第31卷第4期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 31　No. 4
2018年8月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Aug. 2018
文章编号:1673-1549(2018)04-0096-05　　DOI:10.11863/j. suse. 2018. 04. 15

伪补MS－代数的素理想及同余性质

赵秀兰[1]，史永杰[2]

(1. 黄河科技学院数理部，河南 郑州 450063；2. 汕头大学理学院，广东 汕头 515063)

摘　要: 素理想是研究Ockham代数类结构的一个重要工具。伪补MS－代数是同时具有伪补代数和MS－代数特征的一类代数。首先在伪补MS－代数上引入两类素理想,以伪补MS－代数本身的运算属性为基础获得了伪补MS－代数素理想的运算特征。其次,利用素理想构造出了伪补MS－代数上的一类同余关系等式,借助素理想集刻画伪补MS－代数的每一个同余关系,获得了伪补MS－代数上的同余关系判别定理。最后,得到次直不可约的伪补MS－代数的结构特征,其元素个数小于或等于6。所得结论为其他Ockham代数类核理想性质的研究提供了方法,丰富了Ockham代数的发展,为进一步研究Ockham代数类的代数结构提供理论支持。

关键词: Ockham代数;伪补MS－代数;素理想;同余关系;次直不可约

中图分类号: 0153.1　　**文献标志码:** A

引　言

Ockham代数[1]是格与序代数理论的一个重要领域,它是定义在分配格上的一类序代数。布尔代数、de Morgan代数、Stone代数、伪补MS－代数等都是它的子代数,其部分研究成果见文献[1－5]。在泛代数研究领域,研究代数的结构及其特征的方法有很多,其中利用代数的理想和滤子是比较常用的一种,特别是利用不同定义、不同结构的理想和滤子来研究代数结构是一种比较常用的手段。目前,很多学者利用理想和滤子来研究代数的结构及其特征获得了大量成果。例如,在文献[6－9]中,作者在相应的代数类上引入理想与滤子,以核理想与余核滤子为载体刻画相应代数同余结构。文献[10]以假值理想为工具描述了双重伪补代数同余关系。文献[11]给出了格的反软理想新概念,证明2个反软理想分别在软集的限制并和“或”运算下仍然是反软理想。文献[12]讨论了BRo代数中的∗理想及其诱导的商代数。文献[13,14]利用滤子讨论了Bl代数的性质。素理想也是人们认识了解复杂代数结构的一个工具,利用素理想将代数系统分划为若干块,并可刻画代数同余关系[15-19]。

本文以现有文献理论为基础,将素理想引入到伪补MS－代数上,综合考虑伪补MS－代数的运算特征,论证利用素理想集刻画同余关系的结论,刻画次直不可约的伪补MS－代数的结构。

1　预备知识

定义1[1]　设(L; ∧, ∨)是一个格,I是格L的子

收稿日期: 2018-04-20
基金项目: 国家自然科学基金项目(11701355);河南省基础与前沿技术研究项目(152300410129)
作者简介: 赵秀兰(1982-),女,河南商水县人,副教授,硕士,主要从事序代数结构方面的研究,(E-mail)xiulanz@126.com

格,若 $x,y\in L$, $y\leqslant x\in I$ 总有 $y\in I$, 称子格 I 是格 L 的理想。

设 I 是格 L 的理想,且 $I\neq L$, $a,b\in L$, 若 $a\wedge b\in I$ 蕴含 $a\in I$ 或 $b\in I$, 称 I 是格 L 的素理想。

定义 2[2] 设 $(L;\wedge,\vee,0,1)$ 是一个有界分配格,其上赋予一个一元运算^o,且满足下列条件:

(1) $(\forall x\in L)x\leqslant x^{oo}$;

(2) $(\forall x,y\in L)(x\wedge y)^o=x^o\wedge y^o$;

(3) $1^o=0$。

称 $(L;\wedge,\vee,{}^o,0,1)$ 为 MS 代数。

定义 3[1,3] 一个伪补代数(简称 p－代数)是一个代数 $(L;\wedge,\vee,{}^*,0,1)$, 它具有一个最小元 0 及一个映射 $*:L\to L$ 使得 $x*=\max\{y\in L\mid x\wedge y=0\}$。

定义 4[1,3] 设 $(L;\wedge,\vee,0,1)$ 是一个有界分配格,其上赋予两个一元运算*和^o,其中 $(L;{}^*)$ 是 p－代数, $(L;\circ)$ 是 MS－代数,并且一元运算*和^{o}满足条件, $(x\in L)x^{*\circ}=x^{\circ *}$, 称 $(L;\wedge,\vee,{}^*,{}^o,0,1)$ 是伪补 MS－代数(简称 pMS－代数)。

引理 1[1,3] 设 $(L;\wedge,\vee,{}^*,{}^o,0,1)$ 是 pMS－代数,则有下列结论:

(1) $(\forall a\in L)a^{o*o}=a^{*oo}=a^{oo*}=a^*$;

(2) $(\forall a\in L)a^{*o*}=a^{o**}=a^{**o}=a^o$;

(3) $(\forall a\in L)a^{**}=a^{oo}$;

(4) $(\forall a,b\in L)(a\wedge b)^*=a^*\vee b^*$。

定义 5[1,3] 设 $(L;\wedge,\vee,{}^*,{}^o,0,1)$ 是 pMS－代数, θ 是 L 的一个格同余关系,若 $(x,y)\in\theta\Rightarrow(x^*,y^*)\in\theta$, $(f(x),f(y))\in\theta$, 则称 θ 是 L 的同余关系。

为了便于说明问题,作如下约定。设 L 是 pMS－代数, L 的理想指的是格理想, L 的同余关系指的是对 $\wedge,\vee,{}^*,{}^o$ 具有替换性的等价关系,而 L 的格同余关系指的是对 $\wedge,\vee$ 具有替换性的等价关系,并令, $Con(L)=\{\theta\mid\theta$ 为 L 的同余关系$\}$, $Con_L(L)=\{\theta\mid\theta$ 为 L 的格同余关系$\}$, $P(L)=\{P\mid P$ 为 L 的素理想$\}$。

引理 2[15] 设 $P\in P(L)$, 定义 L 上的二元关系 θ_P: $x,y\in L, x\equiv y(\theta_P)\Leftrightarrow x,y\in P$ 或 $x,y\in L-P$, 则 $\theta_P\in Con_L(L)$。

引理 3[15] 设 $A\in P(L)$, 定义 L 上的二元关系 θ_A: $x,y\in L, x\equiv y(\theta_A)$ 当且仅当 $\forall P\in A, x,y\in P$ 或 $x,y\in L-P$, 则: (1) $\theta_A\in Con_L(L)$ 且 $\theta_A=\wedge_{P\in A}\theta_P$; (2) $\forall\theta\in Con_L(L)$, 存在 $A\in P(L)$, 使得 $\theta=\theta_A$。

引理 4[18] 设 $\theta_1,\theta_2\in Con_L(L)$, 若 $\theta_1\wedge\theta_2\leqslant\theta_P$, 则 $\theta_1\leqslant\theta_P$ 或 $\theta_2\leqslant\theta_P$。

下面根据伪补 MS－代数的运算特征,来探讨伪补 MS－代数上素理想的相关性质。

2　素理想的性质

定理 1 设 $P\in P(L)$, 定义 $P^*=\{x\in L\mid x^*\in L-P\}$, $P^o=\{x\in L\mid x^o\in L-P\}$, 则有下列结论:

(1) $P^*,P^o\in P(L)$

(2) 设 $P_1,P_2\in P(L)$, 如果 $P_1\subseteq P_2$, 则有 $P_2^*\subseteq P_1^*$, $P_2^o\subseteq P_1^o$;

(3) $P^*=P^{**}=P^{oo}\subseteq P$, 这里 $P^{**}=(P^*)^*$, $P^{oo}=(P^o)^o$;

(4) $P^{ooo}=P^o$

(5) $P^{o*}=P^{*o}=P^o$

(6) $P^{o**}=P^{*o*}=P^{o*}=P^o$, $P^{*oo}=P^{o*o}=P^{oo}=P^*$。

证明 (1) 设 $x,y\in P^*$, 则 $x^*,y^*\in L-P$, 从而有 $x^*\wedge y^*=(x\vee y)^*\in L-P$, $x^*\vee y^*=(x\wedge y)^*\in L-P$, 故 $x\vee y, x\wedge y\in P^*$, 因此 P^* 为 L 的子格。

再设 $a\in L$, $x\in P^*$ 且 $a\leqslant x$, 由 $a^*\geqslant x^*\notin P$, 可得 $a^*\notin P$, 从而 $a\in P^*$, 因此 P^* 为 L 的理想。

令 $x,y\in L$, $x\wedge y\in P^*$, 则 $(x\wedge y)^*=x^*\vee y^*\notin P$, 从而 $x^*\notin P$ 或者 $y^*\notin P$, 所以 $x\in P^*$ 或者 $y\in P^*$, 于是 $P^*\in P(L)$。

同理可证 $P^o\in P(L)$。

(2) 设 $P_1,P_2\in P(L)$ 且 $P_1\subseteq P_2$, 令 $x\in P_2^*$, 则 $x^*\in L-P_2$, 即 $x^*\notin P_2$。又因 $P_1\subseteq P_2$, 故 $x^*\notin P_1$, 从而 $x\in P_1^*$, 因此 $P_2^*\subseteq P_1^*$。

同理可证 $P_2^o\subseteq P_1^o$。

(3) 先证 $P^*\subseteq P$。

设 $x\in P^*$, 则 $x^*\notin P$, 由于 $x\wedge x^*=0\in P$ 且 P 为素理想,故 $x\in P$, 所以得 $P^*\subseteq P$。

再证 $P^*=P^{***}$。

由于 $P^*\subseteq P$, 由(1)知, $P^*\in P(L)$, 将 $P^*\subseteq P$ 中

的 P 换成 P^*，即得 $P^{**} \subseteq P^*$。又由 $P^* \subseteq P$，结合(2)可得 $P^{**} \supseteq P^*$。所以 $P^* = P^{***}$。

下证 $P^{**} = P^{oo}$。

令 $x \in P^{**}$，故 $x^* \notin P^*$，则必有 $x^{**} \in P$，否则 $x^{**} \notin P$，则 $x^* \in P^*$，此与 $x^* \notin P^*$ 相互矛盾。由引理 1 知，在 pMS－代数中，$x^{oo} = x^{**} \in P$，因此 $x^o \notin P^o$，从而 $x \in P^{oo}$，故 $P^{**} \subseteq P^{oo}$。

同理可证 $P^{oo} \subseteq P^{**}$。命题即证。

下证 $P^{oo} \subseteq P$。

设 $x \in P^{oo}$，则 $x^o \in L - P^o$，从而 $x^{oo} \in P$。又因 $x \leqslant x^{oo}$，于是 $x \in P$，所以 $P^{oo} \subseteq P$。

综上可得 $P^* = P^{***} = P^{oo} \subseteq P$。

(4) 由(3)知 $P^{oo} \subseteq P$，由(2)得 $P^{ooo} \supseteq P^o$，再将 $P^{oo} \subseteq P$ 中的 P 换成 P^o 得 $P^{ooo} \subseteq P^o$，因此 $P^{ooo} = P^o$。

(5) 先证 $P^{o*} = P^{*o}$。

设 $x \in P^{o*}$，则 $x^* \notin P^o$，因而 $x^{*o} \in P$。由引理 1 知，在 pMS－代数中，$x^{o*} = x^{*o} \in P$，所以 $x^o \in P^*$，故 $x \in P^{*o}$，于是有 $P^{o*} \subseteq P^{*o}$。

设 $x \in P^{*o}$，则 $x^o \notin P^*$，故 $x^{o*} \in P$。由引理 1 知，在 pMS－代数中，$x^{*o} = x^{o*} \in P$，所以 $x^* \notin P^o$，故 $x \in P^{o*}$，所以 $P^{*o} \subseteq P^{o*}$。

综上即证 $P^{o*} = P^{*o}$。

下证 $P^{*o} = P^o$。

由(3)知 $P^* \subseteq P$，由(2)得 $P^{*o} \supseteq P^o$。再将 $P^* \subseteq P$ 中的 P 换成 P^o 得 $P^{o*} \subseteq P^o$。又因 $P^{o*} = P^{*o}$，故 $P^{*o} = P^o$。命题(5)得证。

(6) 由(3)和(5)即得(6)。

进一步可得，伪补 MS－代数上素理想的下列运算性质。

定理 2　设 $P \in P(L)$，则有下列结论：

(1) 若 $x \in P^o$，则 $x^o \in L - P$，$x^* \in L - P^o$；

(2) 若 $x \in P^*$，则 $x^* \in L - P$，$x^o \in L - P^o$；

(3) 若 $x \in L - P^o$，则 $x^o \in P^*$，$x^* \in P^o$；

(4) 若 $x \in L - P$，则 $x^o \in P^o$，$x^* \in P^*$；

(5) 若 $x \in P - P^*$，则 $x^o \in P^o$，$x^* \in P^*$。

证明　(1) 设 $x \in P^o$，由 P^o 定义得 $x^o \in L - P$。由定理 1(5)知，$P^{o*} = P^o$，所以 $x \in P^{o*}$，从而 $x^* \in L - P^o$。

(2) 设 $x \in P^*$，由 P^* 定义得 $x^* \in L - P$。由定理 1(3)知 $P^* = P^{oo}$，所以 $x \in P^{oo}$，从而 $x^o \in L - P^o$。

(3) 若 $x \in L - P^o$，即 $x \in L, x \notin P^o$。由定理 1(5)知 $P^{o*} = P^{*o} = P^o$，故 $x \notin P^{*o}, x \notin P^{o*}$，所以 $x^o \in P^*$，$x^* \in P^o$。

(4) 若 $x \in L - P$，即 $x \in L, x \notin P$。由引理 1 知，在 pMS－代数中，$x \leqslant x^{oo} = x^{**}$，又因 P 是 L 的素理想，所以 $x^{oo} = x^{**} \notin P$，于是 $x^o \in P^o$，$x^* \in P^*$。

(5) 若 $x \in P - P^*$，由定理 1(3)知 $P^* = P^{oo}$，故 $x \in P, x \notin P^{oo}$，从而 $x \in P, x^o \in P^o$。由定理 1(3)知 $P^* = P^{**}$，故 $x \in P, x \notin P^{**}$，于是 $x \in P, x^* \in P^*$。

定理 1 和定理 2 反映了伪补 MS－代数上素理想的运算规律，以此为基础，借助素理想来刻画同余关系。

定理 3　设 $P \in P(L)$，定义 L 上的二元关系 τ_P：$x, y \in L, x \equiv y(\tau_P)$ 当且仅当 $\{x,y\} \subseteq R_i (i = 1,2,3,4,5,6)$，其中 $R_1 = P^o \cap P^*$，$R_2 = P^o \cap (P - P^*)$，$R_3 = P^o \cap (L - P)$，$R_4 = (L - P^o) \cap P^*$，$R_5 = (L - P^o) \cap (P - P^*)$，$R_6 = (L - P^o) \cap (l - P)$，则 $\tau_P \in Con(L)$ 且 $\tau_P = \theta_P \wedge \theta_{P^o} \wedge \theta_{P^*}$。

证明　由引理 2 以及定理 1 知，$\tau_P \in Con_L(L)$。

下证 $\tau_P \in Con(L)$。设 $x, y \in L, x \equiv y(\tau_P)$，由定理 1 和定理 2 可推出素理想同余关系如表 1 所示。

表 1　素理想同余关系

$\{x,y\}$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
$\{x^o,y^o\}$	R_6	R_3	R_3	R_4	R_1	R_1
$\{x^*,y^*\}$	R_6	R_4	R_4	R_3	R_1	R_1

表 1 第一行表示 x, y 所在的 τ_P 同余类，第二、三行分别表示 x^o, y^o 和 x^*, y^* 所在的 τ_P 相应同余类。所以 $x, y \in L, x^o \equiv y^o(\tau_P), x^* \equiv y^*(\tau_P)$，因此 $\tau_P \in Con(L)$。

推论 1　设 $A \subset P(L)$，如果 $\forall P \in A$，有 $P^o, P^* \in A$，则 $\theta_A \in Con(L)$。

证明　由引理 3 以及定理 1 和定理 3 可得。

定理 4　设 θ 是 L 上的一个二元关系，则 $\theta \in Con(L)$ 的充要条件是存在 $A \subset P(L)$，使得 $\theta = \theta_A$ 且 $\forall P \in A$，有 $P^o, P^* \in A$。

证明　充分性由推论 1 可得。

必要性 设 $\theta \in Con(L)$，则 $\theta \in Con_L(L)$。由引理 3

知,存在 $B \subset P(L)$ 使得 $\theta = \theta_B$。令 $A = \cup_{p \in B}\{P, P^o, P^*\}$,则 $B \subset A \subset P(L)$,从而 $\theta_A \leqslant \theta_B = \theta$。

设 $x, y \in L, x \equiv y(\theta_B)$,由于 $\theta_B = \theta$,故 $x^o \equiv y^o(\theta_B), x^* \equiv y^*(\theta_B)$,所以任意的 $x^* \equiv y^*(\theta_P)$。

于是任意的 $P \in B, x^o, y^o \in P$ 或者 $x^o, y^o \in L - P$ 以及 $x^*, y^* \in P, x^*, y^* \in L - P$。因此任意的 $P \in B, x, y \in L - P^\circ$ 或者 $P \in B, x, y \in P^\circ$ 以及 $P \in B, x, y \in L - P^*$ 或 $P \in B, x, y \in P^*$,故 $\forall P \in B, x \equiv y(\theta_P)$。

所以 $x \equiv y(\theta_A)$,故 $\theta_B \leqslant \theta_A$,因此 $\theta_B = \theta_A = \theta$,于是 $\forall P \in A$ 有 $\forall P^\circ, P^* \in A$,$A$ 为所求。

定理 5　设 $P \in P(L)$,则 τ_P 在 $Con(L)$ 中生成的主理想 $(\tau_P]$ 是 $Con(L)$ 的一个素理想。

证明　设 $\theta_1, \theta_2 \in Con(L)$ 且 $\theta_1 \wedge \theta_2 \in (\tau_P]$,则 $\theta_1 \wedge \theta_2 \leqslant \tau_P \leqslant \theta_P$,由引理 4 知,$\theta_1 \leqslant \theta_P$ 或 $\theta_2 \leqslant \theta_P$。

若 $\theta_1 \leqslant \theta_P$,对于 $x, y \in L, x \equiv y(\theta_1)$,则 $x^o \equiv y^o(\theta_1), x^* \equiv y^*(\theta_1)$,从而有 $x^o \equiv y^o(\theta_P)$,$x^* \equiv y^*(\theta_P)$。类似于定理 4 的证明可得 $x \equiv y(\theta_{P^\circ}), x \equiv y(\theta_{P^*})$,所以 $\theta_1 \leqslant \theta_{P^\circ}, \theta_1 \leqslant \theta_{P^*}$,因此 $\theta_1 \leqslant \theta_P \wedge \theta_{P^\circ} \wedge \theta_{P^*} = \tau_P$。

同理可证,若 $\theta_2 \leqslant \theta_P$,则 $\theta_2 \leqslant \theta_P \wedge \theta_{P^\circ} \wedge \theta_{P^*} = \tau_P$。因此 $(\tau_P]$ 是 $Con(L)$ 的一个素理想。

由定理 3、定理 4、定理 5 可直接得到下列结论。

推论 2　设 $P \in P(L)$,则 $\dfrac{L}{\tau_P}$ 是一个次直不可约的 pMS－代数。

推论 3　设 L 是一个次直不可约的 pMS－代数,则 $|L| \leqslant 6$。

推论 4　设 L 是一个次直不可约的 pMS－代数,则 L 与图 1 中 Hasse 图决定的 pMS－代数的子代数同构或是单点集。

3　结束语

素理想是研究 Ockham 代数类的结构及同余关系的一个重要工具,结合素理想的性质,对伪补 MS－代数的结构作一划分,有助于了解伪补 MS－代数的结构,所得结论为其它 Ockham 代数类素理想性质的研究提供了方法,同时丰富了序代数结构理论。

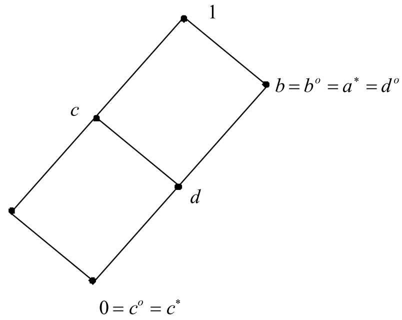

图 1　pMS－代数的 Hasse 图

参 考 文 献:

[1] BLYTH T S ,VARLET J C.Ockham algebras[M].Oxford: Oxford University Press,1994.

[2] BLYTH T S ,VARLET J C.On a common abstraction of de Morgan algebras and Stone algebras[J].Proc.Roy. Soc.Edinburgh,1983,94A:301 - 308.

[3] FANG J.Distributive lattices with unary operations[M].北京:科学出版社,2011.

[4] 方捷.格论导引[M].北京:高等教育出版社,2014.

[5] GRATZER G.Lattice theory[M].New York:W.H.Freeman and Company,1971.

[6] 赵秀兰,初元红.平衡双重伪补 Ockham 代数的滤子同余特征[J].模糊系统与数学,2017,31(3):44-48.

[7] 赵秀兰,陈丽娟.双重 Stone 代数的核理想[J].四川理工学院学报:自然科学版,2017,30(1):88-91.

[8] 罗从文.MS-代数的核理想[J].应用数学,2001,14(1):39-41.

[9] 赵秀兰,初元红,史西专.双重伪补 Ockham 代数的理想与滤子同余关系的注记[J].汕头大学学报:自然科学版,2016,31(88):35-40.

[10] 王雷波,方捷.双重伪补代数的假值理想的一点注记[J].纯粹数学与应用数学,2012,28(1):119-122.

[11] 童娟,廖祖华,赵衍才,等.格的反软理想[J],浙江大学学报:理学版,2017,44(1):33-38.

[12] 牛超群,吴洪博.BRo 代数中的* 理想及其诱导的商代数[J].江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(3):221- 224.

[13] HAVESHKI M.On α filter of BL-algebras[J].Journal of intelligent and Fuzzy Systems,2015,28(1):373-382.

[14] BORZOOZI R.Fuzzy n-fold fantastic filters in BL-al-

gebras[J].Afrika Matematika,2014,25(4):1001-1012.

[15] 赵萃魁,吴润衡.分配格上的素理想与同余关系[J].内蒙古大学学报,1989,20(1):26-29.

[16] 黎爱平.双重 MS-代数的素理想与次直不可约类[J].南昌大学学报:理科版,2002,26(1):43-45.

[17] 花秀娟,辛小龙,刘庆.(∈,∈ ∨ q)-模糊素理想与(λ,μ)-模糊子格(理想)[J].模糊系统与数学,2010,24(4):33-38.

[18] 黎爱平.MS-代数的素理想与同余关系[J].南昌大学学报:理科版,1999,23(4):357-361.

[19] 叶婷,廖祖华,朱晓英.半群的软完全素理想[J].模糊系统与数学,2014,28(3):1-5.

The Prime Ideals and Congruence Properties of Pseudocomplemented MS- Algebras

ZHAO Xiulan[1], *SHI Yongjie*[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Huanghe Science and Technology College, Zhengzhou 450063, China;
2. School of Mathematics, Shantou University, Shantou 515063, China)

Abstract: Prime Ideals is an important tool for studying the class structure of Ockham algebras. Pseudocomplemented MS-algebra is a class of Algebra with the characteristics of both pseudocomplement and MS-algebra. Firstly, two prime ideals are introduced into the pseudocomplemented MS-algebra, and the operation characteristics of the prime ideal on pseudocomplement MS-algebra are obtained on the basis of the operation attributes of pseudo complement MS-algebra itself. Secondly, a kind of congruence equation on the pseudo complement MS-algebra is constructed by using the prime ideal, and the congruence relation of the pseudocomplemented MS-algebra is portrayed by the prime ideal set, and the congruence relation theorem on the pseudocomplemented MS-algebra is obtained. Finally, the structural characteristics of the subdirectly irreducible pseudocomplemented MS-algebras are obtained ,and its elements are less than or equal to 6. The conclusion provids a method for the study of the properties of the other Ockham algebras, and enriched the theory of ordered algebraic structures.

Key words: Ockham algebras; pseudocomplemented MS-algebras; prime ideal; congruence relations; subdirectly irreducible