

# 双重 Stone 代数的核理想注记

赵秀兰<sup>1</sup>, 陈丽娟<sup>2</sup>

(1. 黄河科技学院数理部, 郑州 450063; 2. 河南工程学院理学院, 郑州 451191)

**摘要:**在双重 Stone 代数上引入核理想概念,借助核理想的性质反映双重 Stone 代数的结构,在双重 Stone 代数  $L$  上构造了具有核理想  $I$  的最大同余关系表达式  $R^I, (x, y) \in R^I \Leftrightarrow (x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^+ \wedge y^{++}) \vee (x^{++} \wedge y^+) \in I$ 。根据双重 Stone 代数的运算特征,获得了具有核理想的最小同余关系与最大同余关系之间的等式关系。主要结果为:设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I$  是  $L$  的核理想,则  $R^I = \delta_I \vee (G^* \wedge G^+)$ , 其中  $(x, y) \in \delta_I \Leftrightarrow (\exists i \in I) x \vee i = y \vee i; (x, y) \in G^* \Leftrightarrow x^* = y^*, (x, y) \in G^+ \Leftrightarrow x^+ = y^+$ 。所得结论为其它 Ockham 代数类核理想性质的研究提供了方法,丰富了 Ockham 代数的发展,为进一步研究 Ockham 代数类的代数结构提供理论支持。

**关键词:**Stone 代数;对偶 Stone 代数;双重 Stone 代数;核理想;同余关系

**中图分类号:**0153.1

**文献标志码:**A

## 引言

Ockham 代数<sup>[1]</sup>是定义在分配格上的一类序代数,布尔代数、de Morgan 代数、Stone 代数、伪补代数等是 Ockham 代数的子代数<sup>[1-5]</sup>。在序代数结构的研究中,借助理想和滤子研究代数结构是学者的一个研究方向,特别是核理想与余核滤子是人们研究 Ockham 代数类的结构及同余关系的一个重要工具。文献[6-16]以理想与滤子为工具刻画代数结构。文献[6]在双重 Stone 代数上引入核理想的概念,构造了核理想同余关系表达式,获得了双重 Stone 代数核理想判别定理。根据双重 Stone 代数的运算特征及主同余表示理论,获得了核理想同余关系的若干等价表达式并证明了双重 Stone 代数核理想与其同余关系是同构的。方捷和吴丽云<sup>[8]</sup>证明了 PO 代数类上具有余核滤子的最小同余和最大同余。王雷波和方捷在文献[12]中分别就双重伪补代数的假值理想和假值同余和几乎伪补格的核理想与 W-理想<sup>[13]</sup>给出

了特征表示。本文作为文献[6]的一个补充,在双重 Stone 代数核理想已有结论的基础上,进一步讨论双重 Stone 代数核理想同余关系的性质。

## 1 预备知识

**定义 1<sup>[1]</sup>** 设  $(L; \wedge, \vee, 0, 1)$  是一个有界分配格,  $f$  是  $L$  上的一元运算,若:

(1)  $\forall x, y \in L, f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y), f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$ ; (2)  $f(0) = f(1), f(1) = f(0)$ , 则称  $(L; \wedge, \vee, f, 0, 1)$  是一个 Ockham 代数(简记为  $O$ )。

**定义 2<sup>[1]</sup>** 一个伪补代数(简称 p-代数)是一个分配格  $(L; \vee, \wedge)$ , 它具有一个最小元  $0$  及一个映射  $*$ :  $L \rightarrow L$  使得  $x^* = \max\{y \mid x \wedge y = 0\}$ 。

一个伪补代数  $(L; \wedge, \vee, *, 0, 1)$ , 如果运算  $*$  满足条件:  $\forall x \in L, x^* \vee x^{**} = 1$ , 称为 Stone 代数。对偶地, 附加的一元运算  $^+$ :  $L \rightarrow L$ , 使得  $x^+ = \min\{y \mid x \vee y = 1\}$ , 且运算  $^+$  满足条件  $\forall x \in L, x^+ \wedge x^{++} = 0$ ,

收稿日期:2017-04-03

基金项目:国家自然科学基金(11302072);河南省基础与前沿技术研究(152300410129)

作者简介:赵秀兰(1982-),女,河南商水县人,副教授,硕士,主要从事序代数结构方面的研究,(E-mail)xiulanz@126.com

称  $(L; \vee, \wedge, +)$  是对偶 Stone 代数。

**定义 3**<sup>[1]</sup> 设  $(L; \wedge, \vee, 0, 1)$  是一个有界分配格, 其上赋予两个一元运算  $*$ ,  $+$ , 并且  $(L; \vee, \wedge, *)$  是 Stone 代数,  $(L; \vee, \wedge, +)$  是对偶 Stone 代数, 称  $(L; \vee, \wedge, *, +)$  是一个双重 Stone 代数。

**引理 1**<sup>[16]</sup> 设  $(L; \vee, \wedge, *, +)$  是一个双重 Stone 代数, 任意的  $x, y \in L$ , 则

- (1)  $x^* \leq x^+$ ;
- (2)  $x^{**} = x^{++} \leq x \leq x^{**} = x^{++}$ ;
- (3)  $0^* = 1, 1^* = 0, x^* = x^{***}, 0^+ = 1, 1^+ = 0, x^+ = x^{+++}$ ;
- (4)  $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*, (x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$ ;
- (5)  $(x \wedge y)^+ = x^+ \vee y^+, (x \vee y)^+ = x^+ \wedge y^+$ ;
- (6)  $x^* \vee x^{**} = 1, x^+ \vee x^{++} = 1$ 。

**引理 2**<sup>[6]</sup> 设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I$  是  $L$  的理想, 则  $I$  是核理想的充要条件是  $(a \in L) a \in I \Rightarrow a^{**} \in I$ 。

在  $L$  上定义一个等价关系  $\delta_I: (x, y) \in \delta_I \Leftrightarrow (\exists i \in I) x \vee i = y \vee i$ 。

在文献[6]中, 已论证过  $\delta_I \in \text{Con}L$  且  $I = \text{Ker}\delta_I$ 。

设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数, 记  $I(L)$  和  $KI(L)$  分别为  $L$  的所有理想与所有核理想构成的集合。  $I(L), KI(L)$  具有下列性质。

**引理 3**<sup>[6]</sup> 设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I, J \in KI(L)$ , 则

- (1)  $(\forall \varphi \in \text{Con}L) I = \text{Ker}\varphi \Rightarrow \delta_I \leq \varphi$ ;
- (2)  $I \leq J \Leftrightarrow \delta_I \leq \delta_J$ 。

**引理 4**<sup>[6]</sup>  $KI(L)$  是  $I(L)$  的一个子格。

**定义 4** 设  $(L; \vee, \wedge, *, +)$  是一个双重 Stone 代数,  $\theta$  是  $L$  的格同余关系, 若  $(x, y) \in \theta \Rightarrow (x^*, y^*) \in \theta, (x^+, y^+) \in \theta$ , 则称  $\theta$  是  $L$  的同余关系, 符号  $\text{Con}L$  表示  $L$  的全体同余关系构成的集合。

**定义 5** 设  $(L; \wedge, \vee)$  是一个格,  $I$  是格  $L$  的子格, 若  $x, y \in L, y \leq x \in I$  总有  $y \in I$ , 称子格  $I$  是格  $L$  的理想。

对偶地,  $F$  是格  $L$  的子格, 若  $x, y \in L, y \geq x \in F$  总有  $y \in F$ , 称子格  $F$  是格  $L$  的滤子。

**定义 6** 设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数, 对于  $L$  的理想  $I$ , 若存在  $L$  的一个同余关系  $\varphi$ , 使得  $I = \text{Ker}\varphi$ , 其中  $\text{Ker}\varphi = \{x \in L \mid x \equiv 0(\varphi)\}$ , 称理想

$I$  为  $L$  的核理想。

## 2 核理想的性质

设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I$  是  $L$  的核理想, 考虑定义在  $L$  上的下列关系:  $(x, y) \in \mathbf{R}' \Leftrightarrow (x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^+ \wedge y^{++}) \vee (x^{++} \wedge y^+) \in I$ , 则关系  $\mathbf{R}'$  满足下面的定理。

**定理 1** 设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I$  是  $L$  的核理想, 则  $\mathbf{R}'$  是具有核理想  $I$  的最大同余。

**证明** 设  $I$  是  $L$  的核理想, 定义关系:  $(x, y) \in \mathbf{R}' \Leftrightarrow (x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^+ \wedge y^{++}) \vee (x^{++} \wedge y^+) \in I$ , 易见,  $\mathbf{R}'$  满足自反性和对称性。

证  $\mathbf{R}'$  的传递性。

设  $(x, y) \in \mathbf{R}', (y, z) \in \mathbf{R}'$ , 则

$$(x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^+ \wedge y^{++}) \vee (x^{++} \wedge y^+) \in I$$

$$(y^* \wedge z^{**}) \vee (y^{**} \wedge z^*) \vee (y^+ \wedge z^{++}) \vee (y^{++} \wedge z^+) \in I$$

由于

$$x^* \wedge z^{**} = (x^* \wedge z^{**}) \wedge (y^* \vee y^{**}) =$$

$$(x^* \wedge z^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge z^{**} \wedge y^{**}) \leq$$

$$(z^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}) \in I$$

同理可得

$$x^{**} \wedge z^* = (x^{**} \wedge z^*) \wedge (y^* \vee y^{**}) \in I$$

$$x^{++} \wedge z^+ = (x^{++} \wedge z^+) \wedge (y^+ \vee y^{++}) \in I$$

$$x^+ \wedge z^{++} = (x^+ \wedge z^{++}) \wedge (y^+ \vee y^{++}) \in I$$

于是  $(x, z) \in \mathbf{R}'$ , 故  $\mathbf{R}'$  是  $L$  上的一个等价关系。

证  $\mathbf{R}'$  是  $L$  上的一个格同余关系。

设  $(x, y) \in \mathbf{R}'$ , 下证对于任意的  $a \in L, (x \wedge a, y \wedge a), (x \vee a, y \vee a) \in \mathbf{R}'$

由于

$$(x \wedge a)^{**} \wedge (y \wedge a)^* =$$

$$x^{**} \wedge y^* \wedge a^{**} \leq x^{**} \wedge y^* \in I$$

$$(x \wedge a)^* \wedge (y \wedge a)^{**} =$$

$$x^* \wedge y^{**} \wedge a^{**} \leq x^* \wedge y^{**} \in I$$

$$(x \wedge a)^{++} \wedge (y \wedge a)^+ =$$

$$x^{++} \wedge y^+ \wedge a^{++} \leq x^{++} \wedge y^+ \in I$$

$$(x \wedge a)^+ \wedge (y \wedge a)^{++} =$$

$$x^+ \wedge y^{++} \wedge a^{++} \leq x^+ \wedge y^{++} \in I$$

故  $(x \wedge a, y \wedge a), (x \vee a, y \vee a) \in \mathbf{R}'$ , 所以  $\mathbf{R}'$  是  $L$  上的一个格同余关系。

证  $R^l \in \text{Con}L$ 。

设  $(x,y) \in \mathbf{R}^l$ , 则

$$\alpha = (x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*)$$

$$\vee (x^+ \wedge y^{++}) \vee (x^{++} \wedge y^+) \in I$$

由于在双重 Stone 代数中,  $\forall x \in L$ , 有

$$x^{***} = x^*, x^{+++} = x^+$$

$$x^{**} = x^{**}, x^{**} = x^{**}$$

$$x^{+++} = (x^{**})^+ = (x^{**})^+ = (x^*)^{**} = x^{***} =$$

$$x^*, x^{***} = (x^{**})^+ = x^{+++} = x^+$$

将  $(x^*, y^*), (x^+, y^+)$  代入  $\alpha$ , 并结合上述运算性质得

$$\beta = (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^{**}) \leq \alpha$$

$$\gamma = (x^{++} \wedge y^+) \vee (x^+ \wedge y^{++}) \leq \alpha$$

因此  $\beta, \gamma \in I$ , 即  $(x^*, y^*), (x^+, y^+) \in \mathbf{R}^l$ , 于是  $R^l \in \text{Con}L$ 。

证  $I = \text{Ker}R^l$ 。由于在双重 Stone 代数中,  $0^+ = 1, 1^+ = 0, 0^* = 1, 1^* = 0$ 。设  $i \in I$ , 由引理 2 知,  $i^{**} \in I$ 。由引理 1 知,  $i^{++} \leq i \leq i^{**}$ , 故  $i^{++} \in I$ , 从而有  $i^{**} \vee i^{++} \in I$ 。又因

$$(i^* \wedge 0^{**}) \vee (i^{**} \wedge 0^*) \vee (i^+ \wedge 0^{++}) \vee$$

$$(i^{++} \wedge 0^+) = i^{**} \vee i^{++} = i^{**} \in I$$

因此  $(i, 0) \in \mathbf{R}^l$ , 即  $i \in \text{Ker}R^l$ , 所以  $I \subseteq \text{Ker}R^l$ 。

设  $x \in \text{Ker}R^l$ , 即  $(x, 0) \in \mathbf{R}^l$ , 则

$$(x^* \wedge 0^{**}) \vee (x^{**} \wedge 0^*) \vee (x^+ \wedge 0^{++})$$

$$\vee (x^{++} \wedge 0^+) = x^{**} \vee x^{++} = x^{**} \in I,$$

又因  $x \leq x^{**}$ , 故  $x \in I$ , 于是  $\text{Ker}R^l \subseteq I$ , 因此  $I = \text{Ker}R^l$ 。

证  $R^l$  是具有核理想  $I$  的最大同余。

设  $\theta \in \text{Con}L, I = \text{Ker}\theta$ , 令  $(x,y) \in \theta$ , 则  $(x^*, y^*) \in \theta, (x^+, y^+) \in \theta$ 。

设  $i \in I$ , 有  $i^* \wedge i^{**} = 0, i^+ \wedge i^{++} = 0$ , 故  $x^* \wedge y^{**} \equiv 0(\theta), x^{**} \wedge y^* \equiv 0(\theta), x^+ \wedge y^{++} \equiv 0(\theta), x^{++} \wedge y^+ \equiv 0(\theta)$ 。

所以

$$(x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^+ \wedge y^{++})$$

$$\vee (x^{++} \wedge y^+) \equiv 0(\theta)$$

则

$$(x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^+ \wedge y^{++})$$

$$\vee (x^{++} \wedge y^+) \in I$$

从而  $(x,y) \in \mathbf{R}^l$ , 故  $\theta \leq R^l$ 。定理得证。

设  $(L; \vee, \wedge, *, ^+, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数, 在  $L$  中有两个基本同余关系:  $G^*, G^+$ , 它们的定义为:

$$(x,y) \in G^* \Leftrightarrow x^* = y^*$$

$$(x,y) \in G^+ \Leftrightarrow x^+ = y^+$$

结合引理 1 中, 双重 Stone 代数的运算性质, 易得  $G^*, G^+ \in \text{Con}L$ 。定理 1 中所定义的  $R^l$  满足下列推论。

**推论 1** 设  $(L; \vee, \wedge, *, ^+, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I, J \in \text{KI}(L)$ , 则

$$(1) R^{(10)} = G^* \wedge G^+;$$

$$(2) I \leq J \Leftrightarrow R^I \leq R^J.$$

**证明** (1) 设  $(x,y) \in \mathbf{R}^{(10)}$ , 由定理 1 得  $(x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^+ \wedge y^{++}) \vee (x^{++} \wedge y^+) = 0$ , 又由双重 Stone 代数的运算性质知,  $x^{**} = y^{**}, x^{++} = y^{++}$ , 因此  $(x,y) \in G^* \wedge G^+$ , 故  $R^{(10)} \subseteq G^* \wedge G^+$ 。

另一方面, 设  $(x,y) \in G^* \wedge G^+$ , 则  $x^* = y^*, x^+ = y^+$ , 于是得

$$(x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee$$

$$(x^+ \wedge y^{++}) \vee (x^{++} \wedge y^+) = 0$$

故有  $(x,y) \in \mathbf{R}^{(10)}$ 。所以  $R^{(10)} = G^* \wedge G^+$ 。

(2) 设  $I, J \in \text{KI}(L)$ , 且  $I \leq J$ 。由  $R^I, R^J$  的定义知,  $R^I \leq R^J$ 。另一方面, 若  $R^I \leq R^J$ , 则  $\text{Ker}R^I \leq \text{Ker}R^J$ , 又由定理 1 的证明知,  $I = \text{Ker}R^I, J = \text{Ker}R^J$ , 所以  $I \leq J$ 。

设  $(L; \vee, \wedge, *, ^+, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I \in \text{KI}(L)$ , 下面由  $I$  构成一个新的核理想。定义  $\bar{I} = \{x \mid (\forall i \in I) x \wedge i = 0\}$ , 易见  $\bar{I}$  是  $L$  的一个理想。若  $x \in \bar{I}$ , 则对于任意的  $i \in I, x \wedge i = 0$ 。从而  $x^{**} \wedge i^{**} = 0$ , 于是  $x^{**} \wedge i^{**} \wedge i = 0$ , 因为  $i \leq i^{**}$ , 故  $x^{**} \wedge i = 0$ , 由  $\bar{I}$  的定义得  $x^{**} \in \bar{I}$ 。由引理 2 得,  $\bar{I}$  是  $L$  的一个核理想。结合定理 1 可得核理想  $\bar{I}$  生成的同余关系的表达式。

$$\text{定理 2} \quad (x,y) \in \mathbf{R}^{\bar{I}} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^{**}) \cap I = (y^{**}) \cap I; \\ (x^{++}) \cap I = (y^{++}) \cap I. \end{cases}$$

**证明** 定义  $L$  上的一个等价关系  $\alpha: (x,y) \in \alpha \Leftrightarrow (x^{**}) \cap I = (y^{**}) \cap I, (x^{++}) \cap I = (y^{++}) \cap I$ 。由双重 Stone 代数的运算性质得  $\alpha \in \text{Con}L$ , 下证  $R^{\bar{I}} = \alpha$ 。

设  $(x,y) \in \mathbf{R}^{\bar{I}}$ , 根据定理 1 得  $s = (x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^+ \wedge y^{++}) \vee (x^{++} \wedge y^+) \in \bar{I}$ , 从而对于任意的  $i \in I$ , 有  $s \wedge i = 0$ 。

设  $i \in (x^{**}) \cap I$ , 则  $i \leq x^{**}, i \in I$ 。因为  $y^* \wedge i = y^* \wedge i \wedge x^{**} = (y^* \wedge x^{**}) \wedge i \leq s \wedge i = 0$ , 故  $i \leq y^{**}$ , 从而  $i \in (y^{**}) \cap I$ , 因此  $(x^{**}) \cap I \subseteq$

$(y^{**}) \cap I_0$ .

同理  $(y^{**}) \cap I \subseteq (x^{**}) \cap I_0$ . 所以  $(y^{**}) \cap I = (x^{**}) \cap I_0$ .

另一方面令  $i \in (x^{++}) \cap I$ , 则  $i \leq x^{++}, i \in I_0$ .

因为

$y^+ \wedge i = y^+ \wedge i \wedge x^{++} = (y^+ \wedge x^{++}) \wedge i \leq s \wedge i = 0$   
从而  $i \leq y^{++}$ , 故  $i \in (y^{++}) \cap I$ , 因此  $(x^{++}) \cap I \subseteq (y^{++}) \cap I_0$ .

同理  $(y^{++}) \cap I \subseteq (x^{++}) \cap I_0$ . 所以  $(y^{++}) \cap I = (x^{++}) \cap I_0$ . 所以  $(x, y) \in \alpha$ , 即  $R^i \leq \alpha$ .

反之, 设  $(x, y) \in \alpha$ , 则  $(x^{**}) \cap I = (y^{**}) \cap I$ ,  $(x^{++}) \cap I = (y^{++}) \cap I$ .

于是

$$(x^{**} \wedge y^*) \cap I = (y^{**} \wedge y^*) \cap I = 0$$

$$(x^{++} \wedge y^+) \cap I = (y^{++} \wedge y^+) \cap I = 0$$

同理  $(y^{**} \wedge x^*) \cap I = 0, (y^{++} \wedge x^+) \cap I = 0$ . 所以, 对于任意的  $i \in I$ ,

$$[(x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^+ \wedge y^{++}) \vee (x^{++} \wedge y^+)] \wedge i = 0$$

故

$$(x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^+ \wedge y^{++}) \vee (x^{++} \wedge y^+) \in \bar{I}$$

于是  $(x, y) \in \bar{R}^i$ , 即  $\alpha \leq \bar{R}^i$ .

综上所述可得  $R^i = \alpha$ .

设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I \in KI(L)$ , 由定理 1 知, 关系  $R^I$  是具有核理想  $I$  的最小同余, 由引理 2 和引理 3 知, 关系  $\delta_I$  是具有核理想  $I$  的最大同余. 它们满足下列的等式关系.

**定理 3**  $R^I = \delta_I \vee (G^* \wedge G^+)$

**证明** 设  $(x, y) \in R^I$ , 则  $\alpha = (x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^+ \wedge y^{++}) \vee (x^{++} \wedge y^+) \in I$ , 根据双重 Stone 代数的运算性质得,  $x^{**} \vee \alpha = y^{**} \vee \alpha, x^{++} \vee \alpha = y^{++} \vee \alpha$ . 由同余关系  $\delta_I, G^*, G^+$  的定义可得

$$x^{**} \vee x \stackrel{G^*}{=} x^{**} \stackrel{\delta_I}{=} x^{**} \vee \alpha = y^{**} \vee \alpha \stackrel{\delta_I}{=} y^{**} \stackrel{G^*}{=} y$$

$$x \stackrel{G^*}{=} x^{++} \stackrel{\delta_I}{=} x^{++} \vee \alpha = y^{++} \vee \alpha \stackrel{\delta_I}{=} y^{++} \stackrel{G^*}{=} y$$

所以

$$(x, y) \in G^* \vee \delta_I, (x, y) \in G^+ \vee \delta_I$$

因此

$$(x, y) \in (G^* \vee \delta_I) \wedge (G^+ \vee \delta_I) =$$

$$(G^* \wedge G^+) \vee \delta_I$$

于是得  $R^I \leq \delta_I \vee (G^* \wedge G^+)$ .

另一方面, 由引理 2 知  $I = \text{Ker} \delta_I$ , 又推论 1 知  $\delta_I \leq R^I$ , 易见  $G^* \wedge G^+ \leq R^I$ , 故  $\delta_I \vee (G^* \wedge G^+) \leq R^I$ .

综上所述得  $R^I = \delta_I \vee (G^* \wedge G^+)$ .

### 3 结束语

理想是研究 Ockham 代数类的结构及同余关系的一个重要工具, 结合核理想的性质, 使人们对抽象的相关 Ockham 代数类的结构及同余关系有一个清晰的认识, 有助于了解双重 Stone 代数的结构, 所得结论为其它 Ockham 代数类核理想性质的研究提供了方法, 同时丰富了序代数结构理论.

### 参考文献:

- [1] BLYTH T S, VARLET J C. Ockham algebras[M]. Oxford: Oxford University Press, 1994.
- [2] BLYTH T S, VARLET J C. On a common abstraction of de Morgan algebras and Stone algebras[J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1983, 94A: 301-308.
- [3] FANG J. Distributive Lattices with Unary Operations[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [4] 方捷. 格论导引[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [5] GRATZER G. Lattice Theory[M]. New York: W. H. Freeman and Company, 1971.
- [6] 赵秀兰, 陈丽娟. 双重 Stone 代数的核理想[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2017, 30(1): 88-91.
- [7] 黎爱平, 章书文. 双重 Stone 代数的素理想与同余关系[J]. 上饶师范学院学报, 1999, 19(6): 12-15.
- [8] 方捷, 吴丽云. 拟补 Ockham 代数的理想与滤子[J]. 数学学报, 2004, 47(4): 647-652.
- [9] 赵秀兰, 刘洁. 伪补 MS-代数的核理想与同余关系[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2014, 38(6): 565-568.
- [10] 罗从文. MS-代数的核理想[J]. 应用数学, 2001, 14(1): 39-41.
- [11] 赵秀兰, 初元红, 史西专. 双重伪补 Ockham 代数的理想与滤子同余关系的注记[J]. 汕头大学学报: 自然科学版, 2016, 31(1): 35-40.

- [12] 王雷波,方捷.双重伪补代数的假值理想的一点注记[J].纯粹数学与应用数学,2012,28(1):119-122.
- [13] 王雷波,方捷.几乎伪补格的核理想与 W-理想[J].模糊系统与数学,2012,26(1):61-66.
- [14] 牛超群,吴洪博.BR<sub>0</sub> 代数中的 \* 理想及其诱导的商代数[J].江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(3):221-224.
- [15] 赵秀兰,马红娟,初元红,等.双重半伪补 de Morgan 代数的滤子同余关系[J].模糊系统与数学,2015,29(4):19-26.
- [16] 朱怡权.双重 Stone 代数的主同余关系[J].纯粹数学与应用数学,2006,22(4):520-525.

## A Note on the the Kernel Ideal on Double Stone Algebras

ZHAO Xiulan<sup>1</sup>, CHEN Lijuan<sup>2</sup>

(1. Department of Mathematics and Physics, Huanghe Science and Technology College, Zhengzhou 450063, China;

2. College of Science, Henan Institute of Engineering, Zhengzhou 451191, China)

**Abstract:** The concept of kernel ideal on double Stone algebras is introduced, the expression of the largest congruence  $R^I$  on a double Stone algebra  $L$  with kernel ideal  $I$  is constructed,  $(x, y) \in \mathbf{R}^I \Leftrightarrow (x^* \wedge y^{**}) \vee (x^{**} \wedge y^*) \vee (x^+ \wedge y^{++}) \vee (x^{++} \wedge y^+) \in I$ . According to the operational characteristics of double Stone algebras, some equivalent expressions of the double Stone algebras are obtained. The main results are as follows: Let  $L$  be a double Stone algebra, if  $I$  is an kernel ideal of  $L$  then  $R^I = \delta_I \vee (G^* \wedge G^+)$ , where  $(x, y) \in \delta_I \Leftrightarrow (\exists i \in I) x \vee i = y \vee i$ ;  $(x, y) \in G^* \Leftrightarrow x^* = y^*$ ,  $(x, y) \in G^+ \Leftrightarrow x^+ = y^+$ . The conclusion provides a method for the study of the properties of the other Ockham algebras, and enriches the theory of ordered algebraic structures.

**Key words:** Stone algebras; dual Stone algebras; double Stone algebras; kernel ideal; congruence