第 30 卷第 6 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 30 No. 6
2017 年 12 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Dec. 2017
文章编号:1673-1549(2017)06-0083-06 DOI:10.11863/j.suse.2017.06.15

函数列一致收敛的奥斯古德定理

邢家省[1,2], 杨义川[1,2]

(1. 北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191;2. 数学、信息与行为教育部重点实验室, 北京 100191)

摘 要:研究函数列的一致收敛性的理论方法问题,在有限闭区间上,给出了判断函数列一致收敛的奥斯古德定理和狄尼定理的两种形式,对奥斯古德定理给出了两种证明方法,给出了奥斯古德定理的几个推论,沟通了相关知识的联系,并通过实例说明奥斯古德定理的应用及其理论价值。在开区间或无限区间上,给出了函数列一致收敛的判别定理,并应用于研究含参变量广义积分的一致收敛性,从理论上沟通了函数列一致收敛与参变量广义积分的一致收敛的内在联系,构成一套理论方法体系。

关键词:函数列的一致收敛性;等度一致连续;奥斯古德定理;狄尼定理

中图分类号:O177.2 **文献标志码**:A

函数列的一致收敛性是经典数学分析中的重要理论课题[1-8],具有深刻的学术发现意义,为后继理论发展提供基础,为此,人们进行了持续不断的研究。著名的狄尼定理是判断函数列一致收敛的一个充分条件[1-7],是数学分析中的常用定理。然而判断函数列一致收敛的奥斯古德定理[1,8]在数学分析中一般不作为定理给予列出,没有得到足够的重视,导致人们在出现需要使用的场合,难于找到具体的出处[1,8-10]。其实奥斯古德定理具有重要的理论发展意义,为 Arzela - Ascoli 定理的发现做了准备,Arzela - Ascoli 定理为连续函数空间中的列紧性理论提供了知识基础,是现代数学的一个基本理论结果,具有重要的应用价值[11-13]。

1 函数列一致收敛的奥斯古德定理

设 I 是一个区间,将 I 上的连续函数全体构成的集合记为 $C(I)$。

设 $F \subset C(I)$, 如果存在常数 $M > 0$, 对任何 $f \in F$, 任意 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leqslant M$, 则称函数族 F 在 I 上是一致有界的[1,2,11]。

设 $F \subset C(I)$, 如果对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in I$ 时,便有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 对所有 $f \in F$ 成立,则称函数族 F 在 I 上是等度一致连续的[1,11]。

定理 1[1,8,14] 设函数列 $\{f_n\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则有 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续,且 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上等度一致连续。

定理 1 的证明见文献[1,8,14]。

定理 2[1,8,14] 设在有限闭区间 $[a,b]$ 上的函数列

收稿日期:2017-08-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11271040);北京航空航天大学校级重大教改项目(201403)

作者简介:邢家省(1964-),男,河南泌阳人,副教授,博士,主要从事偏微分方程、微分几何泛函分析方面的研究,(E-mail)xjsh@buaa.edu.cn

杨义川(1970-),男,甘肃天水人,教授,博士,主要从事逻辑代数、序代数、软计算及其应用方面的研究,(E-mail)ycyang@buaa.edu.cn

$\{f_n\}$ 满足条件：$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，且 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上等度一致连续，则有 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

证明 由 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上等度一致连续，得，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_1,x_2\in[a,b]$，且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，便有 $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\varepsilon$，$n=1,2,\cdots$；再利用 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，取极限得 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\varepsilon$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

定理 3[1,8,14] 设在有限闭区间 $[a,b]$ 上的函数列 $\{f_n\}$ 满足条件：$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，且 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上等度一致连续，则有 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

证明 证法 1[15] 设 $\varphi_n(x)=|f_n(x)-f(x)|$，由条件，可知 $\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上等度一致连续。记 $M_n=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\varphi_n(x)$，存在 $x_n\in[a,b]$，使得 $\varphi_n(x_n)=M_n$。根据聚点原理[1-7]，$\{x_n\}$ 的任何子列中存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 及 $x_0\in[a,b]$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=0$，对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 m，当 $n>m$ 时，成立 $\varphi_n(x_0)<\varepsilon$，由于 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上等度一致连续，存在正整数 k_0，且 $n_{k_0}\geqslant m$，当 $k>k_0$ 时，有 $|\varphi_n(x_{n_k})-\varphi_n(x_0)|<\varepsilon$，(对一切正整数 n)。当 $n>m$ 时，有 $\varphi_n(x_{n_k})\leqslant|\varphi_n(x_{n_k})-\varphi_n(x_0)|+\varphi_n(x_0)<2\varepsilon$，于是，当 $k>k_0$ 时，有 $M_{n_k}=\varphi_{n_k}(x_{n_k})<2\varepsilon$，即有 $\lim\limits_{k\to\infty} M_{n_k}=0$。于是得到对 $\{M_n\}$ 的任何子列中都存在子列收敛于 0，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=0$，故得 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

证法 2[1,8,14] 由 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上等度一致连续，得，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_1,x_2\in[a,b]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，便有 $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\varepsilon$，$n=1,2,\cdots$。再利用 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，取极限得 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\varepsilon$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。确定 $\delta>0$，由于 $[a,b]$ 是有限闭区间，存在正整数 m，使得 $m\delta\leqslant b-a<(m+1)\delta$，记 $x_i=a+\left(i+\dfrac{1}{2}\right)\delta$，$(i=0,1,2,\cdots,m)$，显然有限个区间族 $\left[x_i-\dfrac{\delta}{2},x_i+\dfrac{\delta}{2}\right](i=0,1,2,\cdots,m)$ 覆盖着 $[a,b]$。

由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_i)=f(x_i)$，$(i=0,1,2,\cdots,m)$，对上述 $\varepsilon>0$，存在 $N\in N^*$，当 $n>N$ 时，便有 $|f_n(x_i)-f(x_i)|<\varepsilon$。

对任何 $x\in[a,b]$，x 必属于有限个区间族 $\left[x_i-\dfrac{\delta}{2},x_i+\dfrac{\delta}{2}\right](i=0,1,2,\cdots,m)$ 中的某一个，设 $x\in\left[x_k-\dfrac{\delta}{2},x_k+\dfrac{\delta}{2}\right]$，则有 $|x-x_k|\leqslant\dfrac{\delta}{2}<\delta$，从而，有 $|f_n(x)-f_n(x_k)|<\varepsilon$，综合以上结果，得

$$
\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)| &\leqslant |f_n(x)-f_n(x_k)|+\\
&|f_n(x_k)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(x)|<3\varepsilon
\end{aligned}
$$

这就证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

定理 3 就是著名的 Osgood 定理，在文献[9-10]中得到应用。

定理 4[16-19] 设在有限闭区间 $[a,b]$ 上的函数列 $\{f_n\}$ 满足条件：$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，且存在 $[0,b-a]$ 上的连续函数 $F(r)$，$F(0)=0$，使得对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$，成立 $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\leqslant F(|x_1-x_2|)$，$(n=1,2,\cdots)$，则有 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

证明 由条件，可知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上等度一致连续，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)x\in[a,b]$，所以 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

定理 4 中的条件，来源于 Osgood 条件[18-19]。

定理 5[1,16-17] 设在有限闭区间 $[a,b]$ 上的函数列 $\{f_n\}$ 满足条件：$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，且存在常数 $L>0$，$0<\alpha\leqslant1$，使得对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$，成立 $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|^\alpha$，$(n=1,2,\cdots)$，则有 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

证明 由条件，可知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上等度一致连续，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)x\in[a,b]$，所以 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

定理 6[1,16-17] 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，且存在常数 $M>0$，使得任意 $x\in(a,b)$，成立 $|f'_n(x)|\leqslant M$，$(n=1,2,\cdots)$，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

证明　由条件 $|f'_n(x)| \leqslant M$, $(x \in (a,b), n = 1, 2, \cdots)$,利用拉格朗日中值定理[1-7],可知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上等度一致连续,又 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$,所以 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

定理 7[14]　设 (a,b) 是有限开区间, $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上连续, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$,如果 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上等度一致连续,则有 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续,且 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上一致收敛于 $f(x)$。

定理 7 的证明见文献[14],也可以参考定理 3 中证法 2 给出相应的证明过程。

设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$,即使有 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的情况下,尽管 $f_n(x)$ 和 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续,未必有 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$,亦未必有 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上等度一致连续[1-7]。

例 1[1-7]　设 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}, x \in [0,1]$。显然有 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上连续, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$, $x \in [0,1]$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续。尽管 $f_n(x)$ 和 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续,易知 $\beta_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geqslant f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$,所以 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛, $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不是等度一致连续的。

例 1 可以说明文献[14]中的定理 5,推论 2,定理 6,推论 3,定理 7(1)都是错误的,文献[14]中所给条件不够。文献[14]中本身的例子也可以用来说明这几个结论均是不成立的。

定理 8[1,11]　设 $f_n(x)$ 在 (a,b) 上有界且一致连续,如果 $\lim\limits_{m,n\to\infty} \sup\limits_{x\in(a,b)} |f_m(x) - f_n(x)| = 0$,则有 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上一致收敛,其极限函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界且一致连续;且 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上一致有界且等度一致连续。

利用文献[1,11,16-17]中方法可以给出定理 8 的证明。

在无限区间上,奥斯古德定理不再成立。

例 2　设 $\Omega = [0, +\infty)$,

$$f_n(x) = \begin{cases} (x-n)^2(n+1-x)^2, & n \leqslant x \leqslant n+1 \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$n = 1, 2, \cdots$

显然 $\{f_n(x)\}$ 在 $\Omega = [0, +\infty)$ 上一致有界,且等度一致连续, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $x \in \Omega = [0, +\infty)$,但 $\{f_n(x)\}$ 中在 $\Omega = [0, +\infty)$ 上不一致收敛。

定理 6 中的极限函数 $f(x)$ 未必在 $[a,b]$ 上可导。

例 3　设 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$, $x \in [-1,1]$,易知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[-1,1]$ 上满足定理 6 中的条件,显然 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$,但 $f(x) = |x|$ 在 $[-1,1]$ 上不可导。

例 4[1-2]　设函数 f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续,且对任何 $x \in [0,1]$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n) = 0$,证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$。

证明　设 $f_n(x) = f(x+n)$,由题设条件知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上等度一致连续,对每一 $x \in [0,1]$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$,利用定理 3 得, $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0,于是对 $\forall \varepsilon > 0$,存在 N,当 $n > N$ 时,有 $|f(x+n)| = |f_n(x)| < \varepsilon$, $x \in [0,1]$,从而当 $x \geqslant N+1$ 时,有 $|f(x)| < \varepsilon$,即得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,结论得证。

例 4 出现于文献[1-2]中,用的是原始证法,证明过程相当繁琐。可以利用 Osgood 定理给出直接的证明,从具体问题中发现一般性的规律。

设 f 在 $[0, +\infty)$ 上的连续,且对任何 $x \in [0,1]$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n) = 0$,但推不出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$。

例 5[1-2]　设 $f(x) = \dfrac{x\sin\pi x}{1 + x^2\sin^2\pi x}$,显然 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续,且对任何 $x \in [0,1]$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n) = 0$,但不成立 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$。

实事上, $n \in \mathbf{N}^*$,取 $y_n = n + \dfrac{1}{n}$,显然有 $y_n \to +\infty$, $(n \to \infty)$,但是

$$|f(y_n)| = \left| \frac{\left(n + \frac{1}{n}\right)(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}}{1 + \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 \sin^2\frac{\pi}{n}} \right|$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\pi\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)}{1+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2\pi^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)^2} \to \frac{\pi}{1+\pi^2},\ (n\to\infty)$$

所以不成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。容易知道 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续。

例 5 的思想来源于文献[1-2],例 5 中的函数是对文献[1-2]中给出的函数的改正。

2 狄尼定理的两种形式

定理 9[1-7,15-17] 设函数列 $\{f_n\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$,$x\in[a,b]$,若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且对于每一 $x\in[a,b]$,$\{f_n(x)\}$ 是单调数列,则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

证明[15] 设 $\varphi_n(x)=|f_n(x)-f(x)|$,则 $\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且对于每一 $x\in[a,b]$,$\{\varphi_n(x)\}$ 是单调递减的。记 $M_n=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\varphi_n(x)$,则有 $\{M_n\}$ 是单调递减的。存在 $x_n\in[a,b]$,使得 $\varphi_n(x_n)=M_n$,根据聚点原理,存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 及 $x_0\in[a,b]$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=0$,对 $\forall\varepsilon>0$,存在正整数 m,成立 $\varphi_m(x_0)<\varepsilon$,由 $\varphi_m(x)$ 在 x_0 处连续,$\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_m(x_{n_k})=\varphi_m(x_0)$,存在正整数 k_0,且 $n_{k_0}\geqslant m$,当 $k>k_0$ 时,有 $\varphi_m(x_{n_k})<\varepsilon$。当 $n>m$ 时,有 $\varphi_n(x_{n_k})\leqslant\varphi_m(x_{n_k})<\varepsilon$,于是,当 $k>k_0$ 时,有 $M_{n_k}=\varphi_{n_k}(x_{n_k})\leqslant\varphi_m(x_{n_k})<\varepsilon$,即有 $\lim\limits_{k\to\infty}M_{n_k}=0$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=0$。故得 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

定理 9 就是常用的狄尼定理,在文献[1-7,15-17]中给出了另外两种证明方法。

由定理 9 的条件和结果,利用定理 1 可知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上等度一致连续,所以由定理 9 中的条件可推出满足定理 3 的条件,就是奥斯古德定理比狄尼定理广泛。

关于函数项级数和含参变量积分的狄尼定理,在文献[1-7,16-17]中已有陈述,并给出了应用。定理 9 的结果对开区间或无限区间的情形不再成立[1-7,15-17]。

定理 10[16-17] 设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于函数 $f(x)$,如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且对每个 n,$f_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调函数,则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

证明[16-17] 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。对任意 $\varepsilon>0$,存在一个 $\delta>0$,当 $x,y\in[a,b]$,$|x-y|<\delta$ 时,有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。取正整数 J 充分大,使得 $\frac{b-a}{J}<\delta$,记 $x_i=a+i\frac{b-a}{J}$,$(i=0,1,\cdots,J)$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_i)=f(x_i)$,$(i=0,1,\cdots,J)$,对上述 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $|f_n(x_i)-f(x_i)|<\varepsilon$,$(i=0,1,\cdots,J)$。由于 $f_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调函数,所以 $|f_n(x)-f_n(x_i)|\leqslant|f_n(x_{i+1})-f_n(x_i)|$,$x\in[x_i,x_{i+1}]$,$(i=0,1,\cdots,J)$。对任意 $x\in[a,b]$,存在 i,使得 $x\in[x_i,x_{i+1}]$,

$$\begin{aligned}&|f_n(x)-f(x)|\leqslant\\&|f_n(x)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x)|\leqslant\\&|f_n(x_{i+1})-f_n(x_i)|+2\varepsilon\leqslant\\&|f_n(x_{i+1})-f(x_{i+1})|+|f(x_{i+1})-f(x_i)|+\\&|f(x_i)-f_n(x_i)|+2\varepsilon<5\varepsilon\end{aligned}$$

即得 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

定理 10 的结果,可以研究分布函数列的一致收敛性。

奥斯古德定理[1,8,14]和狄尼定理[1-7,14,16-17]的两种形式,构成判断函数列一致收敛的一套完整的理论体系。

3 开区间或无限区间上一些函数列一致收敛的判别定理及应用

定理 11[1,20-22] 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b)$ 上的函数列,满足条件:(1) $\lim\limits_{x\to b^-}f_n(x)=0$,且关于 n 是一致的;(2)对每一 $\delta\in(0,b-a)$,$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b-\delta]$ 上一致收敛于 0。则 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b)$ 上一致收敛于 0。

证明 对任意 $\varepsilon>0$,由于 $\lim\limits_{x\to b^-}f_n(x)=0$ 关于 n 是一致,存在 $\delta\in(0,b-a)$,当 $b-\delta\leqslant x<b$ 时,对一切 n,有 $|f_n(x)|<\varepsilon$。由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b-\delta]$ 上一致收敛于 0,对上述 $\varepsilon>0$,存在 $N\in N^*$,当 $n>N$ 时,对 $x\in$

$[a,b-\delta]$, 都有 $|f_n(x)|<\varepsilon$。综合以上所得,知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b)$ 上一致收敛于0。

利用定理 11 的证明方法,可以得到如下两个结果。

定理 12[1,20-22] 设 $F(A,u)$ 是 $[a,+\infty)\times[u_0,+\infty)$ 上的函数,满足条件:(1) $\lim\limits_{u\to+\infty}F(A,u)=0$, 对 $A\in[a,+\infty)$ 是一致的;(2)对任意 $U>u_0$, 当 $A\to+\infty$ 时, $F(A,u)$ 在 $[u_0,U]$ 上一致收敛于0。则当 $A\to+\infty$ 时, $F(A,u)$ 在 $[u_0,+\infty)$ 上一致收敛于0。

定理 13[1,20-22] 设 $F(A,u)$ 是 $[a,+\infty)\times(u_0,+\infty)$ 上的函数,满足条件:(1) $\lim\limits_{u\to u_0^+}F(A,u)=0$, 对 $A\in[a,+\infty)$ 是一致的;(2)对任意 $U>u_0$, 当 $A\to+\infty$ 时, $F(A,u)$ 在 $[U,+\infty)$ 上一致收敛于0。则当 $A\to+\infty$ 时, $F(A,u)$ 在 $(u_0,+\infty)$ 上一致收敛于0。

例 6[1,2,17] 证明 $\int_0^{+\infty}e^{-u^2(x-u)^2}dx$ 在 $u_0\leqslant u<+\infty$ 上一致收敛,(常数 $u_0>0$)。

证明 设

$$F(A,u)=\int_A^{+\infty}e^{-u^2(x-u)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{u}\int_{u(A-u)}^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y$$

显然 $0<F(A,u)<\dfrac{1}{u}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy$, 于是 $\lim\limits_{u\to+\infty}F(A,u)=0$, 关于 $A>0$ 是一致的;易知对任意 $U>u_0$, $\lim\limits_{A\to+\infty}F(A,u)=0$ 在 $[u_0,U]$ 上是一致的。

利用定理 12,得到 $\lim\limits_{A\to+\infty}F(A,u)=0$ 关于 $u\in[u_0,+\infty)$ 是一致的,即得 $\int_0^{+\infty}e^{-u^2(x-u)^2}dx$ 关于 $u\in[u_0,+\infty)$ 一致收敛。

例 6 在文献[1,2,17]中,用的是原始证法,没有上升为一般性的理论方法。本文发现可以利用一般性的理论结果给出简单的证明,从具体问题中发现一般性的理论。

参考文献:

[1] 裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].北京:高等教育出版社,2002.

[2] 常庚哲,史济怀.数学分析教程(下册)[M].北京:高等教育出版社,2003.

[3] 黄玉民,李成章.数学分析(下册)[M].2 版.北京:科学出版社,2007.

[4] 华罗庚,著.王元,校.高等数学引论(第二册)[M].北京:高等教育出版社,2009.

[5] 陈纪修,於崇华,金路.数学分析(下册)[M].2 版.北京:高等教育出版社,2003.

[6] 菲赫金哥尔茨.微积分学教程(第二卷)[M].8 版.北京:高等教育出版社,2006.

[7] 卓里奇.数学分析(第二卷)[M].4 版.北京:高等教育出版社,2006.

[8] 杨小远,邢家省.工科数学分析习题及题解集[M].北京:机械工业出版社,2010.

[9] 邢家省,朱建设.非齐次弦振动方程的形式级数解的收敛性[J].吉首大学学报,2009,30(5):13-17.

[10] 邢家省,张愿章,郭秀兰.非齐次热传导方程初边值问题的形式级数解的收敛性[J].河南科学,2010,28(1):1-5.

[11] 陈国旺.索伯列夫空间导论[M].北京:科学出版社,2013.

[12] 郭金海.奥斯古德与函数论在中国的传播[J].中国科技史杂志,2014,35(1):1-15.

[13] 邢家省,杨小远,白璐.两无穷区间上积分交换次序充分条件的改进及其应用[J].四川理工学院学报:自然科学版,2016,29(1):87-92.

[14] 徐丽.函数列一致连续和一致收敛及等度连续的关系[J].上海电力学院学报,2007,23(3):284-286.

[15] 叶艺林.狄尼定理的多种证明[J].景德镇高专学报,1998,13(4):30-32.

[16] 匡继昌.实分析与泛函分析(续论)(下册)[M].北京:高等教育出版社,2015.

[17] 汪林.数学分析中的问题研究和反例[M].北京:高等教育出版社,2015.

[18] 徐润,吕玉华.关于 Osgood 条件的进一步讨论[J].沈阳师范大学学报:自然科学版,2005,23(4):347-348.

[19] 孔志宏.一阶微分方程存在唯一性定理的几个注记[J].高等数学研究,2016,19(3):3-6.

[20] 邢家省,杨义川,王拥军.函数列的广义积分的极限定理及其应用[J].吉首大学学报:自然科学版,2016,37(6):1-9.

(下转第 93 页)