

# 涉及高阶导数分担值的亚纯函数正规族

吕凤姣<sup>1</sup>, 刘芝秀<sup>2</sup>

(1. 黄河科技学院信息工程学院, 郑州 450063; 2. 南昌工程学院理学院, 南昌 330099)

**摘要:**正规族理论的发展经历了利用 Nevanlinna 值分布理论和 L. Zalcman 引理简化许多通过大量消去原始值而得到正规族证明的过程,同时也建立了一系列新的正规族。把亚纯函数正规族与分担值或分担集合结合起来考虑是亚纯函数正规族理论研究的一个重要课题。目前正规族的相关理论在复动力系统、复微分方程、模分布和整函数唯一性等方面都有着重要的应用。文章主要探讨了亚纯函数的值分布理论,利用 L. Zalcman 引理研究了一类涉及高阶导数分担值的亚纯函数族的正规性问题,推广并改进了已有的结果。主要结果为:设  $F$  是区域  $D$  上的一亚纯函数族,  $k$  为正整数,  $a$  为非零有穷复数,若对任意的  $f(z) \in F$ , 有  $f(z) - a$  的零点重级至少为  $k + 1$ , 且  $f(z), f^{(k)}(z)$  与  $f^{(k+1)}(z)$  IM 分担  $a$ , 则  $F$  在  $D$  上正规。

**关键词:**亚纯函数;高阶导数;分担值;正规族

**中图分类号:**O174.52

**文献标志码:**A

## 引言

设  $f(z)$  为开平面上非常数的亚纯函数,采用值分布论中的相关记号<sup>[1-2]</sup>,在此给出相关的定义。

设  $D$  为复平面  $C$  上的区域,  $F$  为定义在区域  $D$  内一族亚纯函数,称  $F$  在区域  $D$  上正规,是指亚纯函数族  $F$  中每一个函数序列  $\{f_n(z)\} (n = 1, 2, \dots)$  均可以选出一个子序列  $\{f_{n_k}(z)\} (k = 1, 2, \dots)$  在区域  $D$  上按球面距离内闭一致收敛于一个亚纯函数或者恒为无穷。

称  $F$  在区域  $D$  上一点  $z_0$  正规是指,  $F$  在  $z_0$  的某个领域内正规。可知,  $F$  在区域  $D$  上正规等价于  $F$  在区域  $D$  上每一点都正规。

设  $f(z)$  与  $g(z)$  为平面区域  $D$  上两个非常数的亚纯

函数,  $a$  为一复数,记  $\bar{E}_f(a) = \{z \in D: f(z) = a\}$ , 称  $f$  与  $g$  为 IM 分担  $a$ , 是指  $f - a$  与  $f(z), g(z)$  的零点相同, 即  $\bar{E}_f(a) = \bar{E}_g(a)$ 。

设  $f(z), g(z)$  为区域  $D$  上的两个亚纯函数,对复数  $a \in C$ , 若  $f(z) - a$  的零点为  $z_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 如果  $z_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  也是  $g(z) - a$  的零点(不计重数), 则称单向分担  $a$ , 记为  $f(z) = a \Rightarrow g(z) = a$ 。

把亚纯函数正规族与分担值或分担集合结合起来考虑是由 W. schwick 在 1992 年首先开始研究,之后国内外许多学者都对这方面进行了深入的研究,其成果有:

**定理 1**<sup>[3]</sup> 设  $F = \{f(z)\}$  是单位圆盘  $\Delta$  上的亚纯函数族,  $a_1, a_2, a_3$  是三个不同的复数,如果对每个  $f \in F, f$

收稿日期:2017-07-12

基金项目:国家自然科学基金项目(U1304102);郑州市科技局基金项目(20141375);南昌工程学院青年基金项目(2014KJ025)

作者简介:吕凤姣(1983-),女,河南商丘人,讲师,主要从事复分析方面的研究,(E-mail)lvfengjiao\_2008@163.com

与  $f'$  同时分担值  $a_1, a_2, a_3$ , 则  $F$  在  $\Delta$  上正规。

**定理 2**<sup>[4]</sup> 设  $F$  是  $D$  上的一亚纯函数族,  $a$  和  $b$  是两个不同的复数, 如果对任一  $f \in F, f(z)$  与  $f'(z)$  在  $D$  内 IM 分担  $a, b$ , 则  $F$  在  $D$  内正规。

**定理 3**<sup>[5]</sup> 设  $F$  是区域  $D$  上的解析函数族,  $a$  和  $b$  是两个相互判别的非零有穷复数, 如果对  $\forall f \in F$ , 有  $f(z) = a \Leftrightarrow f'(z) = a, f'(z) = b \Leftrightarrow f''(z) = b$ , 那么  $F$  在  $D$  内正规。

文献[5]在定理3的后面, 提出一个问题: 该定理对亚纯函数族是否成立?

2013年, 文献[6]将解析函数族推广为亚纯函数族, 并将  $f'$  推广为  $f^{(k)}$ , 得到了如下两个结论。

**定理 4** 设  $F$  是区域  $D$  上的亚纯函数族, 且  $a$  和  $b$  是两个相互判别的非零有穷复数, 如果对  $\forall f \in F, f(z)$  的零点重级至少为 2, 且  $f(z) = a \Leftrightarrow f'(z) = a, f'(z) = b \Leftrightarrow f''(z) = b$ , 那么  $F$  正规。

**定理 5** 设  $F$  是区域  $D$  上的亚纯函数族, 且  $a$  和  $b$  是两个相互判别的非零有穷复数,  $k$  是一个正整数。如果对  $\forall f \in F, f(z)$  的零点重级至少为  $k+1$ , 且  $f(z) = a \Leftrightarrow f^{(k)}(z) = a, f^{(k)}(z) = b \Leftrightarrow f^{(k+1)}(z) = b$ , 那么  $F$  在  $D$  内正规。

但是, 在上述定理中有两个分担值, 能否把  $f'$  推广为  $f^{(k)}$  的同时, 将分担值的个数减少为一个呢? 本文证明了下述定理。

**定理 6** 设  $F$  是区域  $D$  上的一亚纯函数族,  $k$  为正整数,  $a$  为非零有穷复数, 若对任意的  $f(z) \in F$ , 有  $f(z) - a$  的零点重级至少为  $k+1$ , 且  $f(z), f^{(k)}(z)$  与  $f^{(k+1)}(z)$  IM 分担  $a$ , 则  $F$  在  $D$  上正规。

文献[7-8]举例说明了定理中的条件“函数的零点重级至少为  $k+1$ ”是必须的, 此例也说明了定理6中的条件“ $f(z) - a$  的零点重级至少为  $k+1$ ”是必须的。

### 1 引理

**引理 1**<sup>[9]</sup> (Zalcman 引理) 设  $k$  为正整数,  $F$  是单位圆盘  $\Delta$  上的亚纯函数族,  $f$  的零点重级均  $\geq k$ , 极点重级均  $\geq j$ , 那么  $F$  在  $\Delta$  上不正规的充要条件是: 对  $\forall \alpha \in (-j, k)$ , 存在函数列  $f_n \in F$ , 点列  $z_n \in \Delta$ , 正数列  $\rho_n \rightarrow 0$ , 使得函数列

$$g_n(\zeta) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^\alpha} \rightarrow g(\zeta)$$

在复平面上按球距内闭一致地成立。

这里  $g(\zeta)$  为复平面上的一个亚纯函数, 其零点(极点)重级均  $\geq k(j)$ , 且  $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = 1$ 。

**注** 这是 Zalcman 引理的推广, 亦称为 Zalcman 引理, 其中, 当  $k=1, j=1, \alpha=0$  时是 Zalcman 最先的结果。上面的形式是经庞学诚<sup>[10]</sup>, Schwick<sup>[11]</sup>, 陈怀惠和顾永兴<sup>[12]</sup> 推广而得到的。

本文常用的 Zalcman 引理是庞学诚和 Zalcman 对上面的结果所做的进一步的推广。

**引理 2**<sup>[13]</sup> (Pang - Zalcman 引理) 设  $k$  为正整数,  $F$  是单位圆盘  $\Delta$  上的亚纯函数族,  $f$  的零点重级至少为  $k$ , 假设存在  $A \geq 1$ , 使得当  $f(z) = 0$  时, 有  $|f^{(k)}(z)| \leq A$  对  $\forall f \in F$  都成立。如果  $F$  在单位圆内不正规, 则对  $0 \leq \alpha \leq k$ , 存在正数  $r, 0 < r < 1$ ; 复数列  $z_n, |z_n| < r$ ; 函数列  $f_n \in F$ ; 正数列  $\rho_n \rightarrow 0$ ; 使得

$$g_n(\zeta) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^\alpha} \rightarrow g(\zeta)$$

在复平面上按球距内闭一致地成立。这里  $g(\zeta)$  为复平面上的一个非常数亚纯函数, 其零点重级至少为  $k$ , 且  $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = kA + 1$ 。特别地,  $g(\zeta)$  的级至多为 2。

**引理 3**<sup>[14]</sup> 设函数序列  $\{f_n(z)\}$  在区域  $D$  内解析, 并且在  $D$  内闭一致收敛到一个不恒为零的函数,  $\gamma$  是  $D$  内可求长的闭曲线, 其内部属于  $D$ , 且不经过  $f(z)$  的零点, 则存在正整数  $N$ , 使得当  $n \geq N$  时, 在  $\gamma$  内部,  $f_n(z)$  和  $f(z)$  的零点个数是相同的。

**引理 4**<sup>[15-16]</sup> (Hayman 不等式) 设  $f(z)$  是一个亚纯函数,  $a$  为非零复数,  $k$  为正整数。若  $f(z) \neq 0, f^{(k)}(z) \neq a$ , 则  $f(z)$  是一个常数。

### 2 定理 6 的证明

**证明** 假设  $F$  在  $D$  上不正规, 不失一般性, 由引理 2 得:

$$g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi) - a}{\rho_n^k} \rightarrow g(\xi)$$

按球面距离内闭一致收敛, 这里  $g(\xi)$  是复平面  $C$  上的非常数亚纯函数, 且满足  $g^{(k)}(\xi) \leq g^{(k)}(0) =$

$k(|a| + 1) + 1$ 。

证明  $g^{(k)}(\xi) \neq a, g(\xi) \neq 0$ 。先证  $g^{(k)}(\xi) \neq a$ 。

假设存在  $\xi_0 \in C$  使得  $g^{(k)}(\xi_0) = a$ 。显然  $g^{(k)}(\xi)$  不恒等于  $a$ , 否则  $g(\xi)$  为一个  $k$  次多项式, 这与  $g(\xi)$  的零点重级至少为  $k + 1$  矛盾。故  $g^{(k)}(\xi)$  不恒等于  $a$ 。由 Hurwitz 定理可得: 存在  $g_n(\xi)$  和点列  $\xi_n \rightarrow \xi_0$ , 使得当  $n$  充分大时, 有  $g_n^{(k)}(\xi_n) = a$ 。由

$$g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^k}$$

可得  $g_n^{(k)}(\xi_n) = f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n)$ 。所以,  $f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n) = a$ 。

根据定理条件  $f^{(k)}(z)$  和  $f^{(k+1)}(z)$  IM 分担  $a$ , 得  $f_n^{(k+1)}(z_n + \rho_n \xi_n) = a$ 。所以

$$g^{(k+1)}(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{(k+1)}(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n f_n^{(k+1)}(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$$

所以  $\xi_0$  是  $g^{(k)}(\xi)$  的  $a$ -值点, 是重级的。

假定  $\xi_0$  是  $g^{(k)}(\xi)$  的  $l$  重  $a$ -值点 ( $l \geq 2$ ), 则  $g^{(k+l)}(\xi_0) \neq 0$ , 从而存在  $\delta > 0$ , 当  $|\xi - \xi_0| < \delta$  时, 有  $g^{(k+l)}(\xi) \neq 0$  (1)

另一方面, 由  $\xi_0$  是  $g^{(k)}(\xi)$  的  $l$  重  $a$ -值点 ( $l \geq 2$ ), 根据 Rouché 定理知: 当  $n$  充分大时,  $g_n^{(k)}(\xi)$  在  $|\xi - \xi_0| < \frac{\delta}{2}$  上有  $l$  个  $a$ -值点  $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \dots, \xi_{n_l}$ , 故  $f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_{n_i}) = a$ , 因为  $f^{(k)}(z)$  和  $f^{(k+1)}(z)$  IM 分担  $a$ , 所以

$$g_n^{(k+1)}(\xi_{n_i}) = \rho_n f_n^{(k+1)}(z_n + \rho_n \xi_{n_i}) = \rho_n a \neq 0,$$

所以这  $l$  个  $a$ -值点均是单级的。即当  $i \neq j$  时,  $\xi_{n_i} \neq \xi_{n_j}$ 。所以  $g^{(k+l)}(\xi_0) = 0$ , 这与式(1)矛盾。

因此  $g^{(k)}(\xi) \neq a$  得证。

再证  $g(\xi) \neq 0$ 。

假设存在  $\xi_0$ , 使  $g(\xi_0) = 0$ 。由 Hurwitz 定理, 存在  $\xi_n, \xi_n \rightarrow \xi_0$ , 当  $n$  充分大时, 有

$$g_n(\xi_n) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi_n) - a}{\rho_n^k} = 0$$

所以  $f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = a$ 。因为  $f(z)$  和  $f^{(k)}(z)$  IM 分担  $a$ , 所以  $g_n^{(k)}(\xi_n) = f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n) = a$ 。所以  $g^{(k)}(\xi_0) = a$ , 这与  $g^{(k)}(\xi) \neq a$  矛盾, 故  $g(\xi) \neq 0$  成立。

根据引理 4 得,  $g(\xi)$  是一个常数。这与假设相矛

盾。从而定理 6 得证。

目前,正规族的相关理论在复动力系统、复微分方程、模分布和整函数唯一性等方面都有着广泛的应用。另外,将正规族理论应用到亚纯函数唯一性的研究中,已取得了一些很好的结果。

参考文献:

[1] 杨乐.值分布论及其新研究[M].北京:科学出版社,1982.

[2] LIU X J,LI S H,PANG X C.A normal criterion about two families of meromorphic functions concerning shared values [J]. Acta Mathematica Sinica, English Series,2013(1):151-158.

[3] SCHWICK W.Sharing values and normality[J].Arch Math,1992,59:50-54.

[4] PANG X,LAWRENCE Z. Normality and shared values[J].Arkiv for Matematik,2000,38:171-182.

[5] 顾永兴,庞学诚,方明亮.正规族理论及其应用[M].北京:科学出版社,2007.

[6] 段曦盛,谢莉.分担值与亚纯函数的正规性[J].数学物理学报,2013,33A(2):242-245.

[7] ZHANG G M,PANG X C,ZALCMAN L.Normal families and omitted functions II[J].Bull London Math Soc,2009,41:63-71.

[8] 王雪琴.亚纯函数的分担值与正规族[J].数学物理学报,2014,34A(4):1008-1013.

[9] ZALCMAN L.A heuristic principle in complex function theory[J].Ame Math Mont,1975(82):813-817.

[10] PANG X.Blochs principle and normal criterion[J].Sci China Ser A,1989(32):782-791.

[11] SCHWICK W.Normality Crietion for families of meromorphic functions[J].Anal Math,1989,52:241-289.

[12] 陈怀惠,顾永兴.Marty 定则的改进及应用[J].中国科学 A 辑,1993,23(2):123-129.

[13] 庞学诚.亚纯函数的正规族与正规函数[J].数学年刊 A 辑,2000(5):601-604.

[14] 方企勤.复变函数教程[M].北京:北京大学出版社,

1996.

ics,1959,70:9-42.

[15] HAYMAN W K. Picard Value of Meromorphic Functions And Their Derivatives[J]. Annals of Mathemat-

[16] LI S, GAO Z. Results on a question of Zhang and Yang [J]. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2012, 32: 717-723.

## Normal Families of Meromorphic Functions Involving Higher Derivative Sharing Values

LV Fengjiao<sup>1</sup>, LIU Zhixiu<sup>2</sup>

(1. College of Information Engineering, Huanghe Science and Technology College, Zhengzhou 450063, China;

2. College of Science, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China)

**Abstract:** The development of the normal family theory has undergone the process of using Nevanlinna value distribution theory and L. Zalcman lemma to simplify many formal rules proving that large numbers of original values are eliminated. A series of new normal rules are also established. It is an important subject for the study of the normal family theory of meromorphic functions to combine the normal families of meromorphic functions with the shared values or the shared set. At present, the theory of normal families have important applications in complex dynamical systems, complex differential equations, module distribution and the uniqueness of entire functions. The value distribution theory of meromorphic functions is mainly discussed, and the normality of meromorphic functions related to higher order derivative sharing values is studied by using the L. Zalcman lemma, which improved the existing results. Main results are as follows: Let  $F$  is families of meromorphic functions on  $D$ . Let  $k$  is a positive integer and  $a$  is non-zero finite complex number. If for every  $f \in F$ , zero magnitude of  $f(z) - a$  of at least  $k + 1$ , and  $f(z)$ ,  $f^{(k)}(z)$  and  $f^{(k+1)}(z)$  share  $a$  with IM, then  $F$  is normal on  $D$ .

**Key words:** meromorphic function; higher derivative; shared values; normal family