第 30 卷第 6 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 30 No. 6
2017 年 12 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Dec. 2017
文章编号:1673-1549(2017)06-0093-05 DOI:10.11863/j.suse.2017.06.17

# 一种计算金融风险在险价值的新方法

乔 霞,蔺富明

(四川理工学院数学与统计学院,四川 自贡 643000)

**摘 要**:如何计算金融风险度量的在险价值(VaR)和预期不足(ES)一直是业界、学术界关心的课题。基于分位数的办法计算在险价值(简称 QVaR)直观易于理解,但也有非常大的缺陷:QVaR 度量只关注下方风险,即只给出一个损失的分位数,并未给出具体损失程度,而且对尾部极端风险不敏感。研究表明预期不足对尾部极端风险非常敏感而且给出了尾部损失的具体值,但预期不足不象在险价值那么易于理解和便于业界使用。针对上述问题,提出了一种基于 2.5 次幂期望分位数计算在险价值的方法(简称 GEVaR),核心是将非对称最小二乘法的 2 次幂改为 2.5 次幂,其定义与传统的期望分位数类似。研究表明一些情形下 GEVaR 对尾部极端风险的敏感性与 ES 相当。

**关键词**:金融风险度量;VaR;ES;k 次幂期望分位数

**中图分类号**:F830 **文献标志码**:A

## 引 言

金融风险度量与管理一直是是金融管理机构和金融企业非常关心的核心问题。本文主要关注金融市场风险。较早的金融风险度量有灵敏度方法、波动性方法等。J. P. Morgan 的风险管理人员于 1994 年提出著名的 VaR(在险价值)方法,即度量处在一定风险下的资产价值,这一价值与一定的概率有关系。由于该方法直观、易于理解和简便实用,在各种度量金融市场风险的方法中脱颖而出。美中不足的是 VaR 不能区分不同风险水平的资产组合。作为 VaR 的有益补充,ES(预期不足)定义为资产超出 VaR 的平均损失大小,它具有次可加性,因此是一致风险度量方法[]。张慧丽[2]比较了两类风险度量方法。Maganelli s 等人[3]将 VaR 和 ES 的计算方法总结为三类:参数方法、非参数方法和半参数方法。参数方法核心是假设了资产收益率的分布,如假设为正态分布或 $t$ 分布。非参数方法直接从数据获得经验分布,用此分布计算 VaR,如著名的历史模拟法。作为半参数方法的代表分位数回归方法用于计算 VaR 得天独厚,但此时计算的 VaR 对极端损失的大小不敏感[4]。Kuan c m 等人[4]提出使用期望分位数和谨慎指数来调整、计算 VaR(简称 EVaR),此时计算的 VaR 可以根据极端风险调整显著性水平来更好度量风险。

现有文献多采用 Expectile 回归模型探讨股票或指数的风险问题,苏辛等人[5]提出了改进的条件自回归 Expectile(CARE)模型,将其运用到基金业绩评价中。

收稿日期:2017-09-17
基金项目:四川理工学院研究生创新基金(y2016026);四川理工学院教材研究专项经费(B11704001)
作者简介:乔 霞(1992-),女,甘肃文县人,硕士生,主要从事金融统计方面的研究,(E-mail)1156784002@qq.com
蔺富明(1980-),男,山西大同人,副教授,博士,主要从事极值理论、统计建摸方面的研究,(E-mail)linfuming20062015@163.com

钟山等人[6]以 Expectile 模型为基础,结合 CAViaR 模型,构建出条件自回归期望分位数模型,并以此计算收益序列的 VaR 和 RS,研究表明模型在 ES 度量方面有着明显的优势。谢尚宇等人[7]扩展了 Kuan c m 等人[4]的条件自回归模型(CARE)使其可以处理具有异方差的数据,即引入 ARCH 效应,提出了 ARCH - Expectile 模型。并应用 Expectile 间接评估 ES 和 VaR 风险大小,提出两步估计法估计参数,分析了股票收益的风险。吕伟伟[8]利用 GARCH 模型计算基于 Expectile 的 VaR 作为输入变量,进而分析各金融子行业的风险溢出效应的大小和方向。刘晓倩等[9]提出了 AR 模型的加权复合 Expectile 回归(WCER)估计,并探讨估计的最优权重,建立大样本性质,将模型应用于恒生指数和标准普尔 500 指数进行实证分析。肖火平[10]采用 Kuan 等[4]的 EVaR 分析行业下端风险的影响因素及大小,并对各行业的风险进行排序和分析说明,同时也表明 Expectile 不仅可以应用于金融界,在其它领域也可使用。Minjo k 等人[11]使用非线性期望分位数回归模型估计条件 ES 和 VaR,并研究了非线性期望分位数回归模型参数估计量的渐近正态性。但 Kuan c m 等人[4]的 Expectile 方法显示其 EVaR 敏感性低于 ES。本文受文献[4]的启发,提出使用 2.5 次幂期望分位数回归计算 VaR,可以看作是 EVaR 方法的推广,称为 GEVaR。随机模拟和对比研究发现,本文的方法对极端风险的敏感性大于 EVaR 方法,几乎与 ES 相同。对喜好用 ES 度量风险的金融风险管理者,GE-VaR 是一个非常好的选择。

## 1 $k$ 次幂期望分位数回归方法概述

### 1.1 基本概念

$k$ 次幂期望分位数回归方法建立在损失函数上,

$$Q_{\tau,k}(r) = \begin{cases} (1-\tau)\,|r|^k, r < 0 \\ \tau\,|r|^k, r \geqslant 0 \end{cases} \quad \tau \in (0,1) \quad (1)$$

$Y$ 是一个随机变量,最小化 $E(Q_{\tau,k}(Y-m))$ 得到最小值点 $m_0$ 为 $Y$ 的 $k$ 次幂期望分位数。$X$ 是另外一个随机向量,$\beta$ 是参数向量,最小化 $E(Q_{\tau,k}(Y-X\beta))$ 得到的 $X\beta_0$ 是 $Y$ 的条件期望分位数。$k=1$, $m_0$ 为分位数,$k=2$, $m_0$ 为期望分位数。

### 1.2 $k$ 次幂期望分位数与分位数之间的关系

当 $Y$ 的分布函数为 $F$,最小化 $E(Q_{\tau,k}(Y-m))$ 得到的 $m_0$ 实际上是 $\tau$ 的函数,当 $\tau$ 取值在 $(0,1)$ 时,容易看出 $m_0$ 是某个分布函数的取值。但此时的分布不再是 $F$。反之,对给定的 $\theta$ 可以找到合适的 $\tau$ 使得 $F$ 的 $\theta$ 分位数与 $\tau-k$ 次幂期望分位数相等。

## 2 VaR 和 ES 方法概述

### 2.1 VaR 方法概述

VaR 的定义为:在正常的市场条件下,在一定展望期($\Delta t$)内某一投资组合在给定置信水平 $\alpha$ 下,遭受的最大损失,满足的数学关系式为 $Prob(\Delta r < -VaR) = 1-\alpha$,其中,$Prob$ 表示概率,$\Delta r = r_{t+\Delta t} - r_0$ 表示组合在未来持有期 $\Delta t$ 内的损失,$r_0$ 表示组合在当前时刻的价值。VaR 方法现在主要用在度量市场风险,当然在信用风险和操作性风险中也可以使用。VaR 方法具有以下 5 个特点:(1)上述公式只有在市场处于正常波动时才有效,若市场出现极端情形时不能准确度量风险,此时一个可选择的办法是当市场出现极端情形时可以适当增加显著性水平使得 VaR 可以更准确地度量风险。(2)VaR 方法把各种市场风险因素统一成一个单一的值,在展望期和置信水平固定的情形下,VaR 值越大组合风险越大,故常利用风险管理者了解各种组合的风险暴露和分配准备金。(3)在市场处于正常波动的状态下,时间跨度很短时,根据市场有效性理论收益率接近正态分布,此时计算 VaR 的公式为 $\sigma N^{-1}(\alpha)$,其中 $\sigma$ 为对应展望期组合收益率的标准差,$N^{-1}(\cdot)$ 为标准正态分布函数的反函数。(4)置信水平和展望期是影响 VaR 值的两个基本参数。关于置信水平和展望期的选择可以参考文献[12-13]。(5)VaR 不能描述风险的分散化特征。

### 2.2 ES 方法概述

ES 的数学定义为:$ES_\alpha(X) = E(-X \mid -X > VaR_\alpha)$,详细的论述可见文献[14-15]。易见 ES 也是置信水平和展望期的函数。ES 方法满足 Artzner 等[1]给出的风险测度应满足的一致性,它是 VaR 方法的重要补充。

## 3　2.5 次幂期望分位数和分位数

### 3.1　两类分位数之间的对应关系

假设随机变量 $X$ 的累积分布函数为 $F(x)$, $X$ 的 $\tau-2.5$ 次幂期望分位数为:

$$F(x)\nu_X(\tau) = \underset{m\in\mathbf{R}}{\operatorname{argmin}} EQ_{\tau,k}(X-m) = E(|I-I(X<m)||X-m|^{2.5}) \tag{2}$$

此处 $\tau\in(0,1)$。非常类似于期望分位数,$\nu(\tau)$ 关于 $\tau$ 单调递增,位置、刻度等变化,即若 $\tilde{X}=cX+d, c>0$, 那么 $\nu_{\tilde{X}}(\tau)=c\nu_X(\tau)+d$。最小化问题(2)的一阶条件为:

$$\tau\int_{v}^{\infty}(x-v)^{1.5}\mathrm{d}F(x) = (1-\tau)\int_{-\infty}^{v}(v-x)^{1.5}\mathrm{d}F(x)$$

直接计算 $\nu(\tau)$ 满足

$$\tau = \frac{\int_{-\infty}^{v}(v-x)^{1.5}\mathrm{d}F(x)}{\int_{-\infty}^{\infty}|v-x|^{1.5}\mathrm{d}F(x)} \tag{3}$$

式(3)右边的分子刚好是随机变量 $X$ 偏离 $\nu(\tau)$ 的偏差在 $X$ 小于 $\nu(\tau)$ 的加权平均,分母为 $X$ 偏离 $\nu(\tau)$ 的偏差加权平均,两者的权重均为 $X$ 的分布。反应出 $\nu(\tau)$ 依赖尾部的平均取值情况和尾部概率,而分位数仅仅依赖于尾部概率。虽然 $\nu(\tau)$ 的反函数 $\nu^{-1}(\cdot)$ 仍是分布函数,但一般情形下与 $F(x)$ 不同,$\nu^{-1}(\cdot)$ 与 $F(x)$ 自变量相同时,函数值之间的对应关系见表 1。

**表 1　不同分布下 $\theta$ 与 $\tau$ 的对应关系**

| $\tau$ | U(−1,1) | N(0,1) | t(30) | t(10) | t(5) | t(3) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1% | 13.60% | 6.20% | 5.80% | 4.70% | 3.30% | 1.60% |
| 3% | 20.00% | 11.90% | 11% | 10% | 7.60% | 4.60% |
| 5% | 23.50% | 15.70% | 14.90% | 13.40% | 10.90% | 6.80% |
| 10% | 29.40% | 22.40% | 21.80% | 20.40% | 17.90% | 12.80% |
| 25% | 39.20% | 35.20% | 34.60% | 33.80% | 31.90% | 28.60% |

### 3.2　2.5 次幂期望分位数、期望分位数及其 ES 对尾事件的敏感性分析

为了方便比较,使用蒙特卡罗随机方法生成数据。数据生成类似于文献[4,16]。数据独立地从一个混合正态分布中抽取,即按概率 $1-P$ 和 $P$ 分别从正态分布 $N(0,1/\sqrt{1-P})$ 和 $N(0,1/\sqrt{P})$ 中抽样。当设定 $P$ 为一个接近于 0 的数时,此时大多数数据来自于 $N(0,1/\sqrt{1-P})$,极少数数据来自于 $N(0,1/\sqrt{P})$。如果将大多数的数据看成是收益率的正常水平,极少数的数据看成是灾难性的事件、尾部事件,这样就可以近似模拟现实的状况。在模拟中,假设 $c\in[-1,-50]$, $P=0.01$, 样本容量为 1000,重复次数为 1000,计算 $\tau=0.05$ 时,2.5 次幂期望分位数、期望分位数及其 ES(基于 $\tau$ 分位数)的值,得到了这些值随 $c$ 变化的速率,如图 1 所示。图 1 中的"diff for expec 2.5","diff for expec 2"和"diff ES"分别表示 2.5 次幂期望分位数、期望分位数及其 ES。由图 1 可见 2.5 次幂期望分位数的变化速率大于期望分位数的变化速率,与 ES 的变化速率相当。而此时的分位数关于 $c$ 的变化速率为 0,未在图 1 上标出。故而使用 2.5 次幂期望分位数或 2.5 次幂期望分位数回归方法可以更敏锐地度量金融风险。

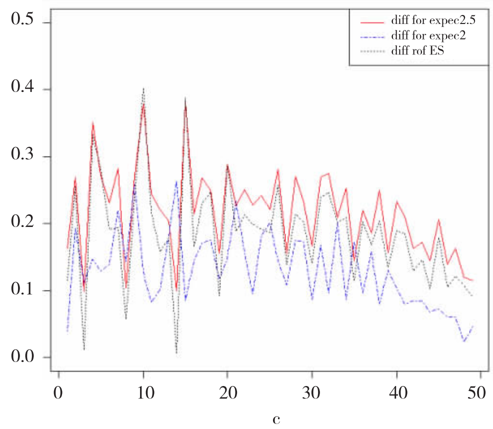


**图 1　2.5 次幂期望分位数、期望分位数和 ES 随 c 的变化速率**

## 4　使用 2.5 次幂期望分位数回归计算 VaR 值

2.5 次幂期望分位数不仅考虑了损失大小,而且其灵敏性与 ES 相当,用它可以更好地度量风险。定义指数为 $\tau$ 的 GEVaR,即基于 2.5 次幂期望分位数的 VaR 为 $\mathrm{GEVaR}(\tau)=-v(\tau)$。关于 $\tau$ 有一个直观的理解,以 $-v(\tau)$ 作为资本金要求,$\int_{-\infty}^{v(\tau)}(v(\tau)-x)^{1.5}\mathrm{d}F(x)$ 衡量了期望边际损失与极端风险有关的潜在成本,而 $\int_{v(\tau)}^{\infty}(x-v(\tau))^{1.5}\mathrm{d}F(x)$ 衡量了归因于过度要求资本金的机会成本。而 $\int_{-\infty}^{\infty}|v-x|^{1.5}\mathrm{d}F(x)$ 正好是两个成本之和,度量

保留准备金 $-v(\tau)$ 的总成本。由(3)式知,$\tau$ 可以作为期望边际损失的相对成本。$-v(\tau)$ 越大,表示更谨慎的资本金要求,导致更小的期望边际损失,更小的 $\tau$。因此 $\tau$ 可以定义为一个谨慎指数。

总之,GEVaR 是一个风险测度,在一个谨慎指数下,可以平衡潜在边际损失和过度要求准备金导致的机会成本。这一点与期货市场清算中的主要任务是一致的[17-18]。根据(3)式,GEVaR 的谨慎指数考虑了尾部概率和尾部收益率的大小,而且其灵敏度与 ES 相当,而常用的 QVaR 仅考虑了尾部概率。基于期望分位数的 EVaR 虽然也同时考虑了尾部概率和尾部收益率的大小,但其灵敏度低于 GEVaR 和 ES。

从 GEVaR 和 QVaR 的关系分析,GEVaR 可看作一个可以根据潜在分布变化的 QVaR。众所周知,实际数据很多情况下只是局部平稳,收益率的分布极有可能由薄尾(厚尾)分布变为厚尾(薄尾)分布。在薄尾(厚尾)分布下对某一指定的概率 $\theta$ 计算 QVaR,如果收益率的分布演变为厚尾(薄尾),那么要用之前薄尾(厚尾)的 QVaR 来预测此时的 QVaR,理想的做法是 $\theta$ 应变小(大)来得到对厚尾(薄尾)收益率的 QVaR。实际分布是未知的,很难实现这样的调整。QVaR 中的概率 $\theta$ 一般是由风险管理者或监管部门设定。当分布发生变化时,QVaR 不能及时的调整 $\theta$ 以度量真实的风险。相反,在给定的 $\tau$ 下,2.5 次幂期望分位数在不同的分布下,对应于不同概率 $\theta$ 的分位数(表 1)。因此,可以在给定的谨慎指数 $\tau$ 下,计算 GEVaR,根据表 1,得出此时分位数的 $\theta$ 的变化,这样数据的变化可以反映出真实风险的变化。

## 5 结论与展望

本文给出了一种新方法计算金融风险在险价值,即基于 2.5 次幂期望分位数的方法。随机模拟研究发现该方法不仅对尾部概率和尾部收益率敏感,而且在某些情形下其敏感性与 ES 相当。基于本文的方法,还可以进一步考虑其它模型,如加风险因子思考 2.5 次幂期望分位数回归,甚至考虑某种动力模型,这将是以后研究的方向。

**参 考 文 献:**


[1] ARTZNER P,DELBAEN F,EBER J M,et al.Coherent measures of risk[J].Mathematical finance,1999,9(3):203-228.

[2] 张慧丽.金融风险度量工具 VaR 和 ES 的比较分析研究[J].新财经:理论版,2010(11):56-57.

[3] MANGANELLI S,ENGLE R F.A comparison of value-at-risk models in finance[R].Frankfurt am main:European Central Bank,2001.

[4] KUAN C M,JIN H Y,YU C H.Assessing value at risk with CARE the conditional autoregressive expectile models[J].Journal of Econometrics,2009,150(2):261-270.

[5] 苏辛,周勇.条件自回归 expectile 模型及其在基金业绩评价中的应用[J].中国管理科学,2013,21(6):22-29.

[6] 钟山,傅强.基于 CARE 模型的金融市场 VaR 和 ES 度量[J].预测,2014,33(3):40-44.

[7] 谢尚宇,姚宏伟,周勇.基于 ARCH-Expectile 方法的 VaR 和 ES 尾部风险测量[J].中国管理科学,2014,22(9):1-9.

[8] 吕伟伟.基于 SDSEVaR 的中国金融体系系统性风险研究[D].成都:西南财经大学,2016.

[9] 刘晓倩,周勇.自回归模型的加权复合 Expectile 回归估计及其应用[J].系统工程理论与实践,2016,36(5):1089-1098.

[10] 肖火平.基于 Expectile 的行业下端风险度量[D].北京:对外经济贸易大学,2016.

[11] MINJO K, SANGYEOL L. Nonlinear expectile regression with application to Value-at-Risk and expected shortfall estimation[J].Computational Statistics and Data Analysis,2016,94:1-9.

[12] 张金清.金融风险管理[M].上海:复旦大学出版社,2009.

[13] 张琳,刘宣会,陈会.部分信息下股价带跳的套期保值问题研究[J].四川理工学院学报:自然科学版,2016,29(2):85-89.

[14] ACERBI C,CLAUDIO N,CARLO S.Expected shortfall as a tool for financial risk management[R].arXiv preprint cond-mat/0102304-(2001).

[15] ACERBI C. Spectral measures of risk: a coherent represe-ntation of subjective risk aversion[J].Journal of Banking & Finance,2002,26(7):1505-1518.

[16] DUFFIE D,JUN P.An overview of value at risk[J]. The Journal of derivatives,1997,4(3):7-49.

[17] BAER H L,FRANCE V G,MOSER J T.Opportunity cost and prudentiality: An analysis of futures clearinghouse behavior [R]. New York: The World Bank Policy Research Department,1994.

[18] BOOTH G G,BROUSSARD J P,MARTIKAINEN T, et al.Prudent margin levels in the Finnish stock index futures market[J].Management Science,1997,43(3):1177-1188.

## A New Method to Calculate VaR of Financial Risk

*QIAO Xia*, *LIN Fuming*

(School of Mathematics and Statistics, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

**Abstract**: How to calculate the value-at-risk (VaR) and expected shortfall (ES) in financial risk measurement has always been an interesting issue for people in academia and industry. Calculation of value at risk based on quantile methods (hereinafter referred to as QVaR) is intuitive and easy to understand, while there is a very big flaw: QVaR only focuses on downside risk, which provided a quantile of the loss, but did not give a loss rate; QVaR is also not sensitive to the tail extreme risk. Some studies showed that ES is sensitive to the tail extreme risk and gives the specific value of the tail loss, but ES is not as easy to understand as VaR and does not facilitate the industry use. According to the above problem, a method for calculating VaR based on 2.5-th power Expectiles (hereinafter referred to as GEVaR) has been put forward. Replacing twice power with 2.5 times power in the asymmetric least squares, its definition is similar to that of existing expectile. The random simulation study shows that GEVaR is as sensitive to tail extreme risk as ES in some cases.

**Key words**: financial risk measurement; VaR; ES; k-th power expectile