

# 再论 Devaney 混沌的随机性质

张新敏

(西南石油大学理学院,四川 成都 610500)

**摘要:**拓扑动力系统相关动力性质(如弱混合、拓扑弱混合、敏感性)之间的关系一直是动力系统研究的主要问题。证明利用相关函数定义的弱混合拓扑动力系统必为拓扑弱混合。以此为基础,得到的系统是 multi-敏感的和初值敏感依赖的。从而改进了相关文献的主要结果。

**关键词:**弱混合;拓扑弱混合;multi-敏感

**中图分类号:**O189.1

**文献标志码:**A

## 引言

贯穿全文,记  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $Z^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。设  $(X, d)$  为非平凡的紧致度量空间,映射  $f: X \rightarrow X$  连续,则称  $(X, f)$  为一动力系统。对动力系统混沌行为的数学研究始于 Li T Y 和 Yorke J A<sup>[1]</sup>,即后来为大家所熟知的 Li-Yorke 混沌。简而言之,混沌是指系统在沿着时间维度演变的过程中,其微观个体的状态相对于人们预测能力而言的不确定性;它是系统复杂性的重要量度。基于学者们对于复杂性的不同理解,各种各样的混沌定义层出不穷,如 Li-Yorke 混沌、Devaney 混沌、稠混沌、全局混沌、分布混沌、Li-Yorke 敏感。其中,比较有影响的是 Devaney 混沌。

混沌另外一个显著的特征是对初值的敏感依赖性。称动力系统  $(X, f)$  是初值敏感依赖的,如果存在  $\varepsilon > 0$ ,使得对任意  $x \in X$  及任意  $\delta > 0$ ,存在  $y \in B(x, \delta) := \{y \in X: d(x, y) < \delta\}$  及  $n \in Z^+$ ,满足  $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ 。

**定义 1**<sup>[2]</sup> 称动力系统  $(X, f)$  是 Devaney 混沌的,如果以下条件得到满足:

(1)  $(X, f)$  是拓扑传递的,即对任意非空开子集  $U, V \subset X$ ,存在  $n \in Z^+$ ,使得  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ;

(2)  $f$  的周期点在  $X$  中稠密;

(3)  $(X, f)$  是初值敏感依赖的。

值得注意的是,Banks 等<sup>[3]</sup>证明了周期点稠密的拓扑传递系统是初值敏感依赖的。文献[4]得到了几乎周期点稠密的拓扑传递系统是初值敏感依赖的。后来,Moothathu<sup>[5]</sup>引入了更广义的敏感性——syndetic-敏感、cofinite-敏感和 multi-敏感。同时证明了非极小的 syndetic-传递系统是 syndetic-敏感的,并且对于 syndetic-传递系统,初值敏感依赖蕴含 syndetic-敏感。近来,吴新星等<sup>[6]</sup>得到了乘积系统是 multi-敏感的当且仅当存在某个因子系统 multi-敏感的。

集合  $A = \{a_1 < a_2 < \dots\} \subset Z^+$  是 syndetic 的,如果它具有有界间距,即存在  $L > 0$ ,使得对任意  $i \in N$ ,  $a_{i+1} - a_i \leq L$ 。全体 syndetic 集记为  $F_s$ 。

集合  $A \subset Z^+$  是 thick 的,如果它包含任意长的整数段,即对任意  $n \in N$ ,存在  $a_n \in A$ ,使得  $\{a_n, a_n + 1, \dots, a_n + n\} \subset A$ 。全体 thick 集记为  $F_t$ 。

对任意  $U \subset X$  及任意  $\delta > 0$ ,定义

$$N_f(U, \delta) = \{n \in Z^+ : \text{diam}(f^n(U)) > \delta\}$$

**定义 2**<sup>[5]</sup> 称动力系统  $(X, f)$  是

(1) syndetic-敏感的,如果存在  $\delta > 0$ ,使得  $N_f(U, \delta) \in F_s$ 。

(2) cofinite-敏感的,如果存在  $\delta > 0$ ,使得  $N_f(U,$

收稿日期:2017-04-11

基金项目:国家自然科学基金(11601449);四川省教育厅科学研究基金(14ZB007)

作者简介:张新敏(1988-),女,重庆荣昌人,讲师,硕士,主要从事拓扑动力系统方面的研究,(E-mail) zhangxinmin1995@163.com

$\delta$ ) 为有限余的。

(3) multi - 敏感的, 如果存在  $\delta > 0$ , 使得对任意  $n \in \mathbb{N}$  及任意  $n$  个非空开子集  $U_1, \dots, U_n \subset X$ , 恒有  $\bigcap_{i=1}^n N_f(U_i, \delta) \neq \emptyset$ 。

### 1 预备知识

如果  $U, V \subset X$ , 定义回复时间集为

$$N(U, V) = \{n \in \mathbf{Z}^+ : f^n(U) \cap V \neq \emptyset\} = \{n \in \mathbf{Z}^+ : f^{-n}(V) \cap U \neq \emptyset\}$$

如果乘积系统  $(X \times X, f \times f)$  是拓扑传递的, 则称动力系统  $(X, f)$  是拓扑弱混合的。

下面命题给出了拓扑弱混合的若干等价刻画:

**引理 1**<sup>[7]</sup> 设  $(X, f)$  为动力系统, 则以下命题等价:

- (1)  $(X, f)$  是弱混合的;
- (2) 对任意非空开子集  $U, V \subset X$ ,  $N(U, U) \cap N(U, V) \neq \emptyset$ ;

(3) 对任意非空开子集  $U, V \subset X$ ,  $N(U, U) \cap N(V, U) \neq \emptyset$ ;

(4) 对任意非空开子集  $U, V \subset X$ ,  $N(U, V)$  为 thick 集;

(5) 对任意  $n \geq 2$ ,  $(X^n, f^{(n)})$  是拓扑传递的, 其中  $f^{(n)} = \underbrace{f \times \dots \times f}_n$ 。

设  $\mu$  为  $(X, d)$  上的 Borel - 概率测度, 满足  $\text{supp}(\mu) = X$ , 其中  $\text{supp}(\mu)$  表示测度  $\mu$  的支撑。对于定义在  $X$  上的连续函数  $\varphi, \psi$ , 定义它们的相关函数为:

$$C_{\varphi, \psi}(n) = \int_X (\varphi \circ f^n) \psi d\mu - \int_X \varphi d\mu \int_X \psi d\mu。$$

**定义 3**<sup>[8]</sup> 对定义在  $X$  上的任意连续函数  $\varphi, \psi$ , 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{\varphi, \psi}(n) = 0$ , 则称动力系统  $(X, f)$  是强混合的;

如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} C_{\varphi, \psi}(i) = 0$ , 则称  $(X, f)$  是弱混合的。

Xu Z J 等<sup>[8]</sup> 于 2004 年证明了强混合的动力系统必为拓扑传递和初值敏感依赖的。近来, 王涛和贾诺<sup>[9]</sup> 改进了该结果, 得到弱混合的动力系统是拓扑传递的; 如果附加周期点稠密性, 则该系统必为初值敏感依赖的。吴新星和朱培勇<sup>[10-11]</sup> 系统研究了连续区间映射的敏感依赖性。冯汉等<sup>[12-13]</sup> 研究了动力系统的一些混沌性质及其应用。近来, 李瑞佳和朱培勇<sup>[14]</sup> 得到了强传递集的一些基本性质。本文以文献[8-9]为基础, 进一步证明了弱混合的动力系统是拓扑弱混合和 multi - 敏感的。从而改进了文献[8-9]的主要结论。同时, 该结果更加深入地阐述了弱混合和拓扑弱混合之间的联系。

### 2 主要结果

**定理 1** 如果动力系统  $(X, f)$  是弱混合的, 则  $(X, f)$  是拓扑弱混合的。

**证明** 任取  $X$  的非空开子集  $U, V$ , 同时令  $\varepsilon = \mu(U)\mu(V)$ 。由测度  $\mu$  的正则性(文献[15]定理 6.1) 知, 存在非空闭子集  $A \subset U, B \subset V$ , 使得  $\mu(A)\mu(B) > 7\varepsilon/8$ 。同时注意到  $X$  为正规空间, 由 Urysohn - 引理得存在连续函数  $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$  和  $\psi: X \rightarrow [0, 1]$ , 使得如下条件成立

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus U \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \in X \setminus V \end{cases}$$

由于  $(X, f)$  是弱混合的, 所以

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_X (\varphi \circ f^i) \psi d\mu - \int_X \varphi d\mu \int_X \psi d\mu \right| = 0$ 。由文献[10], 定理 2.1 可得, 存在密度为 1 的集合  $P \subset \mathbf{Z}^+$ , 使得对任意  $n \in P$ ,

$$\left| \int_X (\varphi \circ f^n) \psi d\mu - \int_X \varphi d\mu \int_X \psi d\mu \right| > \frac{\varepsilon}{8}$$

因此

$$\int_X (\varphi \circ f^n) \psi d\mu > \int_X \varphi d\mu \int_X \psi d\mu - \frac{\varepsilon}{8} \geq$$

$$\mu(A)\mu(B) - \frac{\varepsilon}{8} > \frac{3\varepsilon}{4}$$

由此结合  $\varphi, \psi$  的选取知,

$$0 < \int_X (\varphi \circ f^n) \psi d\mu = \int_{f^{-n}(V) \cap U} (\varphi \circ f^n) \psi d\mu \leq \mu(f^{-n}(V) \cap U)$$

这说明  $N(U, V) = \{n \in \mathbf{Z}^+ : f^{-n}(V) \cap U \neq \emptyset\} \Leftrightarrow P$  为 thick - 集(因为  $P$  的密度为 1)。由引理 1 自然可得,  $(X, f)$  是拓扑弱混合的。

文献[9]定理 2 证明周期点稠密的弱混合系统是初值敏感依赖的。本文定理 2 表明, 周期点稠密性条件是可去的。文献[5]说明非平凡的拓扑弱混合的系统是 multi - 敏感的。但是未有证明, 为保证本文完整性, 给出该结果的详细证明。

**定理 2** 如果动力系统  $(X, f)$  是弱混合的, 则  $(X, f)$  是 multi - 敏感的。特别地,  $(X, f)$  是初值敏感依赖的。

**证明** 由定理 1 知, 只须证明拓扑弱混合蕴含 multi - 敏感性。事实上, 由于  $X$  为非平凡的空间, 所以存在不同的两点  $x, y \in X$ 。取  $\varepsilon = d(x, y)/4 > 0$ , 同时取

$V_1 = B(x, \varepsilon)$ ,  $V_2 = B(y, \varepsilon)$ 。显然,

$$\text{dist}(V_1, V_2) = \inf\{d(z_1, z_2) : z_1 \in V_1, z_2 \in V_2\} \geq 2\varepsilon$$

对任意自然数  $n$ , 任取  $n$  个非空开子集  $U_1, \dots, U_n \subset X$ , 同时令

$$U = U_1 \times U_1 \times U_2 \times U_2 \times \dots \times U_n \times U_n \subset X^{2n}, V = V_1 \times V_2 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_1 \times V_2 \subset X^{2n}$$

由于  $f$  是拓扑弱混合的, 由引理 1 知  $f^{(x2n)}$  是拓扑传递的, 因此存在  $m \in \mathbf{Z}^+$ , 使得

$$(f^{(x2n)})^m(U) \cap V \neq \emptyset$$

这说明对任意  $1 \leq i \leq n$ ,

$$f^m(U_i) \cap V_1 \neq \emptyset \neq f^m(U_i) \cap V_2$$

所以  $\text{diam}(f^m(U_i)) \geq 2\varepsilon$ , 因此,  $(X, f)$  是 multi-敏感的。

#### 参考文献:

- [1] LI T Y, YORKE J A. Period three implies chaos[J]. Amer Math Monthly, 1975, 82: 985-992.
- [2] DEVANEY R L. An introduction to chaotic dynamical systems[M]. Reading: Addison-Wesley, 1989.
- [3] BANKS J, EROOKS J, CAIRNS G, et al. On Devaney's definition of chaos[J]. Amer Math Monthly, 1992, 99: 332-334.
- [4] GLASNER E, WEISS B. Sensitive dependence on initial conditions [J]. Nonlinearity, 1993, 6: 1067-1075.
- [5] MOOTHATHU T K. Stronger forms of sensitivity for dynamical systems [J]. Nonlinearity, 2007, 20: 2115-2126.
- [6] WU X, WANG J, CHEN G. F-sensitivity and multi-sensitivity of hyperspatial dynamical systems[J]. J Math Anal Appl, 2015, 429: 16-26.
- [7] 叶向东, 黄文, 邵松. 拓扑动力系统概论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [8] XU Z J, LIN W, RUAN J. Decay of correlations implies chaos in the sense of Devaney[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 22: 305-310.
- [9] 王涛, 贾诺. Devaney 混沌的随机性质[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40: 210-213.
- [10] 吴新星, 朱培勇. 关于连续区间映射的敏感依赖性[J]. 系统科学与数学, 2012(32): 215-225.
- [11] 吴新星. 关于 d-跟踪性质的一些注记[J]. 中国科学: 数学, 2015, 45: 273-286.
- [12] 冯汉, 索宇, 朱培勇. 基于 Logistic 映射的迭代式的混沌特性及混沌控制[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2011, 25(1): 24-26.
- [13] 卢天秀, 朱培勇. 线性序拓扑空间上不稳定流形的映射性质[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2009, 23(4): 32-34.
- [14] 李瑞佳, 朱培勇. 拓扑动力系统中强传递集的一些性质[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2016, 29(6): 90-93.
- [15] WALTERS P. An Introduction to Ergodic Theory[M]. New York: Springer-Verlag Inc., 1982.

## Further Study on Stochastic Properties in Devaney's Chaos

ZHANG Xinmin

(School of Sciences, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China)

**Abstract:** The relations among some dynamical properties (for example, weakly mixing, topologically weakly mixing, and sensitivity) are main research for dynamical systems. It is proved that every weakly mixing dynamical system defined using correlation function is topologically weakly mixing. Based on this result, it is obtained that such a system is multi-sensitive and sensitively dependent on initial conditions, improving the main results obtained by Wang Tao and Jia Nuo in 2010.

**Key words:** weakly mixing; topologically weakly mixing; multi-sensitivity