

铁木辛柯纳米梁简谐强迫振动的格林函数解

陈宵寒, 吴太红, 李翔宇

(西南交通大学力学与工程学院应用力学与结构安全四川省重点实验室, 成都 610031)

摘要:通过基于Gurtin-Murdoch模型的纳米梁的控制方程,研究了铁木辛柯纳米梁的简谐强迫振动问题。在理论分析过程中引入了格林函数法,并利用变量分离法和拉普拉斯变换得到了用简单函数表示的具有封闭形式的解析解,包括简谐强迫振动控制方程的通解,以及简支梁、固支梁和悬臂梁三种典型情况的特解。利用数值算例,检验了解的有效性,考察了表面效应对铁木辛柯纳米梁简谐强迫振动行为的影响规律。结果表明:(1)表面效应会增大或减小纳米梁的刚度,从而导致梁的固有频率发生变化;(2)表面对纳米梁的影响程度与梁的边界条件有关且随着梁的尺寸的增大而减小;(3)表面对简支梁和固支梁影响较小,而对悬臂梁影响较大;(4)表面效应可以分别从梁的挠度和截面转角两个方面进行衡量,且可以得到基本一致的结果。

关键词:纳米梁;表面效应;简谐强迫振动;铁木辛柯梁;格林函数

中图分类号:O321

文献标志码:A

引言

近年来,随着科技水平的提高,纳米材料得到了广泛的应用,在此基础上,人们又提出了纳机电系统(纳米量级的机械电子系统)的概念。纳机电系统具有体积小、质量微小、能耗极低,并能够测量到极其微弱的力和位移等优点。纳机电系统的应用将会推动传感器、医学诊断设备及电子存储设备等领域技术产生革命性的发展^[1]。纳米梁、板和壳等都是纳机电系统中常有的结构,弄清楚这些纳米结构的力学特性对于纳米尺度设备的设计和使用有非常重要的指导意义。然而实验证明使用传统的连续介质力学理论对此类纳观结构进行分

析时会有较大的误差,纳米结构的力学特性呈现出尺度效应^[2-4]。这主要是由于结构表面层附近的原子能量(表面能)与结构内部的原子能量的差异性造成的^[5],这被称之为表面效应。在宏观尺度下结构的比表面积(表面积与体积之比)较小,表面层原子的能量对于整个结构体而言可以忽略不计,因此表面效应不明显。而纳米结构的比表面积非常大,表面能产生的影响则不可忽略^[6]。

利用计算机进行分子动力学模拟是解决这类问题的一种途径。如Miller等^[7]使用这种方法验证了他们所提出的模型的有效性。这种方法可以得到准确的结果,然而对于体积较大的纳米结构而言,采用这种方法会消

收稿日期:2018-04-19

基金项目:国家自然科学基金项目(11672250)

作者简介:陈宵寒(1990-),女,广西南宁人,硕士生,主要从事纳米梁的振动力学方面的研究,(E-mail)blizzardisbig@163.com;

李翔宇(1979-),男,四川巴中人,教授,博士生导师,主要从事多场耦合力学、纳米力学等方面的研究,(E-mail)zjuparis6@hotmail.com

耗大量计算资源^[8],效率低下,不利于推广。因此有必要对传统的连续介质力学理论进行修正,发展专门用于解决此类问题的理论模型。

为了表征纳米结构表面能的作用,Gurtin 和 Murdoch^[9]建立了模型:假设纳米结构的表面附有一层零厚度的膜,这层膜与基体紧密贴合。该理论被广泛应用于纳米结构的研究中。例如,Miller 等^[7]对纳米级的杆件、梁和板进行了研究,发展了一套模型用以计算表面效应对纳米结构力学属性的影响;Jiang 等^[10]用铁木辛柯梁模型对纳米线进行了研究,得到了其在静力弯曲状态下的解;Liu 等^[11]研究了纳米尺度的欧拉-伯努利梁和铁木辛柯梁的静力弯曲和自由振动问题;Wang 等^[12]研究了考虑表面效应的接触问题,发现表面效应对最大压头压入深度和最大法向应力都有显著影响;Ansari 等^[13]利用哈密尔顿原理建立了铁木辛柯梁的振动控制方程,并通过数值方法求解,研究了铁木辛柯纳米梁的非线性强迫振动问题;Su 等^[14]研究了在弹性基底上的纳米梁的自由振动和强迫振动问题;Dai 等^[15]研究了纳米悬臂梁的非线性强迫振动问题,并用伽辽金法给出了数值解;Zhang 等^[16]研究了纳米输流管的振动问题,并给出了数值解;Nazemnezhad 等^[17]利用扭转弹簧模型研究了带有裂纹的纳米梁的扭转自由振动问题,并给出了解析解;Rouhi 等^[18]用理论方法研究了圆筒形纳米壳的非线性自由振动问题;Keivani 等^[19]发展了用于梁型纳米镊的稳定性分析的双层梁连续介质模型。

另一方面,在研究梁的强迫振动时,常用模态展开法进行求解。利用这种方法得到的解常以无穷级数的形式表示出来,在实际应用中需要取级数的前若干项来求得近似解。例如,Chen 等^[20]用这种方法研究了带有集中质量块的梁的振动行为;Kim 等^[21]研究了在集中质量、集中转动惯量和轴向力等条件分别或联合作用下,细长梁的响应;Yesilce^[22]研究了轴向力对多跨、多弹簧-质量系统的影响。求解梁的强迫振动问题的另一种常用方法是格林函数法。这种方法通过求解梁在单位集中荷载下的基本解,再对基本解进行积分来描述梁的动态响应;Kukla^[23]用格林函数法求解了带有多个振子的铁木辛柯梁的固有频率;Abu-Hilal^[24]利用格林函数法研究了欧拉-伯努利梁的强迫振动问题;Li 等^[25]用

格林函数法对考虑阻尼效应的铁木辛柯梁的强迫振动问题进行了研究;Zhao 等^[26]用格林函数法研究了带有裂纹的欧拉-伯努利梁的强迫振动问题。对比表明,格林函数法的优势在于求解强迫振动问题时不必先求取梁的自由振动解,易于求解某些支座形式较为复杂的梁,且解具有封闭形式等。

本文通过基于 Gurtin-Murdoch 模型的纳米梁理论,分析了铁木辛柯纳米梁的简谐强迫振动问题。利用分离变量法和拉普拉斯变换得到了铁木辛柯纳米梁的简谐强迫振动行为的格林函数解。通过数值算例与文献中已有结果进行对比验证了解的正确性,研究了稳态表面效应和尺度效应对梁动力行为的影响。

1 铁木辛柯纳米梁的控制方程

考虑一段等截面且截面形状任意的纳米梁。梁长为 L , 高为 H , 截面面积为 A , 截面周长为 s , 截面的单位外法线为 n 。为了表征表面效应,Liu 等^[11]在 Gurtin-Murdoch 理论的基础上,假设纳米梁表面附加了一层力学特性与梁基体迥异的薄层(厚度为 0),并使这一薄层材料与基体紧密贴合(见图 1)。假设基体与薄膜均为各向同性材料,且梁处于平面应力状态,根据 Liu 等^[11]的工作,铁木辛柯纳米梁的运动控制方程可以写为:

$$[EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*]\theta'' + \frac{2\nu I \tau_0}{H}w''' - G\kappa A(w' + \theta) = (\rho I + \rho_0 I^*)\ddot{\theta} + \frac{2\nu I \rho_0}{H}\ddot{w}' \quad (1a)$$

$$G\kappa A(w'' + \theta') + \tau_0 s^* w'' + p(x, t) = (\rho A + \rho_0 s^*)\ddot{w} \quad (1b)$$

其中:符号 \cdot 表示对时间 t 求导,上角标符号'表示对坐标 x 求导(下文中若求导阶数大于三,则用括号加数字表示); E 、 ν 、 G 和 ρ 分别为基体的弹性模量、泊松比、剪切刚度和密度; τ_0 为薄膜在无约束状态下的残余应力; ρ_0 为薄膜密度; μ_0 和 λ_0 为薄膜的拉梅常数; I 和 I^* 分别为基体和薄膜的截面惯性矩; w 和 θ 分别为梁的挠度和转角; κ 为剪切修正系数; $p(x, t)$ 为梁上的横向分布荷载;且有

$$s^* = \int_s n_i^2 ds \quad (2)$$

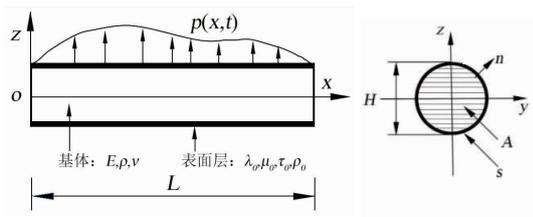


图1 梁的几何模型以及坐标系

梁的弯矩和剪力可表示为^[11]:

$$M(x) = [EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*] \theta' + \frac{2\nu I \tau_0}{H} w'' - \frac{2\nu I \rho_0}{H} \ddot{w} \quad (3a)$$

$$Q(x) = G\kappa A(w' + \theta) + \tau_0 s^* w' \quad (3b)$$

为了便于求解,将(1a)代入(1b),消去 θ 并整理得到只含有 w 的铁木辛柯梁的振动控制方程:

$$l_1 w^{(4)} - l_2 \ddot{w}'' + l_3 w^{(4)} - l_4 w'' + l_5 \ddot{w} = p(x,t) - l_6 \ddot{p}''(x,t) + l_7 \ddot{p}''(x,t) \quad (4)$$

其中:

$$\left\{ \begin{aligned} l_1 &= [EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*] \left(1 + \frac{\tau_0 s^*}{G\kappa A}\right) - \frac{2\nu I \tau_0}{H} \\ l_2 &= \frac{(\rho A + \rho_0 s^*)}{G\kappa A} [EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*] + (\rho I + \rho_0 I^*) \left(1 + \frac{\tau_0 s^*}{G\kappa A}\right) - \frac{2\nu I \rho_0}{H} \\ l_3 &= \frac{(\rho A + \rho_0 s^*)(\rho I + \rho_0 I^*)}{G\kappa A} \\ l_4 &= \tau_0 s^* \\ l_5 &= \rho A + \rho_0 s^* \\ l_6 &= \frac{EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*}{G\kappa A} \\ l_7 &= \frac{\rho I + \rho_0 I^*}{G\kappa A} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

2 简谐强迫振动行为的格林函数通解

当梁发生简谐强迫振动时,可假设激振力为:

$$p(x,t) = f(x) \cos \Omega t \quad (6)$$

若荷载为在 $x = \xi$ 处的集中荷载,那么:

$$f(x) = F_0 \delta(x - \xi) \quad (7)$$

进行分离变量,假设:

$$w = \text{Re} \{ X(x) e^{i\Omega t} \} \quad (8)$$

其中: Re 表示求复数的实部。将式(8)代入式(4)并消

去 $e^{i\Omega t}$ 得到:

$$X^{(4)} + a_1 X'' + a_2 X = b_1 f''(x) - b_2 f(x) \quad (9)$$

其中:

$$a_1 = \frac{l_2 \Omega^2 - l_4}{l_1} \quad (10a)$$

$$a_2 = \frac{(l_3 \Omega^2 - l_5) \Omega^2}{l_1} \quad (10b)$$

$$b_1 = -\frac{l_6}{l_1} \quad (10c)$$

$$b_2 = \frac{l_7 \Omega^2 - 1}{l_1} \quad (10d)$$

由于式(9)为线性系统,其解可以表示为:

$$X = \int_0^L f(\xi) G(x; \xi) d\xi \quad (11)$$

其中: $G(x; \xi)$ 为格林函数,其物理意义为梁受到位于 $x = \xi$ 处的单位集中荷载作用时的响应。为方便起见,在下文中若无需指出单位荷载的具体位置,将格林函数 $G(x; \xi)$ 简写为 $G(x)$,且对 $G(x)$ 的求导和积分均只针对变元 x 。

考虑格林函数的物理意义,当荷载为单位集中荷载时,可将式(9)写为:

$$G^{(4)}(x) + a_1 G''(x) + a_2 G(x) = b_1 \delta''(x - \xi) - b_2 \delta(x - \xi) \quad (12)$$

对式(12)进行拉普拉斯变换得:

$$\hat{G}(s) = \frac{R(s)}{s^4 + a_1 s^2 + a_2} \quad (13)$$

其中: $\hat{G}(s) = [G(x)]$ 为格林函数 $G(x)$ 的拉普拉斯变换的像函数,且有:

$$R(s) = (b_1 s^2 - b_2) e^{-s\xi} + (s^3 + a_1 s) G(0) + (s^2 + a_1) G'(0) + s G''(0) + G'''(0) \quad (14)$$

为了对式(12)进行拉普拉斯逆变换,假设 $Y(s)$ 为关于 s 的任意函数。当 $a_1^2 - 4a_2 \neq 0$ 时($a_1^2 - 4a_2 = 0$ 的情况一般不会出现,本文不考虑这种情况),特征方程 $s^4 + a_1 s^2 + a_2 = 0$ 有四个不同的根,可设:

$$s^4 + a_1 s^2 + a_2 = \prod_{i=1}^4 (s - s_i) \quad (15)$$

因此可得:

$$\lim_{s \rightarrow s_i} \frac{(s - s_n) Y(s) e^{s\xi}}{s^4 + a_1 s^2 + a_2} = \frac{Y(s_n) e^{s_n \xi}}{\prod_{i=1, i \neq n}^4 (s_n - s_i)} \quad (16)$$

于是根据黎曼-梅林反演公式有以下拉普拉斯逆

变换:

$$L^{-1} \left[\frac{Y(s)}{s^4 + a_1 s^2 + a_2} \right] = \sum_{n=1}^4 A_n(x) Y(s_n) \quad (17)$$

其中:

$$A_n(x) = \frac{e^{s_n x}}{\prod_{i=1, i \neq n}^4 (s_n - s_i)} \quad (18)$$

利用式(17)可方便的求出式(12)的逆变换,得到格林函数为:

$$G(x) = H(x - \xi) \Phi_1(x - \xi) + G(0) \Phi_2(x) + G'(0) \Phi_3(x) + G''(0) \Phi_4(x) + G'''(0) \Phi_5(x) \quad (19)$$

其中: $G(0)$ 、 $G'(0)$ 、 $G''(0)$ 、 $G'''(0)$ 为待定常数;函数 $H(x)$ 、 $\Phi_1(x)$ 、 $\Phi_2(x)$ 、 $\Phi_3(x)$ 、 $\Phi_4(x)$ 和 $\Phi_5(x)$ 定义如下:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases} \quad (20a)$$

$$\Phi_1(x) = \sum_{n=1}^4 (b_1 s_n^2 - b_2) A_n(x) \quad (20b)$$

$$\Phi_2(x) = \sum_{n=1}^4 (s_n^3 + a_1 s_n) A_n(x) \quad (20c)$$

$$\Phi_3(x) = \sum_{n=1}^4 (s_n^2 + a_1) A_n(x) \quad (20d)$$

$$\Phi_4(x) = \sum_{n=1}^4 s_n A_n(x) \quad (20e)$$

$$\Phi_5(x) = \sum_{n=1}^4 A_n(x) \quad (20f)$$

为了确定待定常数 $G(0)$ 、 $G'(0)$ 、 $G''(0)$ 、 $G'''(0)$, 需要将 $x = L$ 代入格林函数(19)及其一至三阶导数中, 以构造如下方程组:

$$\sum_{n=2}^5 \Phi_n^{(m)}(x) G^{(n-2)}(x) = G^{(m)}(L; \xi) - \Phi_1^{(m)}(L - \xi), (m = 0, 1, 2, 3) \quad (21)$$

$$\Phi_1^{(m)}(L - \xi), (m = 0, 1, 2, 3)$$

将梁的具体边界条件代入式(21), 即可得到对应常数。

3 三种典型情况下的特解

3.1 以位移表达的边界条件

为了确定不同边界条件下的待定常数, 需要将截面转角、弯矩和剪力的边界条件用位移来表达。首先通过式(1)得到转角 θ 和位移 w 的关系式:

$$\theta = e_1 w''' + e_2 \ddot{w}' - w' - e_3 p'(x, t) - e_4 \ddot{\theta} \quad (22)$$

其中:

$$e_1 = \frac{2\nu I \tau_0}{HG\kappa A} - \frac{EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*}{G\kappa A} \left(1 + \frac{\tau_0 s^*}{G\kappa A} \right) \quad (23a)$$

$$e_2 = \frac{[EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*](\rho A + \rho_0 s^*)}{(G\kappa A)^2} - \frac{2\nu I \rho_0}{HG\kappa A} \quad (23b)$$

$$e_3 = \frac{EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*}{(G\kappa A)^2} \quad (23c)$$

$$e_4 = \frac{\rho I + \rho_0 I^*}{G\kappa A} \quad (23d)$$

再设:

$$\theta = Re \{ N(x) e^{i\Omega x} \} \quad (24)$$

并将式(24)和式(8)代入式(22)中, 整理后得:

$$N = \frac{e_1 X''' - (1 + e_2 \Omega^2) X' - e_3 f'(x)}{1 - \Omega^2 e_4} \quad (25)$$

而将式(24)和式(8)代入(1b)则得到:

$$N' = -e_5 X'' - e_6 X - e_7 f(x) \quad (26)$$

其中:

$$e_5 = 1 + \frac{\tau_0 s^*}{G\kappa A} \quad (27a)$$

$$e_6 = \frac{(\rho A + \rho_0 s^*) \Omega^2}{G\kappa A} \quad (27b)$$

$$e_7 = \frac{1}{G\kappa A} \quad (27c)$$

在求解格林函数的过程中, 假设单位荷载的作用位置 $\xi \in (0, L)$, 于是荷载 $f(x) = \delta(x - \xi)$ 及其各阶导数在 $x = 0$ 和 $x = L$ 处均为 0, 从而得到下面三种情况下位移的约束条件。

3.1.1 梁端截面转角为零

当梁左端或右端截面转角为零时, 由式(24)和式(25)可得:

$$e_1 X'''(0) - (1 + e_2 \Omega^2) X'(0) = 0 \quad (28a)$$

$$e_1 X'''(L) - (1 + e_2 \Omega^2) X'(L) = 0 \quad (28b)$$

3.1.2 梁端弯矩为零

当梁左端或右端截面弯矩为零时, 由式(3a)、式(8)、式(24)和式(26)可得:

$$d_1 X''(0) + d_2 X(0) = 0 \quad (29a)$$

$$d_1 X''(L) + d_2 X(L) = 0 \quad (29b)$$

其中:

$$d_1 = \frac{2\nu I \tau_0}{H} - [EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*] \left(1 + \frac{\tau_0 s^*}{G\kappa A} \right) \quad (30a)$$

$$d_2 = \Omega^2 \left\{ \frac{2\nu l \rho_0}{H} - \frac{(\rho A + \rho_0 s^*)}{G\kappa A} [EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*] \right\} \quad (30b)$$

3.1.3 梁端剪力为零

当梁左端或右端截面剪力为零时,由式(3b)、式(8)、式(24)和式(25)可得:

$$d_3 X'''(0) + d_4 X'(0) = 0 \quad (31a)$$

$$d_3 X'''(L) + d_4 X'(L) = 0 \quad (31b)$$

其中:

$$d_3 = e_1 \quad (32a)$$

$$d_4 = \left(1 + \frac{\tau_0 s^*}{G\kappa A} \right) (1 - \Omega^2 e_4) - 1 - e_2 \Omega^2 \quad (32b)$$

3.2 简支梁、固支梁和悬臂梁的格林函数解

3.2.1 简支梁

对于简支梁,其挠度和弯矩在两端支座处为零,利用式(29)可得:

$$G(0) = G''(0) = 0 \quad (33a)$$

$$G(L) = G''(L) = 0 \quad (33b)$$

将式(33)代入式(21),再求解方程可得:

$$G'(0) = \frac{\Phi_5(L)\Phi''_1(L-\xi) - \Phi''_5(L)\Phi_1(L-\xi)}{\Phi_3(L)\Phi''_5(L) - \Phi_5(L)\Phi''_3(L)} \quad (34a)$$

$$G'''(0) = \frac{\Phi''_3(L)\Phi_1(L-\xi) - \Phi_3(L)\Phi''_1(L-\xi)}{\Phi_3(L)\Phi''_5(L) - \Phi_5(L)\Phi''_3(L)} \quad (34b)$$

于是,简支纳米梁的格林函数可由式(19)、式(33)和式(34)确定。

3.2.2 固支梁

对于两端固支的梁,梁两端的挠度和转角为零,利用式(28)可得:

$$G(0) = G(L) = 0 \quad (35a)$$

$$G'(0) = \frac{1 + e_2 \Omega^2}{e_1} G'(0) \quad (35b)$$

$$G'(L) = \frac{1 + e_2 \Omega^2}{e_1} G'(L) \quad (35c)$$

将式(35)代入式(21)可得:

$$G'(0) = \frac{\beta_1 \alpha_4 - \beta_2 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3} \quad (36a)$$

$$G''(0) = \frac{\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3} \quad (36b)$$

其中:

$$\alpha_1 = \Phi_3(L) + \frac{1 + e_2 \Omega^2}{e_1} \Phi_5(L) \quad (37a)$$

$$\alpha_2 = \Phi_4(L) \quad (37b)$$

$$\alpha_3 = \left[\Phi'''_3(L) - \frac{1 + e_2 \Omega^2}{e_1} \Phi'''_3(L) \right] + \frac{1 + e_2 \Omega^2}{e_1} \left[\Phi'''_5(L) - \frac{1 + e_2 \Omega^2}{e_1} \Phi'''_5(L) \right] \quad (37c)$$

$$\alpha_4 = \Phi''_4(L) - \frac{1 + e_2 \Omega^2}{e_1} \Phi''_4(L) \quad (37d)$$

$$\beta_1 = -\Phi_1(L - \xi) \quad (37e)$$

$$\beta_2 = \frac{1 + e_2 \Omega^2}{e_1} \Phi''_1(L - \xi) - \Phi''_1(L - \xi) \quad (37f)$$

由式(19)、式(35)和式(36)可得到固支梁的格林函数。

3.2.3 悬臂梁(左端固支)

对于左端固支,右端自由的悬臂梁,梁左端的挠度和转角为零,右端弯矩与剪力为零,利用式(28)、式(29)和式(31)可得:

$$G(0) = 0 \quad (38a)$$

$$G'''(0) = \frac{1 + e_2 \Omega^2}{e_1} G'(0) \quad (38b)$$

$$G''(L) = -\frac{d_2}{d_1} G(L) \quad (38c)$$

$$G'''(L) = -\frac{d_4}{d_3} G'(L) \quad (38d)$$

将式(38)代入式(21)可得:

$$G'(0) = \frac{\beta_3 \alpha_8 - \beta_4 \alpha_6}{\alpha_5 \alpha_8 - \alpha_6 \alpha_7} \quad (39a)$$

$$G''(0) = \frac{\beta_4 \alpha_5 - \beta_3 \alpha_7}{\alpha_5 \alpha_8 - \alpha_6 \alpha_7} \quad (39b)$$

其中:

$$\alpha_5 = \left[\Phi''_3(L) + \frac{d_2}{d_1} \Phi_3(L) \right] + \frac{1 + e_2 \Omega^2}{e_1} \left[\Phi_5''(L) + \frac{d_2}{d_1} \Phi_5(L) \right] \quad (40a)$$

$$\alpha_6 = \Phi''_4(L) + \frac{d_2}{d_1} \Phi_4(L) \quad (40b)$$

$$\alpha_7 = \left[\Phi'''_3(L) + \frac{d_4}{d_3} \Phi_3'(L) \right] +$$

$$\frac{1 + e_2 \Omega^2}{e_1} \left[\Phi_5'''(L) + \frac{d_4}{d_3} \Phi_5'(L) \right] \quad (40c)$$

$$\alpha_8 = \Phi_4'''(L) + \frac{d_4}{d_3} \Phi_4'(L) \quad (40d)$$

$$\beta_3 = -\frac{d_2}{d_1} \Phi_1(L - \xi) - \Phi_1''(L - \xi) \quad (40e)$$

$$\beta_4 = -\frac{d_4}{d_3} \Phi_1'(L - \xi) - \Phi_1'''(L - \xi) \quad (40f)$$

由式(19)、式(38)和式(39)可得到固支梁的格林函数。

4 数值算例

在本节中,将用前面所得的解析结果进行数值呈现以达成以下几个目的:(1)检验解的有效性;(2)讨论表面效应对梁动力行为的影响。为此,考虑一个截面为矩形的铝梁,其参数为^[11]:宽度 $b = 3 \text{ nm}$, $H = 6 \text{ nm}$, $L = 50 \text{ nm}$, $\rho = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $E = 90 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\mu_0 = -5.4251 \text{ N/m}$, $\lambda_0 = 3.4939 \text{ N/m}$, $\tau_0 = 0.5689 \text{ N/m}$, $\rho_0 = 3.1688 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^3$ 。为方便讨论,引入如下无量纲的量: x/L , Ω/Ω_s , $G(x;\xi)/w_{max}$, 其中 $\Omega_s = \pi^2 \sqrt{EI/L^2} \sqrt{\rho A}$ 为不考虑表面效应的简支欧拉-伯努利梁的一阶固有圆频率, w_{max} 是不考虑表面效应的简支欧拉-伯努利梁在跨中受到单位集中力时的跨中挠度。在以下算例中,对于简支梁和固支梁,集中荷载施加在梁的跨中,对于悬臂梁,集中荷载施加在自由端。在下文的图中,分别用 $S-S$, $C-C$ 和 $C-F$ 表示简支梁、固支梁和悬臂梁,用 P 表示本文得到的结果。

4.1 解的有效性

图 2 给出了悬臂梁(简支梁、固支梁)的最大无量纲挠度(简支梁和固支梁取跨中挠度,悬臂梁取自由端挠度) $G_{max}(x;\xi)/w_{max}$ 随无量纲频率 Ω/Ω_s 的变化趋势。由图 2 可知,悬臂梁(简支梁、固支梁)在无量纲频率 $\Omega/\Omega_s = 0.417$ (0.9708 、 1.9385) 时 $G_{max}(x;\xi)/w_{max}$ 奇异,即发生共振现象。由此可知,悬臂梁(简支梁、固支梁)的无量纲一阶固有频率为 $\Omega/\Omega_s = 0.417$ (0.9708 、 1.9385),与 Liu 等^[11]的结果一致,这在某种程度上证明了本文解的正确性。若不考虑表面效应,由经典梁理论得到的悬臂梁(简支梁、固支梁)将在 $\Omega/\Omega_s = 0.3517$ (0.9772 、 2.2077) 处发生共振。相比于经典梁

理论,考虑表面效应的简支梁和固支梁的一阶固有频率减小,而悬臂梁的一阶固有频率增大。这说明表面效应有可能增大或降低梁的刚度。

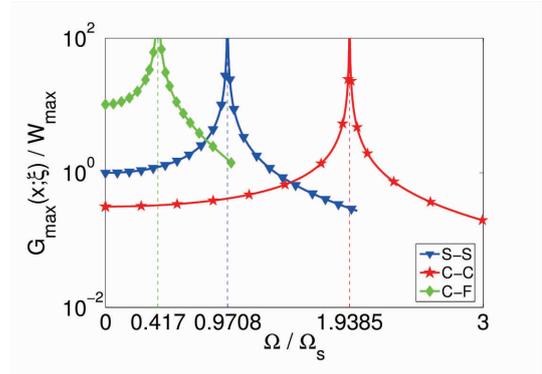


图 2 最大无量纲挠度 $G_{max}(x;\xi)/w_{max}$ 随无量纲频率 Ω/Ω_s 的变化

从图 2 中还可发现,当 Ω/Ω_s 趋于零时,三类梁的最大无量纲挠度曲线的斜率趋于零。此时,梁的横向位移趋于静力情况下梁的横向位移。这又为验证本文中解的正确性提供了一种方法:通过设定一个非常小的激振频率(如 $\Omega/\Omega_s = 10^{-4}$),将本文中的格林函数与考虑表面效应的纳米梁的静态解^[11]相对比,观察两者是否吻合。图 3 中给出了简支梁、固支梁和悬臂梁的静态解^[11]与本文的铁木辛柯纳米梁的格林函数($\Omega/\Omega_s = 10^{-4}$)的对比,可以看出二者完全一致,这进一步验证了本文解的正确性。

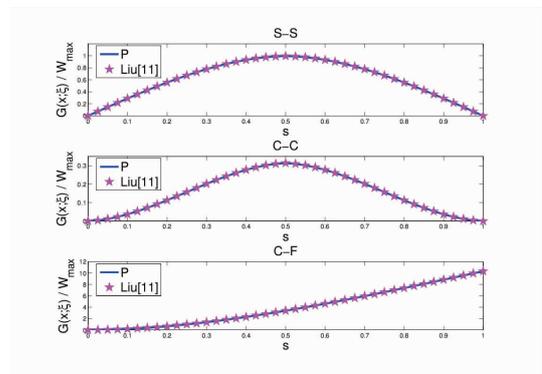


图 3 加载单位力的纳米梁静态解和频率为 $\Omega/\Omega_s = 10^{-4}$ 时无量纲挠度 $G(x;\xi)/w_{max}$ 的对比

4.2 表面效应的影响

为了衡量表面效应对梁的影响程度,定义如下物理量以描述考虑表面效应的梁与经典梁的挠度与转角之间的差异:

$$\varepsilon_1 = \frac{|G_{with}(x;\xi) - G_{without}(x;\xi)|}{G_{without}(x;\xi)} \quad (41a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{|N_{with}(x;\xi) - N_{without}(x;\xi)|}{N_{without}(x;\xi)} \quad (41b)$$

其中:下角标“with”和“without”分别代表考虑和不考虑表面效应所对应的物理量。

图4给出了在外激振力的无量纲频率为 $\Omega/\Omega_c = 10^{-4}$ 时,本文得到的无量纲挠度 $G(x,\xi)/w_{max}$ 随无量纲坐标 x/L 的变化趋势与经典铁木辛柯梁理论结果^[25] 的对比。由图4可以看出,表面效应对梁的影响与梁的边界条件有关。对于简支梁和固支梁,差异最大的地方在跨中处,分别有 $\varepsilon_1 = 4.56\%$ 和 $\varepsilon_1 = 7.68\%$ 。而对于悬臂梁,差异最大处在自由端, $\varepsilon_1 = 36.1\%$ 。

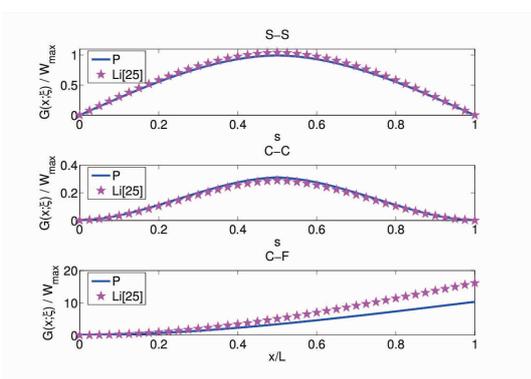


图4 考虑表面效应的梁的无量纲挠度 $G(x;\xi)/w_{max}$ 和经典铁木辛柯梁的解对比

图5给出了当外激振力的无量纲频率为 $\Omega/\Omega_c = 10^{-4}$ 时, ε_1 和 ε_2 随梁的宽度 $b(nm)$ 的变化趋势。在计算 ε_1 时,对于简支梁(固支梁、悬臂梁), x/L 取值为 0.5 (0.5、1)。在计算 ε_2 时,对于简支梁(固支梁、悬臂梁), x/L 取值则为 0 (0.25、1)。梁的宽度、高度与梁长之间的比例关系固定为 $L/b = 2L/H = 50/3$ 。事实上,这两个物理量随着梁的宽度的变化呈现相同的变化趋势。图5清楚地表明,表面效应对悬臂梁的影响最明显,而对简支梁和固支梁的影响较弱。此外,表面效应的影响随着梁的宽度的增大而减小。对简支梁和固支梁而言,当 b 大于 400 nm 时,即可不计表面效应的影响。而对悬臂梁而言,直到 b 达到 1000 nm 时,表面效应的影响才能忽略不计。

5 结束语

本文通过基于 Gurtin - Murdoch 模型的铁木辛柯纳

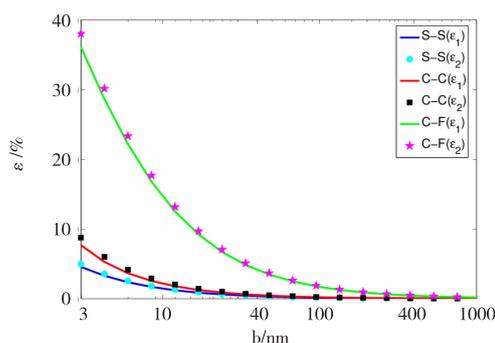


图5 表面能对不同尺寸的梁的挠度和转角的影响

米梁控制方程,分析了不同边界条件下的纳米梁在简谐激振力作用下的强迫振动问题。利用分离变量法和拉普拉斯变换法得到了封闭形式的格林函数解。通过数值算例,验证了本文理论解的正确性和有效性。另外,通过与经典梁理论对比发现,表面效应改变了梁的刚度,从而导致梁的固有频率发生变化。表面效应对梁影响的显著性与梁的支承形式有关。对于简支梁、固支梁和悬臂梁三种形式的梁,固支梁和简支梁受到的影响较小,悬臂梁受到的影响较大。从挠度和转角两个方面分析了纳米梁的尺度效应,发现呈现出基本一致的规律。表面能对梁的影响与支撑条件相关且随梁尺寸的增大而减弱,其中,表面能对简支梁和固支梁的影响减弱得较快,而对悬臂梁的影响减弱得较慢。

参考文献:

- [1] CRAIGHEAD H G. Nanoelectromechanical Systems[J]. Science, 2000, 290(5496): 1532-1535.
- [2] LAM D C C, YANG F, CHONG A C M, et al. Experiments and theory in strain gradient elasticity[J]. Journal of the Mechanics & Physics of Solids, 2003, 51(8): 1477-1508.
- [3] MCFARLAND A W, COLTON J S. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors[J]. Journal of Micromechanics & Microengineering, 2005, 15(5): 1060-1067.
- [4] MAHMOUD F F, ELTAHER M A, ALSHORBAGY A E, et al. Static analysis of nanobeams including surface effects by nonlocal finite element[J]. Journal of Mechanical Sci-

- ence & Technology,2012,26(11):3555-3563.
- [5] DINGREVILLEA R,QUA J,CHERKAOUIB M.Surface free energy and its effect on the elastic behavior of nano-sized particles,wires and films[J].Journal of the Mechanics & Physics of Solids,2005,53(8):1827-1854.
- [6] LEE B,RUDD R E.First-principles study of the Young's modulus of Si nanowires[J].Physical Review B Condensed Matter,2007,75(4):41305.
- [7] MILLER R E,SHENOY V B.Size dependent elastic properties of structural elements [J]. Nanotechnology, 2000,11(3):139-147.
- [8] GAO X L,MAHMOUD F F.A new Bernoulli-Euler beam model incorporating microstructure and surface energy effects[J].Acta Mechanica,2014,65(2):393-404.
- [9] GURTIN M E,MURDOCH A I.A continuum theory of elastic material surfaces[J].Archive for Rational Mechanics & Analysis,1975,57(4):291-323.
- [10] JIANG L Y,YAN Z.Timoshenko beam model for static bending of nanowires with surface effects [J]. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,2010,42(9):2274-2279.
- [11] LIU C,RAJAPAKSE R K N D.Continuum models incorporating surface energy for static and dynamic response of nanoscale beams[J].IEEE Transactions on Nanotechnology,2010,9(4):422-431.
- [12] WANG G F,FENG X Q.Effects of surface stresses on contact problems at nanoscale[J].Journal of Applied Physics,2007,101(1):1564.
- [13] ANSARI R,MOHAMMADI V,SHOJAEI M F,et al. On the forced vibration analysis of Timoshenko nanobeams based on the surface stress elasticity theory[J]. European Journal of Mechanics,2014,60(2):158-166.
- [14] SU G Y,LI Y X,LI X Y,et al.Free and forced vibrations of nanowires on elastic substrates[J].International Journal of Mechanical Sciences,2018,138-139:62-73.
- [15] DAI H L,ZHAO D M,ZOU J J,et al.Surface effect on the nonlinear forced vibration of cantilevered nanobeams [J]. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,2016,80:25-30.
- [16] ZHANG J,MEGUID S A.Effect of surface energy on the dynamic response and instability of fluid-conveying nanobeams[J].European Journal of Mechanics-A/Solids,2016,58:1-9.
- [17] NAZEMNEZHAD R,FAHIMI P.Free torsional vibration of cracked nanobeams incorporating surface energy effects[J].Applied Mathematics and Mechanics,2017,38(2):217-230.
- [18] ROUHI H,ANSARI R.Size-dependent large amplitude vibration analysis of nanoshells using the gurtin-murdoch model [J]. International Journal of Nanoscience and Nanotechnology,2017,13(3):241-252.
- [19] KEIVANI M,KOOCHI A,ABADYANA M.New bilayer continuum model based on gurtin-murdoch and consistent couple-stress theories for stability analysis of beam-type nanotweezers[J].Journal of Mechanics,2017,33(2): 137-146.
- [20] CHEN Y.On the vibration of beams or rods carrying a concentrated mass [J]. Journal of Applied Mechanics, 1963,30(2):310-311.
- [21] KIM C S,DICKINSON S M.On the analysis of laterally vibrating slender beams subject to various complicating effects[J].Journal of Sound & Vibration,1988, 122(3):441-455.
- [22] YESILCE Y.Effect of axial force on the free vibration of Reddy-Bickford multi-span beam carrying multiple spring-mass systems[J].Journal of Vibration and Control,2010,16(1):11-32.
- [23] KUKLA S.Application of Green functions in frequency analysis of Timoshenko beams with oscillators[J]. Journal of Sound & Vibration,1997,205(3):355-363.
- [24] ABU-HILAL M.Forced vibration of Euler-Bernoulli beams by means of dynamic Green functions[J].Jour-

- nal of Sound & Vibration,2003,267(2):191-207.
- [25] LI X Y,ZHAO X,LI Y H.Green's functions of the forced vibration of Timoshenko beams with damping effect[J].Journal of Sound & Vibration,2014,333(6):1781-1795.
- [26] ZHAO X,ZHAO Y R,GAO X Z,et al.Green's functions for the forced vibrations of cracked Euler-Bernoulli beams[J].Mechanical Systems & Signal Processing,2016,68-69:155-175.

Green's Function for the Harmonic Forced Vibration of Timoshenko Nanobeam

CHEN Xiaohan, WU Taihong, LI Xiangyu

(Applied Mechanics and Structure Safety Key Laboratory of Sichuan Province, School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: On the basis of the governing equations of nanobeam, which are constructed with Gurtin-Murdoch model, the forced harmonic vibration of Timoshenko nanobeam is investigated. In the analysis, Green's function method is adopted, and the closed-form solutions are derived with separation of variables and Laplace transformation, including general solution and solutions for simply supported beam, clamped beam and cantilever beam. With numerical results, the validity of the solutions is checked, and the influence of surface effect on the forced harmonic vibration of Timoshenko nanobeam is studied. It is shown that surface effect may enlarge or reduce the stiffness of nanobeam, resulting in the change of natural frequency of nanobeam. The influence of surface effect is related with boundary conditions of beam, and decreases as the size of beam increases. Surface effect has much stronger influence on cantilever beam than on simply supported beam and clamped beam. The influence of surface effect on nanobeam can be measured by transverse deflection or cross-sectional rotation of nanobeam, and the similar results can be obtained by the two ways.

Key words: nanobeam; surface effect; harmonic forced vibration; Timoshenko beam; Green's function