\frac{4x_n + 5}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{228v_m + 5}{u_{2m}}\right) = -\left(\frac{228v_m + 5u_m}{937}\right) = -1$$

所以 $4x_n + 5$ 是非平方数。

当 $k \equiv -1 \pmod{4}$ 时,

$$m = \begin{cases} 2^t, t \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 9 \pmod{12} \\ 5 \cdot 2^t, t \equiv 5, 6, 7 \pmod{12} \\ 5^2 \cdot 2^t, t \equiv 8, 10 \pmod{12} \\ 3 \cdot 11 \cdot 2^t, t \equiv 11 \pmod{12} \end{cases}$$

则有表2:

表2 $k \equiv -1 \pmod{4}$ 情况下的数据

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$m \pmod{78}$	40	2	4	8	16	4	8	16	4	44	16	36
$228v_m + 5u_m (937)$	57	584	72	820	50	72	820	50	72	76	50	460

对表2中的所有 m , 均有 $4x_n + 5 \equiv -4x_{2m} + 5 \equiv -228v_{2m} + 5 \pmod{u_{2m}}$, 故:

$$\left(\frac{4x_n + 5}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{-228v_{2m} + 5}{u_{2m}}\right) = -\left(\frac{-228v_m + 5u_m}{937}\right) = -1$$

所以 $4x_n + 5$ 是非平方数。

引理3 若式(1)成立, 则必需 $n \equiv 0 \pmod{4 \times 3 \times 5^2 \times 11}$

证明 对序列 $\{4x_n + 5\}$ 取模的方法证明

(1) $\pmod{151}$, 排除 $n \equiv 1, 3 \pmod{4}$, 此时 $4x_n + 5 \equiv 35, 126 \pmod{151}$, 剩 $n \equiv 0, 2 \pmod{4}$ 。当 $n \equiv 2 \pmod{4}$, 即 $n \equiv 2, 6 \pmod{8}$ 。 $\pmod{31}$, 排除 $n \equiv 2, 6 \pmod{8}$, 此时 $4x_n + 5 \equiv 12, 29 \pmod{31}$, 故 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 。

(2) $\pmod{18301}$, 排除 $n \equiv 4 \pmod{5}$, 此时 $4x_n + 5 \equiv 14350 \pmod{18301}$, 剩 $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{5}$, 即 $n \equiv 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 \pmod{10}$ 。 $\pmod{90901}$, 排除 $n \equiv 2, 3, 7, 8 \pmod{10}$, 此时 $4x_n + 5 \equiv 14212, 13008, 76699, 77903 \pmod{90901}$, 剩 $n \equiv 0, 1, 5, 6 \pmod{10}$, 即 $n \equiv 0, 1, 5, 6, 10, 11 \pmod{15}$ 。 $\pmod{61}$, 排除 $n \equiv 5, 10, 11 \pmod{15}$, 此时 $4x_n + 5 \equiv 32, 35, 28 \pmod{61}$, 剩 $n \equiv 0, 1, 6 \pmod{15}$, 即 $n \equiv 0, 1, 5, 6, 10, 11, 15, 16, 20, 21, 25, 26, 30, 31, 35, 36 \pmod{40}$ 。 $\pmod{41}$, 排除后剩 $n \equiv 0, 6, 10, 15, 20, 25, 35, 36 \pmod{40}$ 。 $\pmod{79}$, 排除后剩 $n \equiv 0, 15, 20 \pmod{40}$, 即 $n \equiv 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 \pmod{45}$ 。 $\pmod{541}$, 排除后剩 $n \equiv 0, 5, 30,$

$35 \pmod{45}$ 。 $\pmod{33029}$, 排除后剩 $n \equiv 0 \pmod{45}$, 即 $n \equiv 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 \pmod{50}$ 。 $\pmod{10099}$, 排除后剩 $n \equiv 0, 10, 20, 25, 35, 45 \pmod{50}$, 即 $n \equiv 0, 10, 20 \pmod{25}$ 。当 $n \equiv 10, 20 \pmod{25}$, 即 $n \equiv 10, 20, 35, 45, 60, 70, 85, 95 \pmod{100}$ 。 $\pmod{2699}$, 排除后剩 $n \equiv 45, 70, 85, 95 \pmod{100}$, 即 $n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}$ 。 $\pmod{151}$, 排除 $n \equiv 1, 3 \pmod{4}$, 剩 $n \equiv 2 \pmod{4}$, 即 $n \equiv 2, 6 \pmod{8}$ 。 $\pmod{31}$, 排除 $n \equiv 2, 6 \pmod{8}$ 。故 $n \equiv 0 \pmod{5}$ 。

(3) $\pmod{197}$, 排除 $n \equiv 2, 4, 5, 7, 9, 10 \pmod{11}$, 剩 $n \equiv 0, 1, 3, 6, 8 \pmod{11}$ 。 $\pmod{13619}$, 排除 $n \equiv 8 \pmod{11}$, 剩 $n \equiv 0, 1, 3, 6 \pmod{11}$ 。当 $n \equiv 1, 3, 6 \pmod{11}$, 即 $n \equiv 1, 3, 6, 12, 14, 17 \pmod{22}$ 。 $\pmod{397}$, 排除 $n \equiv 1, 12, 14 \pmod{22}$, 剩 $n \equiv 3, 6, 17 \pmod{22}$, 即 $n \equiv 3, 6, 17, 25, 28, 39 \pmod{44}$ 。 $\pmod{1231}$, 排除 $n \equiv 6, 17, 25, 28 \pmod{44}$, 剩 $n \equiv 3, 39 \pmod{44}$, 即 $n \equiv 3 \pmod{4}$ 。 $\pmod{151}$, 排除 $n \equiv 3 \pmod{4}$ 。故 $n \equiv 0 \pmod{11}$ 。

$$2 \quad (2x + 3)^n = 4 \overline{x_n} + 5$$

引理4 若 $n \equiv 0 \pmod{3 \times 4 \times 5^2 \times 11}$ 且 $n > 0$ 时, 式(2)不成立。

证明 $n = 2 \cdot k \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 2^t (t \geq 1, 2 \perp t)$, 运用分类讨论的数学方法及与引理3证明过程中选取 n 的方式相同, 根据式(5)、式(6)以及引理1可得:

$$\left(\frac{4 \overline{x_n} + 5}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 228v_m + 5}{u_{2m}}\right) = -\left(\frac{\pm 228v_m + 5u_m}{937}\right) = -1$$

故式(2)不成立。

引理5 若式(2)成立,则必需 $n \equiv 0 \pmod{4 \times 3 \times 5^2 \times 11}$

证明

(1) $\pmod{151}$, 排除 $n \equiv 1, 3 \pmod{4}$, 剩 $n \equiv 0, 2 \pmod{4}$ 。当 $n \equiv 2 \pmod{4}$, 即 $n \equiv 2, 6 \pmod{8}$ 。 $\pmod{31}$, 排除 $n \equiv 2, 6 \pmod{8}$, 故 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 。

(2) $\pmod{18301}$, 排除 $n \equiv 1 \pmod{5}$, 剩 $n \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod{5}$, $n \equiv 0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 \pmod{10}$ 。 $\pmod{90901}$, 排除 $n \equiv 2, 3, 7, 8 \pmod{10}$, 剩 $n \equiv 0, 4, 5, 9 \pmod{10}$, 即 $n \equiv 0, 4, 5, 9, 10, 14 \pmod{15}$ 。 $\pmod{61}$, 排除 $n \equiv 4, 9, 14 \pmod{15}$, 剩 $n \equiv 0, 5, 10 \pmod{15}$, 即 $n \equiv 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 \pmod{40}$ 。 $\pmod{41}$, 排除 $n \equiv 15, 30 \pmod{40}$, $n \equiv 10, 25, 35 \pmod{40}$ 。 $\pmod{79}$, 排除, 剩 $n \equiv 0, 5, 20 \pmod{40}$, 即 $n \equiv 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 \pmod{45}$ 。 $\pmod{541}$, 排除 $n \equiv 10, 15, 20, 25, 30, 35 \pmod{45}$, 剩 $n \equiv 0, 5, 40 \pmod{45}$ 。 $\pmod{228061}$, 排除 $n \equiv 5, 40 \pmod{45}$, 故 $n \equiv 0 \pmod{45}$, 即 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 。

(3) 由上面可知有 $n \equiv 0 \pmod{45}$, 故 $n \equiv 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 \pmod{50}$ 。 $\pmod{10099}$, 排除 $n \equiv 10, 20, 35, 45 \pmod{50}$, 剩 $n \equiv 0, 5, 15, 25, 30, 40 \pmod{50}$, 即 $n \equiv 0, 5, 15 \pmod{25}$ 。当 $n \equiv 5, 15 \pmod{25}$ 时, 即 $n \equiv 5, 15, 30, 40, 55, 65 \pmod{75}$ 。 $\pmod{149}$, 排除 $n \equiv 5, 30, 40, 55, 65 \pmod{75}$, 剩 $n \equiv 15 \pmod{75}$, 即 $n \equiv 15, 40, 65, 90 \pmod{100}$ 。 $\pmod{2699}$, 排除 $n \equiv 15, 40, 90 \pmod{100}$, 剩 $n \equiv 65 \pmod{100}$, 即 $n \equiv 3 \pmod{4}$ 。 $\pmod{151}$, 排除 $n \equiv 3 \pmod{4}$ 。故 $n \equiv 0 \pmod{25}$ 。

(4) $\pmod{197}$, 排除 $n \equiv 1, 2, 5, 7, 8, 9 \pmod{11}$, 剩 $n \equiv 0, 3, 4, 6, 10 \pmod{11}$ 。 $\pmod{13619}$, 排除 $n \equiv 3, 4, 6, 10 \pmod{11}$ 。故 $n \equiv 0 \pmod{11}$ 。

$$3 \quad (2x+3)^2 = 4x_n' + 5$$

引理6 对任意 $n \geq 0$, 式(3)都不成立。

证明 $\pmod{7}$, 排除 $n \equiv 0, 1 \pmod{6}$, 剩 $n \equiv 2, 3, 4, 5 \pmod{6}$ 。 $\pmod{43}$, 排除 $n \equiv 2, 3, 4, 5 \pmod{6}$ 。故对任意 $n \geq 0$, $4x_n' + 5$ 都是非平方数。

$$4 \quad (2x+3)^2 = 4x_n' + 5$$

引理7 对任意 $n \geq 0$, 式(4)都不成立。

证明 $\pmod{7}$, 排除 $n \equiv 2, 3 \pmod{6}$, 剩 $n \equiv 0, 1, 4, 5 \pmod{6}$ 。 $\pmod{43}$, 排除 $n \equiv 0, 1, 4, 5 \pmod{6}$ 。故对任意 $n \geq 0$, $4x_n' + 5$ 都是非平方数。

定理1 不定方程 $(x^2 + 3x + 1)^2 - 57y^2 = -56$ 的全部整数解是 $(-1, -1), (-1, 1), (-2, 1), (-2, -1)$ 。

证明 由引理2和引理3知若式(3)成立, 必需 $n = 0$, 此时 $x = -1, -2$, 这给出了方程的4组解。

定理2 不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 57y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解。

证明 由式(2)和定理1知, x 只能等于 $-1, -2$, 故该不定方程无正整数解。

参考文献:

- [1] 陈琼. 不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 33y(y+1)(y+2)(y+3)$ 的整数解的研究[J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2018, 40(4): 35-40.
- [2] 李妮. 关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 14y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 广西师范学院学报: 自然科学版, 2017, 34(4): 41-45.
- [3] 孙浩久. 关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3) = 14y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2017, 42(4): 1-6.
- [4] 张配, 罗明. 关于不定方程 $7x(x+1)(x+2)(x+3) = 11y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2017, 42(2): 5-9.
- [5] 林昌娜, 罗明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 34(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2016, 41(4): 10-14.
- [6] 王聪. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 30y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版, 2016, 33(1): 29-32.
- [7] 张洪, 罗明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = Dy(y+1)(y+2)(y+3)$ (其中 $D = 21, 23$) [J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版, 2015, 32(7): 56-61.
- [8] 郭凤明, 罗明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 13y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2013, 30(5): 101-105.
- [9] 段辉明, 杨春德. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)$

- $(x+3) = 19y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J].四川师范大学学报:自然科学版,2009,32(1):60-63.
- [10] 段辉明,郑继明. On Diophantine equation $x(x+1)(x+2)(x+3) = 14y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. Journal of Southwest Jiaotong University,2009,17(1):90-93.
- [11] 罗明,朱德辉,马芙蓉.关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3) = 5y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J].西南师范大学学报:自然科学版,2009,34(5):16-21.
- [12] 程瑶,马玉林.不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 11y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J].重庆师范大学学报:自然科学版,2007,24(3):27-30.
- [13] 徐学文.关于不定方程 $y(y+1)(y+2)(y+3) = p \sim (2k)x(x+1)(x+2)(x+3)$ [J].华中师范大学学报:自然科学版,1997,31(3):9-11.
- [14] 钟梅,邓谋杰.关于丢番图方程 $3y(y+1)(y+2)(y+3) = 4x(x+1)(x+2)(x+3)$ [J].哈尔滨师范大学自然科学学报,1996,12(4):30-34.
- [15] 罗明.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J].重庆师范学院学报:自然科学版,1991,8(1):1-8.
- [16] 宣体佐.关于不定方程 $y(y+1)(y+2)(y+3) = 5x(x+1)(x+2)(x+3)$ [J].北京师范大学学报:自然科学版,1982(3):27-34.
- [17] COHN J E.The Diophantine equations $x(x+1)(x+2)(x+3) = 2y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J].Pacific J Math, 1971(37):311-335.
- [18] PONNUDUEAIT.The Diophantine equation $x(x+1)(x+2)(x+3) = 3y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. J London Math soc,1975(10):232-240.

On the Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3) = 57y(y+1)(y+2)(y+3)$

YANG Qun

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: Diophantine equation is an important branch of number theory. Besides the solution of polynomial with certain coefficients, there are still many problems to be studied. In view of this, for the first time, the GP software is used to further calculate its different forms of integer solutions for the Diophantine equation of the form $mx(x+1)(x+2)(x+3) = ny(y+1)(y+2)(y+3)$. A series of proof methods, such as Pell equation, recursive sequence, congruence and (non) square residue, are used to transform the indefinite equation into Pell equation. By proving the four associative classes of Pell equation, using Legendre symbol, congruence and recursive sequence, and with the help of the Matlab software and the GP software tools, the solutions of the four associative classes are completely searched. It is proved that the Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3) = 57y(y+1)(y+2)(y+3)$ has no positive integer solution.

Key words: diophantine equation; integer solution; Pell equation; recurrence sequence; the GP software