

单调有界准则的推广与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^m(an+b)}{n^\alpha}$ 的敛散性

杜先云¹, 任秋道², 文华燕³, 王敏²

(1. 成都信息工程学院数学学院, 成都 610225; 2. 绵阳师范学院数学与物理学院, 四川 绵阳 621000;

3. 西南科技大学城市学院, 四川 绵阳 621000)

摘要: 利用致密性定理获得有界数列 $\{y_n\}$ 收敛的一个充分条件: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{Z}^+,$ 使得当 $n > \mathbf{Z}$ 时, 不等式 $|y_n - y_{n-1}| < \varepsilon$ 恒成立。并发现任意项级数收敛的一个判定定理: 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有界, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$ 则该级数收敛。由此获得: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{1+\frac{2s}{t}} = n}{n^\alpha}$ 收敛, 其中 $s \in \mathbf{Z}, t \in \mathbf{Z}^+, 0 < \alpha \leq 1.$ 并进行推广: 如果 $s \in \mathbf{Z}, t \in \mathbf{Z}^+, 0 < \alpha \leq 1,$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{1+\frac{2s}{t}}(an)}{n^\alpha}$ 收敛。再获得一个一般性结论: 设有界函数 $f(n)$ 满足 $0 \leq f(n) < M,$ 且 $0 < \alpha \leq 1,$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(an)}{n^\alpha} f(n)$ 收敛。同时利用确界定理得到: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s} n}{n}$ 发散, 其中 $s \in \mathbf{Z}.$ 并推广: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an)}{n}$ 发散, 其中 $0 < a \leq \frac{\pi}{2}, s \in \mathbf{Z}.$ 利用数学归纳法获得: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an+b)}{n}$ 发散, 其中 $s \in \mathbf{Z}, (a-2k\pi)^2 + (b-2l\pi)^2 > 0, k, l \in \mathbf{Z}.$

关键词: 数列; 数列收敛; 级数收敛

中图分类号: O186.1

文献标志码: A

引言

利用“ $\varepsilon - N$ ”定义判定数列是否收敛比较抽象且复杂, 本文寻找数列收敛更多的判定定理。从一个新的角度去认识收敛数列的渐进性: 数列极限来源于用一系列近似值去逼近问题的精确值^[1-2]。容易知道: 收敛数列 $\{y_n\}$ 从某一项起所有的项在任何精度下都有相同的近似值(实际问题的精确值)。即, 用 a 和 ε 分别表示近似值和精度, 若数列从某一项起满足 $|y_n - a| < \varepsilon,$ 则这个数列收敛。当项数 n 无限增大时, 可以认为收敛数列 $\{y_n\}$ 相邻两项的差 $\{y_n - y_{n-1}\} (n > 2)$ 无限接近一个公差为 0 的等差数列, 从而给出了利用 $y_n - y_{n-1}$ 趋于 0 来

判断数列是否收敛的方法, 推广了数列单调收敛准则, 并得到任意项级数收敛的一个判定定理。同时, 发现在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 之间存在大量的关于三角函数发散和收敛的级数。

1 单调有界准则的推广及应用

对于有界数列 $\{y_n\},$ 如果它不单调, 有如下结论:

定理 1 设 $\{y_n\}$ 为一个有界数列。 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{Z}^+,$ 使得当 $n > N$ 时, 不等式 $|y_n - y_{n-1}| < \varepsilon$ 恒成立, 则数列 $\{y_n\}$ 收敛。

证明 根据致密性定理^[3-4], 设有界数列 $\{y_n\}$ 收敛

收稿日期: 2017-03-18

基金项目: 四川省教育厅基金项目(16ZB0314)

作者简介: 杜先云(1964-), 男, 四川三台人, 教授, 主要从事应用数学方面的研究, (E-mail) duxy2011@foxmail.com

的子列为 $\{y_{n_k}\}$, 则存在常数 a , 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = a$ 。对于子列 $\{y_{n_k}\}$ 某一具体的项 y_{n_k} , 其序号 n_k 一定是有限数, 因此存在有限数

$$M = \max\{n_{k+1} - n_k \mid k = 1, 2, 3, \dots\} < \infty$$

根据已知条件, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbf{Z}^+$, 使得当 $n > N_1$ 时, 有 $|y_n - y_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2M}$ 。又 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = a$, 对于 $\varepsilon, \exists K \in \mathbf{Z}^+$, 使得当 $k > K$ 时, 有 $|y_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ 。取 $N = \max\{n_K, N_1\}$,

对于 $\forall n > N, \exists k_0 > K$, 使得 $n_{k_0} \leq n \leq n_{k_0+1}$, 则有

$$\begin{aligned} |y_n - y_{n_k}| &= \\ |y_n - y_{n-1} + y_{n-1} - y_{n-2} + \dots + y_{n_{k_0+1}} - y_{n_k}| &\leq \\ |y_n - y_{n-1}| + |y_{n-1} - y_{n-2}| + \dots + |y_{n_{k_0+1}} - y_{n_k}| &< \\ \frac{(n - n_{k_0})\varepsilon}{2M} \leq \frac{(n_{k_0+1} - n_{k_0})\varepsilon}{2M} &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} |y_n - a| &= |y_n - y_{n_k} + y_{n_k} - a| \leq \\ |y_n - y_{n_k}| + |y_{n_k} - a| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

因此, 数列 $\{y_n\}$ 收敛。证毕。

定理 1 中的条件有界不能少。例如 $y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, 而 $y_n - y_{n-1} = \frac{1}{n} (n \geq 2)$, 数列 $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ 单调递减趋于 0, 而该数列发散^[5-8]。

推论 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有界, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则该级数收敛。

2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^m(an+b)}{n^\alpha}$ 的敛散性

定理 2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{1+\frac{2s}{t}} n}{n^\alpha}$ 收敛, 其中 $s \in \mathbf{N}, t \in \mathbf{N}^+, 0 < \alpha \leq 1$ 。

证明 设该级数的部分和为 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin^{1+\frac{2s}{t}} k}{k^\alpha}$ 。利用三角函数和差化积公式可得^[9-10]:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin k &= \frac{2\sin \frac{1}{2}(\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n)}{2\sin \frac{1}{2}} = \\ \frac{\cos \frac{1}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}}{2\sin \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

因而 $\sum_{k=1}^n \sin k$ 有界。 S_n 是把 $\sum_{k=1}^n \sin k$ 的第 k 个加数缩小 $\frac{\sin^{\frac{2s}{t}} k}{k^\alpha} (> 0)$ 倍, 从而 S_n 有界。事实上, $\sum_{k=1}^n \sin k$ 是函数 $y = \sin x$ 在 $x = 1, 2, 3, \dots, n$ 的纵坐标的和, 把第 k 个纵坐标缩小 $\frac{\sin^{\frac{2s}{t}} k}{k^\alpha}$ 倍, 再求和仍然有界。又 $S_n - S_{n-1} = \frac{\sin^{1+\frac{2s}{t}} n}{n^\alpha} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。根据推论 1, 该级数收敛。证毕。

推论 2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ 收敛。

注 虽然函数 $\frac{\sin x}{x} (1 \leq x \leq n)$ 不单调, 但当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ 总趋势是递减趋于 0。利用定积分估计部分和 S_n ^[11-12]。

$$\begin{aligned} S_n &\approx \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k}{k} + \sum_{k=N}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\sin x}{x} dx = \\ \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k}{k} + \int_N^n \frac{\sin x}{x} dx &= \\ \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k}{k} - \int_N^n \frac{d \cos x}{x} &= \\ \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k}{k} - \frac{\cos x}{x} \Big|_N^n + \int_N^n \frac{\cos x}{x^2} dx &= \\ \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k}{k} + \frac{\cos N}{N} - \frac{\cos n}{n} + \cos \xi \int_N^n \frac{1}{x^2} dx &= \\ \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k}{k} + \frac{\cos N}{N} - \frac{\cos n}{n} - \frac{\cos \xi}{n} + \frac{\cos \xi}{N} &\rightarrow \\ \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k}{k} + \frac{\cos N + \cos \xi}{N} (N < \xi < n, n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

由此可见, 当 $N \in \mathbf{Z}^+$ 越大时, 近似值越精确。用类似的方法可以得到如下的结论:

推论 3 如果 $s \in \mathbf{N}, t \in \mathbf{N}^+, 0 < \alpha \leq 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{1+\frac{2s}{t}}(an)}{n^\alpha}$ 收敛。

推论 4 如果 $s \in \mathbf{N}, t \in \mathbf{N}^+, 0 < \alpha \leq 1, a \neq 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^{1+\frac{2s}{t}}(an)}{n^\alpha}$ 收敛。

根据推论 3、推论 4, 可得:

推论 5 如果 $0 < \alpha \leq 1, a \neq 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(an+b)}{n^\alpha}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(an+b)}{n^\alpha}$ 收敛。

容易得到更一般的结论:

定理 3 设有界函数 $f(n)$ 满足 $0 \leq f(n) < M$, 且 $0 < \alpha \leq 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(an)}{n^\alpha} f(n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(an)}{n^\alpha} f(n)$

($a \neq 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$) 收敛。

推论6 设有界函数 $f(n)$ 满足 $0 \leq f(n) < M$, 且 $0 < \alpha \leq 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(an+b)}{n^\alpha} f(n)$ 收敛; 当 $(a - 2k\pi)^2 + (b - 2l\pi)^2 > 0, k, l \in \mathbf{Z}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(an+b)}{n^\alpha} f(n)$ 也收敛。

定理4 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s} n}{n}$ 发散, 其中 $s \in \mathbf{N}$ 。

证明 (1) 当 $s = 0$ 时, 结论显然成立。(2) 当 $s \geq 1$ 时, 设有界数集 $\{\sin^{2s} n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 的下确界 $\eta \geq 0$ [12-13]。当 $\eta > 0$ 时, 则有 [13-15]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s} n}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta}{n} = \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s} n}{n}$ 发散。当 $\eta = 0$ 时, 先证函数 $f(x) = \sin^{2s} x$ 的周期为 π 。因为 $f'(x) = s \sin^{2(s-1)} x \sin 2x$ 。当 $k\pi < x < \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ 时, $f'(x) > 0$, 它为增函数; 当 $\frac{(2k+1)\pi}{2} < x < (k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, $f'(x) < 0$, 它为减函数。因而 $f(x)$ 的周期为 π 。 $f(x)$ 在一个周期 $[k\pi, (k+1)\pi]$ 内有三个或四个整数, 比如在一个周期 $[0, \pi]$ 内有四个自然数。设 $[k\pi, (k+1)\pi]$ 内的自然数为 $k'+1, k'+2, k'+3$, 或者 $k'+1, k'+2, k'+3, k'+4$, 其中 $k = 0, 1, 2, \dots$, 且 $\sin^2(k'+1) \neq \sin^2(k'+2) \neq \sin^2(k'+3) \neq \sin^2(k'+4)$ 。令

$$\sin^{2s} n_k = \max\{\sin^{2s}(k'+1), \sin^{2s}(k'+2), \sin^{2s}(k'+3), \sin^{2s}(k'+4)\} \geq 0$$

因此, 下确界 $\eta' = \inf\{\sin^{2s} n_k | k = 1, 2, 3, \dots\} > 0$ 。从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s} n}{n} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s} n_k}{n_k} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta'}{n_k} >$$

$$\eta' \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k} = \frac{\eta'}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s} n}{n}$ 发散。证毕。

用同样的方法可以得到如下的结论:

推论7 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an)}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^{2s}(an)}{n}$

发散, 其中 $0 < a \leq \frac{\pi}{2}, s \in \mathbf{N}$ 。

定理5 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an+b)}{n}$ 发散, 其中 $s \in \mathbf{N}, (a - 2k\pi)^2 + (b - 2l\pi)^2 > 0, k, l \in \mathbf{Z}$ 。

证明 对 s 进行归纳。(1) 当 $s = 1$ 时, $(a - 2k\pi)^2 +$

$(b - 2l\pi)^2 > 0, k, l \in \mathbf{Z}$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(an+b)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2(an+b)}{2n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2(an+b)}{2n} > 0$$

根据推论5, 结论成立。

(2) 假设 s 结论成立。同样有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s+2}(an+b)}{n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an+b)(1 - \cos 2(an+b))}{2n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an+b)}{2n} -$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an+b)(\cos^2(an) - \cos^2 b)}{2n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an+b)(1 + \cos^2 b)}{2n} -$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an+b)(1 + \cos 2(an))}{4n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an+b)(1 + 2\cos^2 b)}{4n} -$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an+b)\cos 2(an)}{4n} > 0$$

根据定理3, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an+b)\cos 2(an)}{4n}$ 收敛,

从而有界; 根据归纳假设, 可得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an+b)(1 + 2\cos^2 b)}{4n}$$
 发散。可得,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s+2}(an+b)}{n} = \infty$$

从而 $s + 1$ 时, 结论成立。因此, 结论成立。证毕。

推论8 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^{2s}(an+b)}{n}$ 发散, 其中 $s \in \mathbf{N}$ 。

参考文献:

[1] 王昆扬. 数学分析[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2002.

[2] 陈传樟. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 1983.

[3] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[4] 宋小迪. 正项级数收敛性判别法研究[J]. 山东教育学院学报, 1999, 23(2): 77-80.

[5] 杨丽. 有关级数敛散性的几个问题[J]. 锦州师范学院学报, 2003, 24(2): 63-64.

[6] 杜争云. 压缩数列及其收敛性[J]. 荆楚理工学院学报: 自然科学版, 2010, 36(7): 33-36.

- [7] 杨云苏,万冰蓉.一类数列收敛性的证明[J].高等数学研究,2004,12(7):34-44.
- [8] 林银河.V-型函数的周期点[J].四川师范大学学报:自然科学版,2015,56(4):132-135.
- [9] 杨钟玄.双比值判别法与对数判别法[J].四川师范大学学报:自然科学版,2004,47(8):57-60.
- [10] 岳静.有关数列极限的几个典型例题[J].数学教学研究,2011(2):54-57.
- [11] 李进,郭军.一类特殊的幂指函数极限求法[J].高等函授学报,2008(6):82-84.
- [12] 冯海容,王建华.利用函数思想解决不等式“猜想”问题[J].数学教学,2008,32(10):23-25.
- [13] 王远民.关于迭代生成数列的极限求法[J].商丘职业技术学院学报,2008(2):83-85.
- [14] 杜先云,任秋道.如何利用构造法培养学生的创新思维[J].绵阳师范学院学报:自然科学版,2015,34(11):126-130.
- [15] 杜先云,任秋道,文华燕.树的边带宽与叶子数[J].湖北民族学院学报:自然科学版,2016,34(3):1-4.

A Generalization of the Monotone Bounded Principle and the Properties of

Convergence and Divergence of Series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^m(an+b)}{n^\alpha}$

DU Xianyun¹, REN Qiudao², WEN Huayan³, WANG Min²

(1. College of Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China; 2. Department of Mathematics and Physics, Mianyang Normal University, Mianyang 621000, China; 3. City College, Southwest University Science and Technology, Mianyang 621000, China)

Abstract: By the compactness theorem, one sufficient condition for convergence of a bounded sequence $\{y_n\}$ is obtained that $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{Z}^+$, satisfies as $n > N, |y_n - y_{n-1}| < \varepsilon$. One theorem for the convergence of any item series is found that if the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is bounded, and $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, then this is convergent. Thus it is obtained that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{1+\frac{2s}{t}} n}{n^\alpha}$ is convergent, wherein $s \in \mathbf{N}, t \in \mathbf{N}^+, 0 < \alpha \leq 1$. Moreover it is done one generalization that if $s \in \mathbf{N}, t \in \mathbf{N}^+, 0 < \alpha \leq 1$, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{1+\frac{2s}{t}}(an)}{n^\alpha}$ does. A general conclusion is obtained that a bounded function $f(n)$ satisfies $0 \leq f(n) < M$, and $0 < \alpha \leq 1$, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(an)}{n^\alpha} f(n)$ does. At the same time, by the theorem of supremum, it is done that the positive series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s} n}{n}$ is divergent, wherein $s \in \mathbf{N}$. It is done one generalization that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an)}{n}$ does, wherein $0 < a \leq \frac{\pi}{2}, s \in \mathbf{N}$. Using mathematical induction it is done that the positive series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s}(an+b)}{n}$ does, wherein $s \in \mathbf{N}, (a-2k\pi)^2 + (b-2l\pi)^2 > 0, k, l \in \mathbf{Z}$.

Key words: sequence; sequence convergence; series convergence