第 31 卷第 1 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 31 No. 1
2018 年 2 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Feb. 2018
文章编号:1673-1549(2018)01-0069-06 DOI:10.11863/j.suse.2018.01.12

Holder 连续函数空间的插值空间的不等式

邢家省[1,2], 杨义川[1,2]

(1. 北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191;2. 数学、信息与行为教育部重点实验室, 北京 100191)

摘 要:考虑空间 $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ 的完备性和所嵌入的空间的问题,对 Jensen 不等式给出了直接的证明方法,利用 Jensen 不等式给出了 Holder 连续函数的例子。指出当 Ω 是非凸集时空间 $C^1(\bar{\Omega})$ 不能嵌入空间 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$。给出 $C(\bar{\Omega})$ 和 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 是 Banach 空间证明的具体表述过程,通过建立 Holder 连续函数空间的插值空间的不等式,给出了空间 $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 嵌入的空间的证明;在 Ω 是 R^n 中的有界开集条件下,应用 Arzela – Ascoli定理给出了空间 $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 紧嵌入的空间的证明,对相关经典知识给予了新的改造表述。

关键词:Holder 连续函数空间;插值不等式;嵌入定理;紧嵌入定理

中图分类号:O177.2 **文献标志码**:A

引 言

Holder 连续函数空间是一类重要的函数空间[1-10],在偏微分方程[1-8]和泛函分析[9-21]的研究中得到广泛使用。Holder 连续函数空间的完备性[1-8],嵌入的空间和紧嵌入的空间都得到充分的研究[1-10]。

Holder 连续函数空间的嵌入空间和紧嵌入的空间,在文献[1 – 8]都是分别进行的,没有形成统一的理论方法。本文在文献[1 – 8]的基础上建立了 Holder 连续函数空间的插值空间不等式这一结果,并将这个结果应用于 Holder 连续函数空间的嵌入的空间和紧嵌入的空间,对分散的经典结果给予系统的明确改造,表现学术发展,推进学术认识。

1 Holder 连续函数空间

R^n 表示实 n 维 Euclid 空间, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 R^n 中的一个点,对 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, 定义 $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $(\cdot, \cdot)$ 称为 R^n 中欧氏内积,简称内积。$|x| = \sqrt{(x, x)} = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$, $|\cdot|$ 称为 R^n 上的欧氏范数,简称范数。$|x - y| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{1/2}$。

设 α 是一 n 重指数[1-8], m 是一非负整数, Ω 是 R^n 中的开集。集合 $C(\Omega)$ 是由定义在 Ω 上连续的函数 f 组成[1-8]。集合 $C^m(\Omega)$ 是由定义在 Ω 上连续且具有连续的偏导数 $D^\alpha f(|\alpha| \leqslant m)$ 的函数 f 组成[1-8]。集合 $C(\bar{\Omega})$

收稿日期:收稿日期:2017-09-03
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11271040);北京航空航天大学校级重大教改项目(201403)
作者简介:邢家省(1964-),男,河南泌阳人,副教授,博士,主要从事偏微分方程、微分几何泛函分析方面的研究,(E-mail)xjsh@buaa.edu.cn
杨义川(1970-),男,甘肃天水人,教授,博士,主要从事逻辑代数、序代数、软计算及其应用方面的研究,(E-mail)ycyang@buaa.edu.cn

是由 $C(\Omega)$ 中这样的函数 f 组成,f 在 Ω 上有界且一致连续[1-8]。

能唯一地把在 Ω 上有界且一致连续的函数 f 延拓到 $\bar{\Omega}$ 上,延拓后的函数 $\tilde{f}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上仍保持有界且一致连续。$\tilde{f}$ 仍用 f 表示,可以认为函数 f 在 $\bar{\Omega}$ 上有界且一致连续。集合 $C^m(\bar{\Omega})$ 是由 $C^m(\Omega)$ 中的函数 f 组成,f 本身及其偏导数 $D^\alpha f(|\alpha|\leqslant m)$ 均在 Ω 上有界和一致连续[1-8]。$C^0(\Omega)=C(\Omega)$, $C^0(\bar{\Omega})=C(\bar{\Omega})$。$C_B(\Omega)$ 是由定义在 Ω 上的有界连续函数全体组成。类似地可以定义 $C_B^m(\Omega)$。$C_B^m(\Omega)$ 是 Banach 空间,元素的范数的确定同 $C^m(\bar{\Omega})$ 中元素的范数。$C^m(\Omega)$ 中的函数本身或某些阶的偏导数可以在 Ω 上无界,如 $f(x)=x^{-1}\in C^m(0,1)$,但函数 $f(x)=x^{-1}$ 在 $(0,1)$ 上无界。$C^m(\bar{\Omega})$ 中元素 f 的范数由等式 $\|f\|_{C^m(\bar{\Omega})}=\|f;C^m(\bar{\Omega})\|=\max\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup\limits_{x\in\Omega}|D^\alpha f(x)|$ 确定。可以证明 $C^m(\bar{\Omega})$ 是一完备赋范线性空间,即Banach 空间[1-8]。设 $0<\lambda\leqslant 1$, 集合 $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ 是由 $C^m(\bar{\Omega})$ 中满足下面条件的函数 f 组成:

$$|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|\leqslant K|x-y|^\lambda$$

$$\forall x,y\in\Omega, 0\leqslant|\alpha|\leqslant m$$

这里 K 是常数,它可以依赖于函数 f。$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ 中元素 f 的范数由等式

$$\|f\|_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})}=\|f;C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})\|=\|f;C^m(\bar{\Omega})\|+\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{x,y\in\Omega,x\neq y}\frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

确定。可以证明 $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ 是 Banach 空间[1-8]。

定理1 设正整数 $k\geqslant 2$, 对任意实数 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$, 正实数 $p>q>0$, 则成立 $\left(\sum\limits_{i=1}^k|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^k|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$。

证明 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$, $\|a\|_\infty=\sup\{|a_i|:i=1,2,\cdots,k\}$, 则有 $\|a_i|\leqslant\|a\|_\infty$, $(i=1,2,\cdots,k)$,

$$\sum_{i=1}^k|a_i|^p=\sum_{i=1}^k|a_i|^q|a_i|^{p-q}\leqslant\sum_{i=1}^k|a_i|^q(\|a\|_\infty)^{p-q}=\left(\sum_{i=1}^k|a_i|^q\right)(\|a\|_\infty)^{p-q}$$

于是有 $\left(\sum\limits_{i=1}^k|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant(\|a\|_\infty)^{1-\frac{q}{p}}\left[\left(\sum\limits_{i=1}^k|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{q}{p}}$, 利用 $\|a\|_\infty\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^k|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, 则得成立 $\left(\sum\limits_{i=1}^k|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^k|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$。

定理2 设 $0<p<1$,

(1)对任意实数 $x\geqslant y\geqslant 0$, 成立 $x^p-y^p\leqslant(x-y)^p$;

(2)对任意实数 u,v, 成立

$$|(|u|^p-|v|^p)|\leqslant|(|u|-|v|)|^p\leqslant|u-v|^p$$

证明 对任何 $a_1,a_2\geqslant 0$, 正实数 $0<p<1$, 利用定 1,成立 $a_1+a_2\leqslant(a_1^p+a_2^p)^{\frac{1}{p}}$,从而 $(a_1+a_2)^p\leqslant a_1^p+a_2^p$, 所以可得结果。

例1[3] 设 Ω 是有界开集, $x_0\in\Omega$, 令 $f(x)=|x-x_0|^\lambda, x\in\Omega$, 其中 $0<\lambda\leqslant 1$。由于

$$|f(x)-f(y)|=|(|x-x_0|^\lambda-|y-x_0|^\lambda)|\leqslant$$

$$|(|x-x_0|-|y-x_0|)|^\lambda\leqslant|x-y|^\lambda, \forall x,y\in\Omega$$

所以 $f\in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$。如果 Ω 是凸区域,则有 $C^1(\bar{\Omega})\subset C^{0,1}(\bar{\Omega})$。如果 Ω 不是凸区域,未必有 $C^1(\bar{\Omega})\subset C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, $(0<\lambda\leqslant 1)$。

例2[3] 设 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|y<|x|^{\frac{1}{2}},x^2+y^2<1\}$, 对 $1<\beta<2$, 令

$$u(x,y)=\begin{cases}(\operatorname{sgn}x)y^\beta, & y>0,(x,y)\in\Omega\\ 0, & y\leqslant 0,(x,y)\in\Omega\end{cases}$$

显然

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=0,(x,y)\in\Omega$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\begin{cases}(\operatorname{sgn}x)\beta y^{\beta-1}, & y>0,(x,y)\in\Omega\\ 0, & y\leqslant 0,(x,y)\in\Omega\end{cases}$$

成立 $u\in C^1(\bar{\Omega})$, 对 $\frac{\beta}{2}<\lambda\leqslant 1$, 取 $x>0$, 由于

$$\frac{|u(x,x^{\frac{1}{2}})-u(-x,x^{\frac{1}{2}})|}{|(x,x^{\frac{1}{2}})-(-x,x^{\frac{1}{2}})|^\lambda}=\frac{2x^{\frac{\beta}{2}}}{2^\lambda x^\lambda}=\frac{2}{2^\lambda x^{\lambda-\frac{\beta}{2}}}\to+\infty,(x\to 0^+)$$

所以 $u\notin C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$。

2 $C(\bar{\Omega})$ 和 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 的完备性证明

定理3[6] 设 Ω 是 R^n 中的开集,则 $C(\bar{\Omega})$ 是一个

Banach 空间。

证明[6]　显然 $C(\bar{\Omega})$ 是赋范线性空间，设 $\{f_n\}$ 是 $C(\bar{\Omega})$ 中的任一个基本列，则对 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $m,n > N$ 时，便有

$$\sup_{x\in\Omega}|f_m(x) - f_n(x)| = \|f_m - f_n\|_{C(\bar{\Omega})} < \varepsilon$$

显然，对每一 $x \in \Omega$，有

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \sup_{x\in\Omega}|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

于是 $\{f_n(x)\}$ 是一个基本的数列，存在 $f(x)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，$x \in \Omega$；在 $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$，$x \in \Omega$ 中，令 $m \to \infty$，取极限，得 $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$，即得 $\{f_n(x)\}$ 在 Ω 上一致收敛于 $f(x)$。由

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x)| \leqslant \varepsilon + \sup_{x\in\Omega}|f_{N+1}(x)|$$

可知，$f(x)$ 在 Ω 上有界；再由 $f_{N+1}(x)$ 在 Ω 上一致连续，对上述 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $x,y \in \Omega$ 且 $|x - y| < \delta$ 时，成立 $|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(y)| < \varepsilon$。于是

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(y)| + |f(y) - f_{N+1}(y)| < 3\varepsilon$$

即得 $f(x)$ 在 Ω 上一致连续，所以 $f(x)$ 在 Ω 上有界且一致连续，即 $f \in C(\bar{\Omega})$，且 $\|f - f_n\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup\limits_{x\in\Omega}|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$，从而得到，存在 $f \in C(\bar{\Omega})$，使得 $\{f_n\}$ 在 $C(\bar{\Omega})$ 中收敛于 f，即得 $C(\bar{\Omega})$ 是完备的，故得 $C(\bar{\Omega})$ 是一个 Banach 空间。

定理 3 的结果，在文献[1－8]都有涉及，但给出证明表述的仅在文献[6]中出现。

定理 4[1-8]　设 Ω 是 R^n 中的开集，$0 < \lambda \leqslant 1$，则 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 是一个 Banach 空间。

证明[1-8]　显然 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 是赋范线性空间，设 $\{f_n\}$ 是 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 中的任一个基本列，则对 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $m,n > N$ 时，便有

$$\sup_{x\in\Omega}|f_m(x) - f_n(x)| + \sup_{x,y\in\Omega,x\neq y}\frac{|f_m(x) - f_n(x) - [f_m(y) - f_n(y)]|}{|x - y|^\lambda} = \|f_m - f_n\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} < \varepsilon$$

显然 $\{f_n\}$ 也是 $C(\bar{\Omega})$ 中的一个基本列，由于 $C(\bar{\Omega})$ 是一个 Banach 空间，存在 $f \in C(\bar{\Omega})$，使得 $\{f_n\}$ 在 $C(\bar{\Omega})$ 中收敛于 f。由于 $\{f_n\}$ 在 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 中是有界的，存在常数 $K > 0$，成立

$$\frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|^\lambda} \leqslant \|f_n\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \leqslant K$$

$$\forall x,y \in \Omega, x \neq y, n \in \mathbf{N}^*$$

令 $n \to \infty$，取极限，得

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\lambda} \leqslant K,\ \forall x,y \in \Omega, x \neq y$$

于是 $f \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$。在 $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ 和

$$\frac{|f_m(x) - f_n(x) - [f_m(y) - f_n(y)]|}{|x - y|^\lambda} < \varepsilon$$

中，令 $m \to \infty$，取极限，得

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

$$\frac{|f(x) - f_n(x) - [f(y) - f_n(y)]|}{|x - y|^\lambda} \leqslant \varepsilon$$

$$\forall x,y \in \Omega, x \neq y$$

即得 $\|f - f_n\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \leqslant 2\varepsilon$，故得存在 $f \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$，使得 $\{f_n\}$ 在 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 中收敛于 f，即 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 是完备的，于是 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 是一个 Banach 空间。

3　$C(\bar{\Omega})$ 中的列紧集

定理 5[1-8]　（Arzela－Ascoli 定理）设 Ω 是 R^n 中的有界区域，M 是 $C(\bar{\Omega})$ 中的子集，如果满足

（1）M 是一致有界的，即若存在一个常数 K，使得满足 $\sup\limits_{x\in\Omega}|f(x)| \leqslant K, \forall f \in M$。

（2）M 是等度一致连续的，即若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总能找到实数 $\delta > 0$，当 $x,y \in \Omega$ 且 $|x - y| < \delta$ 时，成立 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall f \in M$，那么从 M 中可以选出一个函数列 $\{f_n\}$ 在 $C(\bar{\Omega})$ 中收敛于 f（即从 M 中可以选出一个函数列 $\{f_n\}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛于 $f, f \in C(\bar{\Omega})$）。

定理 6[13-14]　设 Ω 是 R^n 中的有界区域，对 $C(\bar{\Omega})$ 中的集合 M，则 M 是 $C(\bar{\Omega})$ 中的列紧集当且仅当 M 是一致有界的且是等度一致连续的。

定理 7[13-14] 设 Ω 是 R^n 中的有界凸区域，M 是 $C^1(\bar{\Omega})$ 中的有界子集，则 M 是 $C(\bar{\Omega})$ 中的列紧集。

定理 8[1-8] 设 Ω 是 R^n 中的有界开集，$0<\mu\leqslant 1$，则 $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 紧嵌入 $C(\bar{\Omega})$。

证明[1-8] 由不等式

$$\|f;C^{0,\mu}(\bar{\Omega})\| = \sup_{x\in\Omega}|f(x)| + \sup_{x\in\Omega,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\mu}} \geqslant$$

$$\sup_{x\in\Omega}|f(x)| = \|f;C(\bar{\Omega})\|$$

得到 $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 嵌入 $C(\bar{\Omega})$，设 M 是 $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 中的任一有界集合，易知 M 也是 $C(\bar{\Omega})$ 中的有界集合，并且还成立

$$|f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|^{\mu},\ \forall f\in M, x,y\in\Omega$$

这里常数 K 只依赖于集合 M，与 f 无关，得出 M 是等度一致连续的，于是 M 满足定理 5 的条件，因而在 M 中可选出子序列在 $C(\bar{\Omega})$ 中收敛，结论得证。

定理 9[1-8] 设 Ω 是 R^n 中的有界凸区域，则有 $C^1(\bar{\Omega})$ 紧嵌入 $C(\bar{\Omega})$。

4 Holder 连续函数空间的插值空间不等式

定理 10[1-8] 设 Ω 是 R^N 中的开集，$0<\lambda<\mu\leqslant 1$，则有 $\|f\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \leqslant (1+2^{1-\frac{\lambda}{\mu}})(\|f\|_{C(\bar{\Omega})})^{1-\frac{\lambda}{\mu}}(\|f\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})})^{\frac{\lambda}{\mu}}$，$\forall f\in C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$。

证明 对 $\forall f\in C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$，由

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\lambda}} = \left|\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\mu}}\right|^{\frac{\lambda}{\mu}} \times |f(x)-f(y)|^{1-\frac{\lambda}{\mu}} \leqslant$$

$$(2\|f\|_{C(\bar{\Omega})})^{1-\frac{\lambda}{\mu}}(\|f\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})})^{\frac{\lambda}{\mu}} \leqslant$$

$$2^{1-\frac{\lambda}{\mu}}(\|f\|_{C(\bar{\Omega})})^{1-\frac{\lambda}{\mu}}(\|f\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})})^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\forall x,y\in\Omega, x\neq y$$

得

$$\sup_{x,y\in\Omega,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\lambda}} \leqslant$$

$$2^{1-\frac{\lambda}{\mu}}(\|f\|_{C(\bar{\Omega})})^{1-\frac{\lambda}{\mu}}(\|f\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})})^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

故成立

$$\|f\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \leqslant (1+2^{1-\frac{\lambda}{\mu}})(\|f\|_{C(\bar{\Omega})})^{1-\frac{\lambda}{\mu}}(\|f\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})})^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\forall f\in C^{0,\mu}(\bar{\Omega})。$$

定理 10 的结果表述在文献[1-8]不是明确单独出现的，尽管在文献[1-8]中的定理证明过程中出现了这种估计不等式，但都没有被认识到它的独立表述结果意义。

定理 11[2,4] 设 Ω 是 R^n 中的开集，$0<\lambda<\mu\leqslant 1$，则有

$$\|f\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \leqslant 3^{1-\frac{\lambda}{\mu}}(\|f\|_{C(\bar{\Omega})})^{1-\frac{\lambda}{\mu}}(\|f\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})})^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\forall f\in C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$$

证明[2,4] 设

$$p=\frac{\mu}{\lambda}, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$A_1 = (\|f\|_{C(\bar{\Omega})})^{\frac{1}{p}}$$

$$B_1 = \left(\sup_{x,y\in\Omega,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\mu}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$A_2 = (\|f\|_{C(\bar{\Omega})})^{\frac{1}{q}}$$

$$B_2 = (\sup_{x,y\in\Omega,x\neq y}|f(x)-f(y)|)^{\frac{1}{q}}$$

显然

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\lambda}} = \left|\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\mu}}\right|^{\frac{\lambda}{\mu}} \times$$

$$|f(x)-f(y)|^{1-\frac{\lambda}{\mu}} \leqslant B_1B_2,\ \forall x,y\in\Omega, x\neq y$$

得

$$\sup_{x,y\in\Omega,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\lambda}} \leqslant B_1B_2$$

易知 $A_1^p + B_1^p = \|f\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})}$，$B_2^q \leqslant 2\|f\|_{C(\bar{\Omega})}$，利用 Holder 不等式[1-10]，

$$\|f\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C(\bar{\Omega})} + \sup_{x,y\in\Omega,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\lambda}} \leqslant$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 \leqslant$$

$$(A_1^p+B_1^p)^{\frac{1}{p}}(A_2^q+B_2^q)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$(\|f\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})})^{\frac{\lambda}{\mu}}(3\|f\|_{C(\bar{\Omega})})^{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\|f\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \leqslant 3^{1-\frac{\lambda}{\mu}}(\|f\|_{C(\bar{\Omega})})^{1-\frac{\lambda}{\mu}}(\|f\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})})^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

定理 11 仅出现在文献[2,4]中，虽然文献[2]出现很早，但没有充分认识到定理 11 的深刻有效性，没有利用定理 11 去改进相关结果的证明。这也说明了定理 10 不曾在文献[1,3,5-8]出现的原因。

5 Holder 连续函数空间的嵌入和紧嵌入的证明

定理 12[1-11] 设 Ω 是 R^n 中的开集，$0<\lambda<\mu\leqslant 1$，

则 $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 嵌入 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, 即存在常数 $K>0$, 对任意 $f\in C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$, 成立 $\|f\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})}\leqslant K\|f\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})}$。

证明　利用定理 10 或定理 11 的结果,即可得到。

定理 12 的结果在文献[1-8]中都是给出相同的原始证明过程,这些过程不能导致定理 10 和定理 11 的发现。

定理 13[1-8]　设 Ω 是 R^n 中的有界开集, $0<\lambda<\mu\leqslant 1$, 则 $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 紧嵌入 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$。

证明[1-8]　设 M 是 $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 中的任一有界集,由定理 8 知道,存在函数列 $\{f_n\}\subset M$ 在 $C(\bar{\Omega})$ 中收敛。现在证明 $\{f_n\}$ 在 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 中收敛:利用定理 10 或定理 11 的结果,得到

$$\|f_m-f_n\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})}\leqslant$$
$$K(\|f_m-f_n\|_{C(\bar{\Omega})})^{1-\frac{\lambda}{\mu}}(\|f_m-f_n\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})})^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

利用 $\{f_n\}$ 在 $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 中有界,则有

$$\|f_m-f_n\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})}\leqslant K_2(\|f_m-f_n\|_{C(\bar{\Omega})})^{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

这说明,由 $\{f_n\}$ 是 $C(\bar{\Omega})$ 中的基本序列导出 $\{f_n\}$ 也是 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 中的基本序列,已知 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 是 Banach 空间,因而 $\{f_n(x)\}$ 在 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 中收敛,于是得到 $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 紧嵌入 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$。

定理 13 结果的证明,在文献[1-8]中有,但都没有意识到从中可以单独提炼出定理 10 或定理 11 的结果。在文献[2,4]中出现定理 11,但也没有认识到可以用来证明定理 12 和定理 13。这里给出的明确认识改造过程,建立知识捷径道路,推进学术认识发展。

参 考 文 献:

[1] 李立康,郭毓騊.索伯列夫空间引论[M].上海:上海科学技术出版社,1981.

[2] Adams R A,著.索伯列夫空间[M].叶其孝,王耀东,应隆安,等.译.北京:人民教育出版社,1983.

[3] Gilbarg D,Trudinger N S.Elliptic Partial Differential Equations of Second Order[M].北京:世界图书出版公司北京公司,2001.

[4] Adams R.A,Fournier J F.Sobolev Spaces[M].北京:世界图书出版公司北京公司,2009.

[5] 郭柏灵.粘性消去法和差分格式的粘性[M].北京:科学出版社,1993.

[6] 陈国旺.索伯列夫空间导论[M].北京:科学出版社,2013.

[7] 王元明,徐君祥.索伯列夫空间讲义[M].南京:东南大学出版社,2000.

[8] 陆文端.微分方程中的变分方法[M].北京:科学出版社,2003.

[9] 邢家省,张愿章,崔玉英.一维区域上的 Sobolev 空间的嵌入定理[J].河南科学,2009,27(4):379-383.

[10] 邢家省,李功胜.关于空间 $W_0^{1,N}(\Omega)$ 与 $W^{1,p}(R^N)$ 上嵌入定理的一种证明[J].山东理工大学学报,2009,23(2):36-39.

[11] 邢家省,杨义川,王拥军.函数列的广义积分的极限定理及其应用[J].吉首大学学报:自然科学版,2016,37(6):1-9.

[12] 邢家省,杨义川,王拥军.函数列的黎曼积分的极限定理及其应用[J].四川理工学院学报:自然科学版,2017,30(3):73-78.

[13] 郭金海.奥斯古德与函数论在中国的传播[J].中国科技史杂志,2014,35(1):1-15.

[14] 邢家省,杨义川.函数列一致收敛的奥斯古德定理[J].四川理工学院学报:自然科学版,2017,30(6):83-88.

[15] 李良树,周振荣.度量测度空间上的 Holder 连续函数的积分特征[J].华中师范大学学报:自然科学版,2012,46(4):385-388.

[16] 巴娜,郑列.热传导方程解的部分 Schauder 估计[J].数学物理学报:A 辑,2017,37(2):307-312.

[17] 陆海霞.一类奇异弹性梁方程正解的存在性[J].应用数学,2016,29(3):665-671.

[18] 吴秀兰,李仲庆,高文杰.一类具正初始能量和变指

数源渗流方程解的爆破及爆破时间下界估计[J].应用数学学报,2017,40(3):400-408.
[19] 王见勇.具有β－中点性质的非β－凸集(0 <β< 1) [J].数学的实践与识,2016,46(11):267-271.
[20] 贯超华,冯德兴.分布阻尼下非线性梁光滑解的存在性[J].数学物理学报,2011,31(2):273-288.
[22] 定光桂.等距线性延拓问题[J].中国科学:数学,2015,45(1):1-8.

The Inequality of the Interpolating Space of the Holder Continuous Function Space

XING Jiasheng[1,2], *YANG Yichuan*[1,2]
(1. School of Mathematics, Beihang University, Beijing 100191, China;2. LMIB of the Ministry of Education, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: Considering the completeness of $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ and the problem of embedded space, a direct proof method for Jensen inequality is given and the example of the continuous function of the Holder is given by using it. This paper pointed out that $C^1(\bar{\Omega})$ can not embedded in space $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ when Ω is a non-convex set and the concrete proof is given that $C(\bar{\Omega})$ and $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ are Banach space; By establishing the inequality of interpolating space of the Holder continuous function space, the proof of the space $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ can embedded in is given. Under the condition of Ω is bounded open set in R^n, the Arzela -Ascoli theorem is applied to give the proof of the space which $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ tightly embed. A new and clear description of the relevant classical knowledge and forms a theoretical system is given in this paper.

Key words: Holder continuous function space; interpolation inequality; embedding theorem; compact embedding theorem