第 31 卷第 3 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 31 No. 3
2018 年 6 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Jun. 2018
文章编号:1673-1549(2018)03-0081-05 DOI:10.11863/j.suse.2018.03.13

Laplace 算子的特征函数系在三个空间中的完备性证明方法

邢家省[1,2], 杨义川[1,2]

(1.北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191;2.数学、信息与行为教育部重点实验室, 北京 100191)

摘 要:考虑 Laplace 算子在 Dirichlet 边界条件下的特征值和特征函数的性质问题,利用变分方法给出了 Laplace 算子的特征值和特征函数的存在性。运用特征值序列趋向于无穷大,首先证明了特征函数系在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中是一组正交完备系,然后利用空间 $H_0^1(\Omega)$ 在空间 $L^2(\Omega)$ 中的稠密性,证明了特征函数系在空间 $L^2(\Omega)$ 中是一组标准正交完备系,最后利用二阶椭圆型偏微分方程解的 L^2 先验估计结果,给出了特征函数系在空间 $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 中是一组完备系。对经典知识给予了深刻发掘,并给予严密完善的证明。

关键词:Laplace 算子;Dirichlet 边界条件;特征值序列;特征函数系的完备性

中图分类号:O175.29 **文献标志码**:A

引 言

Laplace 算子在 Dirichlet 边界条件下的特征值和特征函数的性质问题[1-11]是偏微分方程中的重要课题,引起了人们持续不断的研究[1-22]。关于特征值的迹问题,在文献[16]中有详尽的综述。对特征函数系的完备性[1-11],已有多种方法给予证明。然而对特征函数系在多个空间中的完备性,现有文献中给出的证明路线不够明确[1-11],甚至出现不严密的表述过程[8],没有达到严密完善的标准程度。本文在前人研究成果的基础上,对特征函数系在三个空间中的完备性分别给予叙述和证明,建立一套标准的证明路线,准确论述了特征函数系的理论结果,推进学术认识发展。

1 Laplace 算子在 Dirichlet 边界条件下的特征值问题

设 R^n 表示实 n 维 Euclid 空间,设 Ω 是 R^n 中的有界开集,边界 $\partial\Omega$ 适当光滑。空间 $L^2(\Omega)$ 上的内积记为 $(u,v)=\int_\Omega uv\mathrm{d}x,\ u,v\in L^2(\Omega)$,范数记为 $\|u\|=\left(\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$。空间 $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ 上的内积记为

$$<u,v>=\int_\Omega uv\mathrm{d}x+\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x,u,v\in H_0^1(\Omega)$$

范数记为

$$\|u\|_{H^1}=\left(\int_\Omega u^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

收稿日期:收稿日期:2018-02-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11771004);北京航空航天大学校级重大教改项目(2016)

作者简介:邢家省(1964-),男,河南泌阳人,副教授,博士,主要从事偏微分方程、微分几何、泛函分析方面的研究,(E-mail)xjsh@buaa.edu.cn;杨义川(1970-),男,甘肃天水人,教授,博士,主要从事逻辑代数、序代数、软计算及其应用方面的研究,(E-mail)ycyang@buaa.edu.cn

定义 1 设 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, 称 Δ 为 Laplace算子。

定义 2 如果存在实数 λ 和非零函数 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 使得

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, 在\ \Omega\ 中 \\ u = 0, 在\ \partial\Omega\ 上 \end{cases}$$

, 则称 λ 为算子 $-\Delta$ 的特征值,称 u 为对应于特征值 λ 的特征函数。

定义 3 对实数 λ, 如果存在函 $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, 使得

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega uv \mathrm{d}x,\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{1}$$

则称 λ 为算子 $-\Delta$ 的广义特征值,称 u 为对应于特征值 λ 的广义特征函数。

在一定条件下,定义 2 与定义 3 是等价的[1-18]。

2 第一特征值问题的存在性

若 λ, u 是问题(1)的特征值与特征函数,则有

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x$$

$$\lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x} = \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2}$$

于是引入泛函 $J(u) = \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2}$, $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, 由 Friedrichs 不等式[1-15] $\|u\|^2 \leqslant C\|\nabla u\|^2$, 得到

$$\frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2} \geqslant \frac{1}{C} > 0, \forall u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0$$

此式说明泛函 $J(u)$ 有正的下界,因此 $J(u)$ 有下确界。

定义

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2} = \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v = 1}} \|\nabla v\|^2 \tag{2}$$

则 $\lambda_1 \geqslant \frac{1}{C} > 0$。

证明 λ_1 是算子 $-\Delta$ 的特征值[1-8]。由下确界 $\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|=1}} \|\nabla u\|^2$ 的定义, 对任意正整数 k, 存在 $u_k \in H_0^1(\Omega)$, $\|u_k\| = 1$, 满足 $\|\nabla u_k\|^2 \leqslant \lambda_1 + \frac{1}{k}$, $\|\nabla u_k\|^2 \geqslant \lambda_1$。于是得 $\{u_k\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界,由索伯列夫空间的紧嵌入定理[1-15],存在 $\{u_k\}$ 的子序列 $\{u_{k_i}\}$ 和函数 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使得 $u_{k_i} \to u$ 在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛, $\nabla u_{k_i} \to \nabla u$ 在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛,从而 $\lim_{k_i \to \infty} \|u_{k_i}\| = 1 = \|u\|$, $\|\nabla u\|^2 \leqslant \liminf_{k_i \to \infty} \|\nabla u_{k_i}\|^2$。再由 $\|\nabla u_{k_i}\|^2 \leqslant \lambda_1 + \frac{1}{k_i}$, 得 $\|\nabla u\|^2 \leqslant \lambda_1$, 又 $\|\nabla u\|^2 \geqslant \lambda_1$, 故 $\|\nabla u\|^2 = \lambda_1$, $\|u\| = 1$, 即存在 $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\| = 1$, 使得 $\|\nabla u\|^2 = \lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\nabla u^2}{\|u\|^2} = \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\|=1}} \|\nabla v\|^2$。

证明 λ_1, u 分别是特征值与特征函数。注意 $\lambda_1 = J(u) = \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} J(v)$, 对任意 $v \in H_0^1(\Omega)$,任意实数 t,

$$\frac{\|\nabla(u + tv)\|^2}{\|u + tv\|^2} \geqslant \lambda_1$$

$$\|\nabla(u + tv)\|^2 \geqslant \lambda_1 \|u + tv\|^2$$

经过展开处理,可得成立

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x = \lambda_1 \int_\Omega uv \mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

因此, λ_1 是算子 $-\Delta$ 的特征值, u 为对应于特征值 λ 的特征函数。

证明 λ 是最小的特征值。设 λ 是 $-\Delta$ 的任意特征值,即存在 $w \in H_0^1(\Omega)$, $w \neq 0$, 使得

$$\int_\Omega \nabla w \nabla v \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega wv \mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

式中,取 $v = w$, 得

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \mathrm{d}x = \lambda \|w\|^2$$

$$\lambda = \frac{\|\nabla w\|^2}{\|w\|^2} \geqslant \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ |v| \neq 0}} \frac{\|\nabla v\|^2}{v^2} = \lambda_1$$

于是 λ_1 是 $-\Delta$ 的最小特征值。

3 算子 $-\Delta$ 的所有特征值和特征函数系

依次求算子 $-\Delta$ 的所有特征值, $\lambda_2 = \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0 \\ (v, u_1) = 0}} J(v)$

显然 $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2$,可以证明,存在 $u_2 \in H_0^1(\Omega)$, $\|u_2\| = 1$, $(u_2, u_1) = 0$, 使得

$$J(u_2) = \lambda_2 = \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0 \\ (v, u_1) = 0}} J(v)$$

同上可证, λ_2, u_2 满足

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla v \mathrm{d}x = \lambda_2 \int_\Omega u_2 v \mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

即 λ_2 是特征值, u_2 为对应于特征值 λ_2 的特征函数。

假设已经得出算子 $-\Delta$ 的 $m-1$ 个特征值,

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1},(m\geqslant 1),\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{m-1} \tag{3}$$

对应于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1}$ 的特征函数为 $u_1,u_2,\cdots,u_{m-1}$ 且

$$\|u_k\| = 1,(k = 1,2,\cdots,m-1) \tag{4}$$

函数组(4)的所有线性组合成为 $L^2(\Omega)$ 的一个线性子空间,叫做函数组(4)在 $L^2(\Omega)$ 中生成的子空间,记为

$$V_{m-1} = span\{u_1,u_2,\cdots,u_{m-1}\} = \{\sum_{i=1}^{m-1} c_iu_i \mid c_i\in R,i=1,2,\cdots,m-1\}$$

以 $V_{m-1}^{\perp}$ 表示 V_{m-1} 在 $L^2(\Omega)$ 中的正交补空间,即

$$V_{m-1}^{\perp} = \{v\in L^2(\Omega) \mid (v,\varphi)=0,\forall\varphi\in V_{m-1}\}$$

根据泛函 $J(u)\geqslant\frac{1}{C}$ 有下界性,证明

$$\lambda_m = \inf_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\cap V_{m-1}^{\perp}\\ v\neq 0}} J(v) \tag{5}$$

就是算子 $-\Delta$ 的第 m 个特征值。

重复上面的讨论步骤可以证明对变分问题(5)存在函数 $u_m\in H_0^1(\Omega)\cap V_{m-1}^{\perp}$,使得 $\|u_m\|=1$,

$$\lambda_m = J(u_m) = \inf_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\cap V_{m-1}^{\perp}\\ v\neq 0}} J(v) \tag{6}$$

$$\int_\Omega \nabla u_m\nabla v\mathrm{d}x = \lambda_m\int_\Omega u_mv\mathrm{d}x,\forall v\in H_0^1(\Omega) \tag{7}$$

称 λ_m 是算子 $-\Delta$ 的第 m 个特征值, u_m 为对应于特征值 λ_m 的特征函数。由(6)式易知 $\lambda_m\geqslant\lambda_{m-1}$。由于 $H_0^1(\Omega)$ 是无限维空间,按(5)式得出算子 $-\Delta$ 的特征值的无限序列

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{m-1}\leqslant\lambda_m\cdots \tag{8}$$

相应的的特征函数序列

$$u_1,u_2,\cdots,u_{m-1},u_m,\cdots \tag{9}$$

4　特征值序列 $\{\lambda_m\}$ 及对应的特征函数系 $\{u_m\}$ 的基本性质

性质 1[1-11]　最小特征值 λ_1 对应的特征函数 $u(x)$ 可以取 $u(x)>0,\forall x\in\Omega,\|u\|=1,\lambda_1=\|\nabla u\|^2$。

性质 2[1-11]　对应于不同特征值的特征函数在 $L^2(\Omega)$ 中是正交的。

性质 3[1-11]　特征值序列 $\{\lambda_j\}$ 满足 $\lim\limits_{j\to\infty}\lambda_j=+\infty$。

证明　由于 $\{\lambda_j\}$ 是单调递增的,只须证明 $\{\lambda_j\}$ 是无界的。假若 $\{\lambda_j\}$ 有界,由 $\|\nabla u_j\|^2=\lambda_j\|u_j\|^2=\lambda_j,(j=1,2,\cdots)$,于是 $\{u_j\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界,利用 $H_0^1(\Omega)$ 紧嵌入 $L^2(\Omega)$,得到 $\{u_j\}$ 中存在子列(仍记为 $\{u_j\}$)在 $L^2(\Omega)$ 中收敛, $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|u_m-u_n\|=0$,但当 $m\neq n$ 时, $\|u_m-u_n\|^2=\|u_m\|^2+\|u_n\|^2=2$ 矛盾,所以 $\{\lambda_j\}$ 是无界的。故有 $\lim\limits_{j\to\infty}\lambda_j=+\infty$。

性质 4[1-11]　对应于同一特征值只有有限个线性无关的特征函数,或者,对应于每一个特征值的特征函数空间是有限维的。

性质 5[1-11]　特征函数系 $\{u_m\}$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 是正交系。

5 特征函数系 $\{u_m\}$ 是空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的一组正交完备系

定理 1[1-11]　特征函数系 $\{u_m\}$ 是空间 $H_0^1(\Omega)$ 的基底,即对任意 $u\in H_0^1(\Omega)$,则有 $u=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u,u_k)u_k$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 成立, $u=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u,u_k)u_k$ 在 $L^2(\Omega)$ 成立。

证明　对 $u\in L^2(\Omega)$, $a_j=(u,u_j)$,记 $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n}a_ju_j$,显然 $u-S_n$ 与 S_n 在 $L^2(\Omega)$ 中正交, $u=(u-S_n)+S_n$,于是 $\|u\|^2=\|u-S_n\|^2+\|S_n\|^2$,由此 $\|S_n\|^2\leqslant\|u\|^2$, $\|u-S_n\|^2\leqslant\|u\|^2$,而 $\|S_n\|^2=\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^2$,所以 $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^2\leqslant\|u\|^2$。

对任意实数 c_j,记 $\sigma_n=\sum\limits_{j=1}^{n}c_ju_j$,显然 $u-S_n$ 与 $S_n-\sigma_n$ 在 $L^2(\Omega)$ 中正交, $u-\sigma_n=(u-S_n)+(S_n-\sigma_n)$,于是 $\|u-\sigma_n\|^2=\|u-S_n\|^2+\|S_n-\sigma_n\|^2$,由此 $\|u-S_n\|^2\leqslant\|u-\sigma_n\|^2$,对 $u\in H_0^1(\Omega)$,显然 $\nabla(u-S_n)$ 与 ∇S_n 在 $L^2(\Omega)$ 中正交, $\nabla u=\nabla(u-S_n)+\nabla S_n$,成立 $\|\nabla u\|^2=\|\nabla(u-S_n)\|^2+\|\nabla S_n\|^2$,于是 $\|\nabla S_n\|^2\leqslant\|\nabla u\|^2$, $\|\nabla(u-S_n)\|^2\leqslant\|\nabla u\|^2$,易知 $\|\nabla S_n\|^2=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j|a_j|^2$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j|a_j|^2\leqslant\|\nabla u\|^2$,由于 $u-S_n\in H_0^1(\Omega)$,且 $u-S_n$ 与 $u_j(j=1,2,\cdots,n)$ 都正交,所以有 $\frac{\|\nabla(u-S_n)\|^2}{\|(u-S_n)\|^2}\geqslant\lambda_{n+1}$,

$$\|(u-S_n)\|^2\leqslant\frac{1}{\lambda_{n+1}}\|\nabla(u-S_n)\|^2\leqslant\frac{1}{\lambda_{n+1}}\|\nabla u\|^2$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$,得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\|(u-S_n)\|^2=0$,对 $u\in$

$H_0^1(\Omega)$, 有 $\{S_n\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 u; 对任意 $m > n$, $\|\nabla S_m - \nabla S_n\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m}\lambda_j | a_j |^2 \to 0, (m,n\to\infty)$, 于是 $\{\nabla S_n\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛, 且 $\{\nabla S_n\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛 ∇u; 故 $\{S_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中收敛于 u。

定理 2[1-11]　特征函数系 $\{u_m\}$ 是空间 $H_0^1(\Omega)$ 的完全系。若 $v \in H_0^1(\Omega)$, $(v,u_k) = 0, k = 1,2,\cdots$, 则 $v = 0$。

证明

$$
\begin{aligned}
< v,u_k > &= \int_\Omega vu_k\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla v\nabla u_k \mathrm{d}x = \\
&\int_\Omega vu_k\mathrm{d}x + \int_\Omega v(-\Delta u_k)\mathrm{d}x = \\
&\int_\Omega vu_k\mathrm{d}x + \lambda_k\int_\Omega vu_k\mathrm{d}x = \\
&(1+\lambda_k)\int_\Omega vu_k\mathrm{d}x = (1+\lambda_k)(v,u_k)
\end{aligned}
$$

由 $< v,u_k > = 0$, 可得 $(v,u_k) = 0$, $(k = 1,2,\cdots)$。假若 $v \neq 0$, 可设 $v \in H_0^1(\Omega)$, $\|v\| = 1$, 由于 $(v,u_k) = 0$, $(k = 1,2,\cdots,n-1)$; 所以有 $\lambda_n \leqslant \|\nabla v\|^2$, $(n = 1,2,\cdots)$, 这与 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = +\infty$ 矛盾, 故 $v = 0$, 这证明了是 $\{u_j\}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的一组正交完全系。

由于 $H_0^1(\Omega)$ 是 Banach 空间, 于是 $\{u_j\}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的一组正交完备系, 即对任意 $u \in H_0^1(\Omega)$, $a_j = (u, u_j)$, 记 $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j$, 成立 $\{S_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中收敛于 u。

6　特征函数系 $\{u_m\}$ 是空间 $L^2(\Omega)$ 中的一组标准正交完备系

定理 3[1-4]　$\{u_j\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的一组标准正交完备系。即对 $\forall u \in L^2(\Omega)$, $a_j = (u,u_j)$, 则有 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j = u$ 在 $L^2(\Omega)$ 成立。

证明　设 $u \in L^2(\Omega)$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\hat{u} \in C_0^1(\Omega)$, 使得 $\|\hat{u} - u\| < \varepsilon$, 记 $\hat{a}_j = (\hat{u},u_j)$, $\hat{S}_n = \sum_{j=1}^{n}\hat{a}_j u_j$, 由定理 1, 可知 $\{\hat{S}_n\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 $\hat{u}$。易知成立 $\|S_n - \hat{S}_n\| \leqslant \|\hat{u} - u\|$, 于是

$$
\begin{aligned}
\|S_n - u\| &\leqslant \|S_n - \hat{S}_n\| + \|\hat{S}_n - \hat{u}\| + \|\hat{u} - u\| \\
&\leqslant \|\hat{S}_n - \hat{u}\| + 2\|\hat{u} - u\| < \|\hat{S}_n - \hat{u}\| + 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

从而得到 $\{S_n\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 u。或者由

$$
\begin{aligned}
\|S_n - u\| &\leqslant \|\hat{S}_n - u\| \leqslant \|\hat{S}_n - \hat{u}\| + \|\hat{u} - u\| \\
&< \|\hat{S}_n - \hat{u}\| + \varepsilon
\end{aligned}
$$

得到 $\{S_n\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 u。

7 特征函数系 $\{u_m\}$ 是空间 $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 中的一组完备系

定理 4　$\{u_j\}$ 是 $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 中的一组正交基。

对 $\forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $a_j = (u,u_j)$, 成立 $\lim_{N\to+\infty}\left\|\sum_{j=1}^{N} a_j u_j - u\right\|_{H^2} = 0$。证明已有 $\lim_{N\to+\infty}\left\|\sum_{j=1}^{N} a_j u_j - u\right\|_{L^2} = 0$, 再证 $\lim_{N\to+\infty}\left\|\Delta\sum_{j=1}^{N} a_j u_j - \Delta u\right\| = 0$, 因为 $\Delta\sum_{j=1}^{N} a_j u_j = \sum_{j=1}^{N} a_j\Delta u_j = \sum_{j=1}^{N} a_j(-\lambda_j u_j)$, $-\lambda_j a_j = -\lambda_j(u,u_j) = (u, -\lambda_j u_j) = (u,\Delta u_j) = (\Delta u, u_j)$, 由定理 3 知, 在 $L^2(\Omega)$ 中

$$
\Delta\left(\sum_{j=1}^{N} a_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{N} a_j(-\lambda_j u_j) = \sum_{j=1}^{N}(\Delta u, u_j)u_j \to \Delta u
$$

利用二阶椭圆型偏微分方程解的 L^2 估计[3-9], 对 $\forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 成立 $|| u ||_{H^2(\Omega)} \leqslant C(\|\Delta u\| + \|u\|)$, 由于

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sum_{j=1}^{N} a_j u_j - u\right\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \\
&C\left(\left\|\Delta\left(\sum_{j=1}^{N} a_j u_j - u\right)\right\| + \left\|\sum_{j=1}^{N} a_j u_j - u\right\|\right) \to 0
\end{aligned}
$$

故 $\{u_j\}$ 是 $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 中的一组正交基。

参 考 文 献:

[1] Courant R,Hilbert D,著.数学物理方法(Ⅰ)[M].钱敏,郭敦仁,译.北京:科学出版社,1958.

[2] Smoller J.Shock Waves and Reaction-Diffusions[M].Berlin:Springer-Verlag,1983.

[3] Gilbarg D,Trudinger N S,著.二阶椭圆型偏微分方程[M].叶其孝,译.上海:科学技术出版社,1981.

[4] 叶其孝,李正元.反应扩散方程引论[M].北京:科学出版社,1990.

[5] 陈恕行,洪家兴.偏微分方程近代方法[M].上海:复旦大学出版社,1988.

[6] 陆文端.微分方程中的变分方法[M].北京:科学出版社,2003.

[7] 陈祖墀.偏微分方程[M].合肥:中国科学技术大学出

版社,2002.

[8] 张恭庆.变分学讲义[M].北京:高等教育出版社,2011.

[9] 王耀东.偏微分方程的 L^2 理论[M].北京:北京大学出版社,1989.

[10] 张恭庆,林源渠.泛函分析讲义(上册)[M].北京:北京大学出版社,1987.

[11] 丘成桐,孙理察.微分几何讲义[M].北京:高等教育出版社,2004.

[12] 郭柏灵.粘性消去法和差分格式的粘性[M].北京:科学出版社,1993.

[13] 陈国旺.索伯列夫空间导论[M].北京:科学出版社,2013.

[14] 陈国旺,陈翔英.非线性高阶发展方程[M].北京:科学出版社,2017.

[15] 魏光祖,袁忠信,王恩三,等.索伯列夫空间与偏微分方程[M].开封:河南大学出版社,1994.

[16] 曹策问.微分算子的迹[J].数学进展,1989,18(2):170-178.

[17] 唐燕武.Laplace 算子的特征函数的正则性[J].安庆师范学院学报:自然科学版,2000,6(4):24-26.

[18] 吴发恩,曹林芬.任意阶 Laplace 算子的特征值估计[J].中国科学 A 辑:数学,2007,37(5):587-594.

[19] 定光桂.等距线性延拓问题[J].中国科学:数学,2015,45(1):1-8.

[20] 李上达,周振荣.特征函数的梯度估计[J].华中师范大学学报:自然科学版,2015,49(2):182-185.

[21] 黄俊杰,阿拉坦仓,陈阿茹娜.一类无穷维 Hamilton 算子特征函数系的完备性[J].应用数学学报,2008,31(3):457-466.

[22] 冯璐,额布日力吐,阿拉坦仓.波动方程混合边值问题的无穷维 Hamilton 算子辛特征函数系的完备性[J].内蒙古大学学报:自然科学版,2017,48(3):254-258.

Proof Method of the Completeness in 3 Spaces of the Eigenfunction System of Laplace Operator

XING Jiasheng[1,2], *YANG Yichuan*[1,2]

(1. School of Mathematics, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. LMIB of the Ministry of Education, Beijing 100191, China)

Abstract: The existence of the eigenvalue and eigenfunction of the Laplace operator was obtained by means of calculus of variation in consideration of the nature of the laplace operator eigenvalue and eigenfunction under the Dirichlet boundary condition. Sequence of eigenvalues tending to infinity was applied to the proof of the orthogonal complete system nature of the eigenfunction system in $H_0^1(\Omega)$ firstly. The denseness was applied to the proof of the orthonormal system nature of the eigenfunction system in $L^2(\Omega)$ secondly. Finally, the complete system nature of the eigenfunction system in $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ was proved by the L^2 estimation of the linear elliptic partial differential equations of second order. This study provides more insight into the classical knowledge with strict and perfect proof.

Key words: Laplace operator; Dirichlet boundary condition; sequence of eigenvalues; completeness of eigenfunction