

结合等照度线信息的图像去噪变分模型

吴 洋, 杨平先, 陈明举

(四川理工学院自动化与信息工程学院, 四川 自贡 643000)

摘 要:噪声是图像获取、传输和储存过程中不可避免的现象,去噪是图像处理的首要步骤与基本问题,也是后续的高层次图像处理的基础。基于图像梯度的 PM 模型能有效增强图像的轮廓信息,但同时会造成图像边缘模糊并在图像的平滑区域产生阶梯效应。图像的等照度线能有效抑制图像边缘的过度平滑,考虑到等照度线与 PM 模型图像梯度的互补性,提出一种同时极小化图像梯度与原图像等照度线信息的复合变分模型,并给出该模型的迭代求解过程。通过对比实验证明,提出的复合模型能有效地利用原图像的结构信息,在消除平滑区域阶梯效应的同时能增强图像的边缘,取得较高的峰值信噪比,获得较好的图像去噪性能。

关键词:变分;图像去噪;等照度线;偏微分方程

中图分类号:TN911.73

文献标志码:A

引 言

图像去噪就是将受噪声污染的图像恢复成原始无噪声干扰的图像。图像去噪实际上是一个不可逆的病态过程,图像在去除噪声过程中,其重要信息(如边缘和轮廓)不可避免地产生模糊,这就使得保持图像特征与去噪相互矛盾。在过去的 20 多年里,变分法和偏微分方程方法在消除噪声和保护边缘之间的平衡中已经被证明是非常成功的。“尺度空间”的概念最早是由 Iijima 提出的,并在 80 年代由 Witkin^[1]、Koenderink^[2]和 Hummel^[3]等首先指出该多尺度描述从理论上可视为各向同性的线性偏微分方程。线性偏微分方程是对整个图像进行均匀滤波,这等价于一个带有高斯内核的平滑过

程。然而,这个过程被发现是有问题的,因为在线性扩散的几次迭代之后,所有边缘特征都被抹去了。为了弥补在线性空间理论中遇到的困难,Perona 和 Malik 于 1990 年提出了非线性各向异性扩散方程(PM 模型)^[4]来解决这个问题。PM 模型是利用梯度算子来辨别由噪声引起的图像梯度变化和由边缘引起的图像梯度变化,然后用邻域加权平均去除由噪声引起的小梯度变化,同时保留由边缘引起的大梯度变化从而消除噪声。但该模型不能有效区分噪声和边缘,并且在图像平滑区域会过度扩散,导致去噪后图像出现分片灰度常数区域,即“块效应”现象。随后,一些学者提出了一些改进算法^[5-9],如基于差分特征值的自适应 PM 模型^[5]、基于 PM 模型的改进 SART 图像重建算法^[6]、以及基于各向异性

收稿日期:2018-06-21

基金项目:人工智能四川省重点实验室开放基金项目(2016RYY02)

作者简介:吴 洋(1994-),男,重庆人,硕士生,主要从事图像处理、深度学习方面的研究,(E-mail)wuy311@qq.com

通信作者:杨平先(1961-),男,四川自贡人,教授,硕士,主要从事信息处理方面的研究,(E-mail)ypingx@163.com

扩散驱动处理的鲁棒性边缘检测算法^[7]等。

为消除 PM 模型的阶梯效应并进一步增强图像边缘,本文在 PM 模型中引入了极小化原图像等照度线方向^[10-12]的梯度项,提出了一种同时极小化图像梯度项与原图像等照度线方向的复合变分模型,并给出该模型的迭代求解过程。该模型有效地利用图像梯度信息与图像等照度线信息,在消除平滑区域阶梯效应的同时增强图像边缘。

1 变分模型

令 I 为原始无噪声图像, u 为被噪声污染后的图像,即 $u = I + n$, 式中 n 是均值为 0、方差为 σ^2 的高斯噪声。图像去噪通过对含噪图像 u 进行处理来尽可能复原图像 I , 扩散模型在图像处理方面表现出较好的性能, Perona 与 Malik 通过极小化图像的梯度项提出著名的 PM 图像去噪模型^[4]:

$$\min_u E(u) = \int_{\Omega} g(|\nabla u|) d\Omega + \lambda \int_{\Omega} (u - I)^2 d\Omega \quad (1)$$

式中: ∇ 为梯度算子; $|\cdot|$ 表示幅度; $g(|\nabla u|) = 1/(1 + (|\nabla u|/k^2))$ 为扩散方程。PM 模型的基本思想是根据 $|\nabla u|$ 的大小来实现有选择的扩散平滑。在理想状态下,图像的边缘部分通常具有较大的梯度值,通过设置扩散方程 $g(|\nabla u|)$ 使模型在图像边缘实行较弱的平滑,以保持边缘信息;平坦区域通常具有较小的梯度值,设置较大的扩散系数使图像在平坦处实行较强的平滑。

利用欧拉-拉格朗日方程,相应的扩散方程可写成^[13]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (c(|\nabla u|) \nabla u) - \lambda(u - I) \quad (2)$$

式中: $c(x) = \frac{g'(x)}{x}$ 。由式(2)可知,PM 模型扩散性能受单个像素梯度大小的控制,在去噪的同时能较好地保留图像的边缘。然而,在强噪声干扰环境下,梯度不能较好地地区分噪声和图像边缘,会把图像平滑区域的噪声误认为图像的边缘,对平滑区域噪声进行增强而产生阶梯效应;并且不能有效消除噪声对图像边缘的破坏,因

此,边缘增强效果有限。图像等照度线体现了图像的结构信息,与图像的梯度相比,图像的结构信息不易受噪声的影响。因此,将图像等照度信息引入到 PM 模型中,在消除阶梯效应的同时能更有效地增强图像的边缘,去噪性能将更优。

2 图像的等照度线

图像的等照度线就是曲面上具有相同光照度的点所形成的曲线,在图像中,指具有同一等级的灰度值的像素点连成的线。因此可以说同一等照度线上,所有像素点的灰度值相等或差异不大。由于等照度线彼此不相交,图像可以被它的等照度线充分描述。

定义 $\{v, w\}$ 为参考坐标系,系统向量 w 和 v 的定义如下:

$$\vec{w} = \frac{\{u_x, u_y\}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}; \vec{v} = \perp \vec{w} \quad (3)$$

式中: u_x, u_y 是图像亮度函数 $u(x, y)$ 分别沿 x, y 方向的一阶导数。在此系统中沿 w 方向的导数是梯度本身,而在 v 方向(垂直于梯度)上的导数为 0(沿等照度线无强度变化)。等照度线的坐标关系图如图 1 所示。

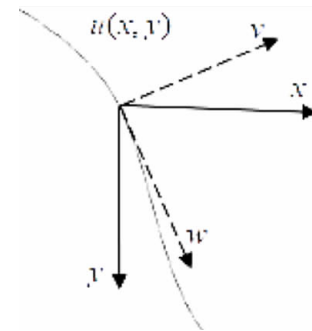


图 1 等照度线坐标关系图

在图 1 所示的坐标系统中,等照度线被定义为 $u(v, w(v)) = \text{constant}$, 它的曲率 w'' 定义为切线矢量 w' 的变化。通过隐函数微分的定义对等照度线微分,有:

$$u_v + u_w w' = 0; w' = -\frac{u_v}{u_w} \quad (4)$$

从规范条件可以知道 $u_v = 0$, 可知 $w' = 0$ 。再对 v 微分,得到:

$$u_{vv} + 2u_{vw} w' + u_{ww} w'^2 + u_w w'' = 0 \quad (5)$$

已知 $w' = 0$ 时,求解等照度线曲率 $\kappa = w''$, 得到等照度线的曲率:

$$\kappa = -\frac{u_{vv}}{u_w} \quad (6)$$

在笛卡尔坐标系中,曲率公式表述为:

$$\kappa = -\frac{u_{vv}}{u_w} = -\frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_xu_yu_{xy} + u_{yy}u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} \quad (7)$$

本文采用文献[14]中提出的等照度线曲率公式:

$$\kappa = \frac{u_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yu_{xy} + u_{yy}f_x^2}{f_x^2 + f_y^2} \quad (8)$$

式中: f 为 u 的高斯卷积函数。值得注意的是,在数学上曲率表示函数图像内切圆半径的倒数,式(7)的公式前带有负号,但是在后面的式(11)中,扩散不只沿内切圆径向进行,还可能沿着其反方向进行,这取决于等照度线的形状和扩散方向,所以等式(8)保留了曲率符号。

3 结合等照度信息的复合变分模型

为了更有效地利用图像的结构信息,将原图像的等照度信息引入到变分模型中以克服 PM 模型的缺点。将极小化等照度线方向的梯度项引入到 PM 变分模型中,建立结合等照度信息的复合变分模型,如下式所示:

$$\begin{aligned} \min_u E(u) = & k_1 \int_{\Omega} g(|\nabla u|) d\Omega + \\ & k_2 \int_{\Omega} \sqrt{|(u_x, u_y)(n_x, n_y)|} d\Omega + \\ & \lambda \int_{\Omega} (u - I)^2 d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

式中: k_1, k_2 为平衡系数; u_x, u_y 分别为图像 u 在 x, y 方向的导数; f_x, f_y 分别为图像 I 在 x, y 方向的导数; n_x, n_y 分别为图像 I 等照度线方向的单位矢量,其定义为:

$$(n_x, n_y) = (-f_y / \sqrt{f_x^2 + f_y^2}, f_x / \sqrt{f_x^2 + f_y^2}) \quad (10)$$

式(9)表示的模型中, $(u_x, u_y)(n_x, n_y)$ 实际上是求两矢量的内积,即图像 u 在图像 I 的等照度线方向的梯度。该模型同时对图像的梯度与等照度信息求取极小化,能有效地区分图像的边缘与噪声,去噪的同时能更有效地增强图像结构边界信息。

对该模型利用梯度下降法求解极小化问题为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & k_1 \nabla \cdot (c(|\nabla u|) \nabla u) + \\ & k_2 \frac{1}{\sqrt{|(u_x, u_y)(n_x, n_y)|^3}} \frac{u_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yu_{xy} + u_{yy}f_x^2}{f_x^2 + f_y^2} + \\ & \lambda(I - u) \end{aligned} \quad (11)$$

式中: $(u_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yu_{xy} + u_{yy}f_x^2)/(f_x^2 + f_y^2)$ 是 u 沿图像 I 的等照度线切线方向的二阶导数,其对应的扩散强度为 $1/\sqrt{|(u_x, u_y)(n_x, n_y)|^3}$ 。等式右边为 3 项式子之和,第一项表示扩散性能受图像梯度影响,不同大小梯度区域采用不同的扩散强度;第二项表示控制扩散方向沿等照度线方向进行,从而有效地增强图像边缘结构信息;第三项保证迭代扩散后的图像尽可能与原始图像相似。

4 实验与分析

为证明所提出的算法能在去噪的同时也能更有效地增强图像的边缘,将提出的复合模型与 TV 模型^[15]、文献[16]提出的模型以及 PM 模型从主观与客观上进行了比较分析。实验中采用 256×256 的灰度图像,客观方面采用信噪比(Signal-Noise Ratio, SNR)与结构相似度(Structural Similarity, SSIM)作为评价标准。信噪比与结构相似度定义如下:

信噪比:

$$SNR = 10 \times \lg \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (u_0(i, j) - \text{mean}(u_0))^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (u^*(i, j) - u_0(i, j))^2} \quad (12)$$

结构相似度:

$$SSIM(u^*, u_0) = \frac{4\sigma_{u^*} \sigma_{u_0} \mu_{u^*} \mu_{u_0}}{(\sigma_{u^*}^2 + \sigma_{u_0}^2)(\mu_{u^*}^2 + \mu_{u_0}^2)} \quad (13)$$

式中: u_0 是原图像; u^* 是去噪后的图像; M 和 N 是图像的尺寸; σ_{u^*} 与 σ_{u_0} 是 u^* 与 u_0 的标准差; μ_{u^*} 与 μ_{u_0} 是 u^* 与 u_0 的协方差。实验中对不同的图像加入不同强度的高斯噪声,分别采用 TV 模型、文献[16]提出的模型、PM 模型以及本文模型进行对比试验,结果如图 2~图 4 所示。

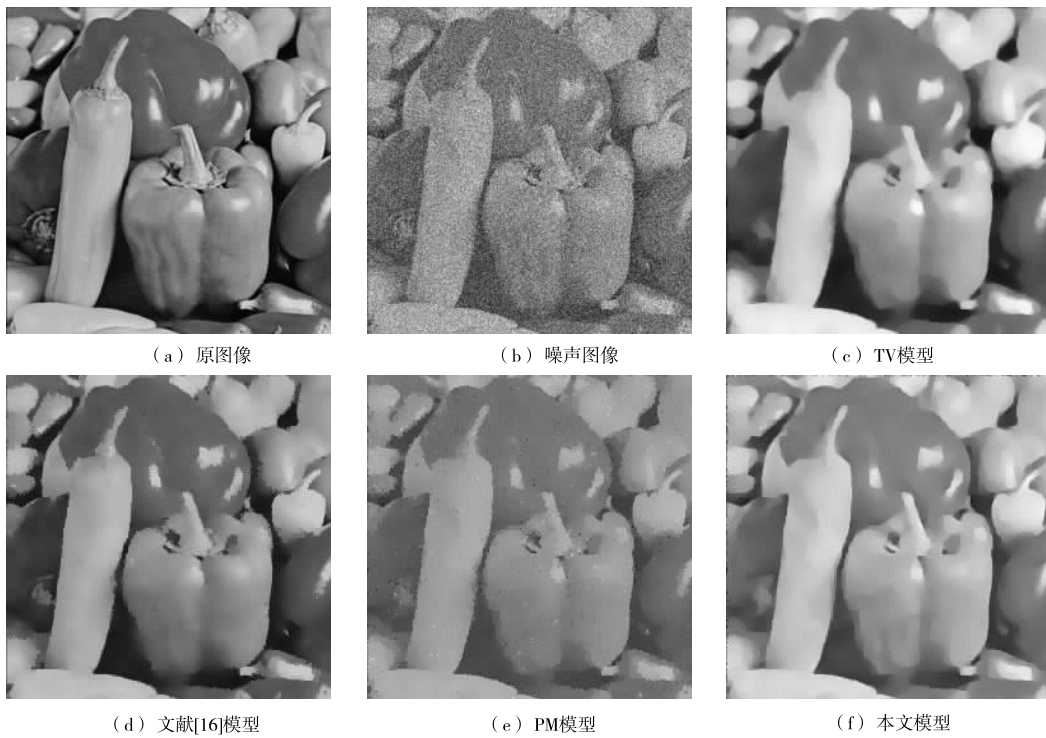


图 2 Pepper 图像去噪实验结果



图 3 Cameraman 图像去噪实验结果

图 2 与图 3 给出“Pepper”与“Cameraman”图像采用几种变分模型的去噪结果,并在图 4 中给出了“Cameraman”图像去噪实验结果的局部放大图。从图中可以看出,TV 模型虽然有效去除了图像中的噪声,但却过度模

糊了图像边缘,造成更多图像细节的丢失。文献[16]提出的模型细节失真比较严重,对比图 2 可知,虽然文献[16]模型有效保留了部分边缘细节信息,但在处理过程中会对图像的边缘轮廓造成破坏,从而产生锯齿现象,



图4 Cameraman 去噪实验结果局部放大图

同时从图3的处理结果可以看出,文献[16]模型在处理过程中会对图像背景信息产生过度平滑,造成图像中建筑物部分的细节丢失。PM模型存在较强的阶梯效应,并且当图像中噪声较为严重时,PM模型不能有效去除图像噪声,去噪性能较差。本文的复合模型在去噪的同时有效地克服了PM模型的阶梯效应,由于处理过程中加入了图像的等照度线信息,充分考虑了图像的结构信息,在图像的边缘与轮廓信息上都实现了较好的增强,从而获得较好的去噪性能。

表1给出了不同图片受不同方差 σ^2 的高斯干扰下采用不同模型去噪后的SNR与SSIM。从表1可知,本文的复合模型与PM模型相比,SNR与SSIM有一定的提高,在几种模型中,本文的复合模型具有最高的SNR与SSIM。这是由于本文提出的复合模型有效地结合了图像的等照度线信息和图像梯度,在增强图像边缘的同时抑制了图像梯度方向的过度扩散,较好地保留了更多图像细节信息,使处理后的图像更接近原图像。

表1 仿真图像的SNR和SSIM比较

图 像	噪声强度	TV 模型		文献[16]模型		PM 模型		本文模型	
		SNR	SSIM	SNR	SSIM	SNR	SSIM	SNR	SSIM
Pepper	$\sigma = 10$	28.1345	0.8408	29.7267	0.8760	28.0528	0.8248	30.8719	0.9046
	$\sigma = 20$	27.9797	0.8384	28.5893	0.8247	27.6211	0.8147	28.8166	0.8540
	$\sigma = 30$	27.5318	0.8213	26.9019	0.8017	25.1765	0.6495	27.7717	0.8223
Cameraman	$\sigma = 10$	28.5448	0.8283	28.9362	0.8301	29.2969	0.8202	29.7915	0.8450
	$\sigma = 20$	28.1514	0.8271	28.3031	0.8042	27.4984	0.7094	28.7244	0.8323
	$\sigma = 30$	25.5990	0.6534	25.8316	0.6758	23.7572	0.5156	26.5468	0.7277
Structures	$\sigma = 10$	29.4498	0.7985	30.3094	0.8159	32.6790	0.8304	33.2020	0.8450
	$\sigma = 20$	26.5116	0.7652	28.4187	0.7796	28.3680	0.7825	30.5041	0.8291
	$\sigma = 30$	24.1501	0.7454	24.9633	0.7481	24.8762	0.6827	28.3717	0.8055

5 结束语

目前,PM模型广泛应用到图像去噪领域,但是PM模型在强噪声干扰环境下容易产生阶梯效应现象,图像梯度不能较好地地区分噪声和图像边缘。为克服这一缺陷,将原始图像的等照度信息引入到变分模型中,充分利用原图像的结构信息,提出了一种同时处理图像梯度与等照度信息的复合模型。实验中通过与TV模型、文献[16]提出的模型以及PM模型进行对比分析,证明本文的复合模型可以有效解决并消除平滑区域的阶梯效应,增强图像的边缘,具有较好的去噪性能,并在图像视觉效果上也取得了很大改善。

参考文献:

- [1] WITKIN A P. Scale-space filtering[C]//Proceedings of the 8th international joint conference on Artificial intelligence, Karlsruhe, Germany, August 8-12, 1983: 1019-1022.
- [2] KOENDERINK J J. The structure of images[J]. *Biological Cybernetics*, 1984, 50(5): 363-370.
- [3] HUMMEL R A. Representations based on zero-crossings in scale-space[M]//HUMMEL R A. *Readings in Computer Vision*. San Francisco: Morgan Kaufmann, 1987: 753-758.
- [4] PERONA P, MALIK J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12(7): 629-639.
- [5] TIAN H, CAI H, LAI J. An adaptive PM model based on difference eigenvalue for image restoration[J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2014, 23(4): 761-766.
- [6] LIANG J, HE W, JI D, et al. Image reconstruction algorithm for modified SART based on PM model[C]//Proceeding of the 11th International Conference on Computational Intelligence and Security(CIS), Shenzhen, China, December 19-20, 2015: 175-178.
- [7] Maiseli B J, Gao H. Robust edge detector based on anisotropic diffusion-driven process[J]. *Information Processing Letters*, 2016, 116(5): 373-378.
- [8] 陈莉. 小波和分数阶微分联合图像增强算法[J]. *控制工程*, 2015, 22(5): 914-920.
- [9] CAI Y, CHEN X T, DONG L Y. SAR Image denoising method based on improved wiener filtering and P-M & LLT partial differential equation[C]//Proceedings of 2015 International Conference on Computer Science and Applications, Wuhan, China, November 20-22, 2015: 105-108.
- [10] ROMENY B M T H. *Front-end vision and multi-scale image analysis*[M]. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002.
- [11] YANG W, LIU J, LI M, et al. Isophote-Constrained autoregressive model with adaptive window extension for image interpolation[J]. *IEEE Transactions on Circuits & Systems for Video Technology*, 2018, 28(5): 1071-1086.
- [12] 何凯, 张丽莹, 高俊俏. 稳健的基于等照度线的图像修复算法[J]. *吉林大学学报:工学版*, 2016, 46(3): 929-933.
- [13] EASLEY G R, LABATE D, COLONNA F. Shearlet-Based total variation diffusion for denoising[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, 18(2): 260-268.
- [14] YOU Y L, XU W, TANNENBAUM A, et al. Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing[J]. *Image Processing IEEE Transactions on*, 1996, 5(11): 1539-1553.
- [15] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 1992, 60(1-4): 259-268.

- [16] SUZAN K,BARAKA M,MICHAEL K.Hybrid diffusion steered model for suppressing multiplicative noise in ultrasonograms[J].Signal & Image Processing,2017, 8(4):1-13.

A Variation Model Combining Isophote Information for Image Denoising

WU Yang, YANG Pingxian, CHEN Mingju

(School of Automation & Information Engineering, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: Noise is an inevitable phenomenon in the process of image acquisition, transmission and storage. As the first step and the basic problem of image processing, denoising is the foundation of subsequent high level image processing. The PM model based on image gradient can enhance the contour information of the image, but it will blur image edge and occurs staircase effect on smooth regions. The isophote of image can suppress the excessive smoothness of the image edge. Considering the complementarity of the isophote and the image gradient, a composite variation model which minimizes the image gradient and the isophote information of the original image is proposed and the iteration process of the model is given. The comparison experiments show that the proposed composite model use the structural information in original image effectively, which enhance the edge of the image while eliminate the staircase effect of smooth region and obtain a higher signal to noise ratio and better performance of image denoising.

Key words: variation; image denoising; isophote; partial differential equation