

# 微裂纹区对主裂纹扩展的影响

苟凯

(西南交通大学力学与工程学院,成都 610031)

**摘要:**基于Gong推导的主裂纹与微裂纹的理论解,分析了微裂纹区对主裂纹的影响。通过最大周向应力判据,定性和定量地分析了微裂纹区对主裂纹扩展方向的影响。通过计算主裂纹的等效应力强度因子,定性分析了微裂纹区对主裂纹扩展速率的影响。结果表明:当微裂纹区位于 $-75^\circ < \theta < 75^\circ$ 时,微裂纹区增加主裂纹的扩展速率,而位于 $-150^\circ < \theta < -75^\circ$ 和 $75^\circ < \theta < 150^\circ$ 时,减弱主裂纹的扩展速率。当微裂纹区位于 $-30^\circ < \theta < 30^\circ$ 时,对主裂纹的扩展方向影响不大;当位于 $30^\circ < \theta < 115^\circ$ 和 $-150^\circ < \theta < -115^\circ$ 时,主裂纹朝逆时针方向偏转;当位于 $-115^\circ < \theta < -30^\circ$ 和 $115^\circ < \theta < 150^\circ$ 时,主裂纹朝顺时针方向偏转。这些结果能够为预测脆性材料的疲劳和断裂行为提供有用的信息。

**关键词:**主裂纹;微裂纹;最大周向应力判据;扩展速率;扩展方向

**中图分类号:**U211.5

**文献标志码:**A

## 引言

上世纪以来,人们发现了疲劳和断裂是材料失效的主要原因。因此疲劳断裂问题成为研究工作者的重要的关注点,断裂力学由此发展起来。断裂力学主要研究含裂纹材料的力学行为。当构件产生裂纹以后,并不意味着它因此而失效,只要能够对它的力学行为作出准确的判断,那么这个构件还是能够使用的,可以大大节约成本,这也是断裂力学的意义所在。

材料在制造和使用过程中,很难避免会有损伤,产生微缺陷,如微裂纹、微杂质等。这些微缺陷对材料的疲劳和断裂行为会产生很大的影响,因此缺陷对裂纹的影响被很多研究者关注<sup>[1-4]</sup>。另一方面,对于脆性材料,例如混凝土、金属玻璃等,微裂纹增韧机制一直是一个重要的研究领域。微裂纹能够使主裂纹尖端应力集中作用增强,导致裂纹加速扩展,也可以使主裂纹尖端应力集中效果减弱,导致裂纹扩展减速,甚至不再向前扩展。因此很多的科研工作者都研究了微裂纹与主裂纹

的相互影响。

Kachanov<sup>[5-7]</sup>提出了一个简化的思想来研究裂纹间的相互作用,将裂纹面上作用的面力用面力的平均值代替,从而简化了计算。闫向桥<sup>[8-9]</sup>提出了研究裂纹相互作用的数值方法。基于弹性力学复变函数方法,Gong<sup>[10-12]</sup>求解了主裂纹和微裂纹的理论解,进一步分析了微裂纹对主裂纹的影响。还有一些研究者<sup>[13-14]</sup>利用有限元模拟,研究了裂纹间的相互作用。

这些研究工作揭示了裂纹之间的相互作用机制。但是很多情况下,特别是对于脆性材料,微裂纹通常是成群的产生的,这些研究工作并没有考虑损伤区或者微裂纹区对主裂纹的影响。本文基于Gong的理论解,考虑一个微裂纹区对主裂纹的影响。

## 1 理论阐述

### 1.1 半无限长主裂纹与微裂纹

图1显示的是在一个无限大平面中,存在一个半无限长主裂纹与一个任意方位微裂纹。微裂纹长度为 $2a$ ,

收稿日期:2017-02-22

基金项目:国家自然科学基金(11372259)

作者简介:苟凯(1993-),男,陕西咸阳人,硕士生,主要从事裂纹扩展方面的研究,(E-mail)2424947668@com

主裂纹尖端到微裂纹中心的距离为  $d$ , 微裂纹的方位为  $\theta$ , 微裂纹的角度为  $\varphi$ 。通过应用弹性力学复变函数解法, Gong 对这个问题进行了求解, 得到了主裂纹尖端的应力强度因子。微裂纹引起的主裂纹尖端应力强度因子的增量为:

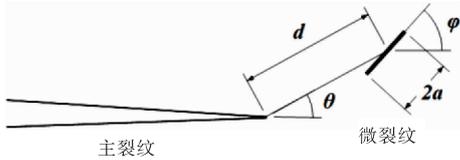


图1 一个半无限长的主裂纹与一个任意方位的微裂纹

$$\begin{aligned} \Delta K_I &= \frac{1}{64} \left(\frac{a}{d}\right)^2 (G_{11} K_I^* + G_{12} K_{II}^*) + \\ &\quad \frac{1}{4} \left(\frac{a}{d}\right)^2 (C_{11} K_I^* + C_{12} K_{II}^*) \\ \Delta K_{II} &= \frac{1}{64} \left(\frac{a}{d}\right)^2 (G_{21} K_I^* + G_{22} K_{II}^*) + \\ &\quad \frac{1}{4} \left(\frac{a}{d}\right)^2 (C_{21} K_I^* + C_{22} K_{II}^*) \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} G_{11} &= 2\cos(\theta + \varphi) + 4\cos(\theta - 2\varphi) + \\ &\quad 8\cos 2(\theta - \varphi) - 6\cos(3\theta - 2\varphi) - \\ &\quad 8\cos 2(2\theta - \varphi) - 3\cos 3\theta + 3\cos \theta \\ G_{12} &= -6\sin(2\theta + \varphi) - 8\sin(\theta - 2\varphi) - \\ &\quad 6\sin(3\theta - 2\varphi) + 8\sin 2(2\theta - \varphi) + \\ &\quad 9\sin 3\theta - 3\sin 3\theta \\ G_{21} &= -2\sin(\theta + 2\varphi) + 6\sin(3\theta - 2\varphi) + \\ &\quad 8\sin 2(2\theta - \varphi) + 3\sin 3\theta - \sin \theta \\ G_{22} &= -6\cos(\theta + 2\varphi) - 4\cos 2(\theta - 2\varphi) + \\ &\quad 8\cos 2(\theta - \varphi) - 6\cos(3\theta - 2\varphi) + \\ &\quad 8\cos 2(2\theta - \varphi) + 9\cos 3\theta + 7\cos \theta \\ C_{11} &= \cos(1.5\theta) \cos(0.5\theta) \\ C_{12} &= -\cos(1.5\theta) \sin(0.5\theta) \\ C_{21} &= -\sin(1.5\theta) \cos(0.5\theta) \\ C_{22} &= \sin(1.5\theta) \sin(0.5\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

那么主裂纹尖端的应力强度因子可以得到:

$$K_I = \Delta K_I + K_I^* \quad K_{II} = \Delta K_{II} + K_{II}^* \quad (3)$$

其中,  $K_I^*$  和  $K_{II}^*$  分别表示没有微裂纹的情况下, 主裂纹尖端张开型和滑开型的应力强度因子。其他的参数在图1中已经给出并介绍。式(1)~式(3)给出了一个微裂纹对主裂纹影响的公式。对于多个微裂纹对主裂纹的影响问题, 在此需要作一个简化, 即不考虑微裂纹之间的相互作用。可以把多个微裂纹对主裂纹的作用进行线性叠加:

$$K_I = \sum_{i=1}^n \Delta K_I^i + K_I^* \quad K_{II} = \sum_{i=1}^n \Delta K_{II}^i + K_{II}^* \quad (4)$$

其中,  $n$  表示微裂纹的数量。

### 1.2 最大周向应力判据

裂纹扩展方向的研究是断裂力学的一个重要领域, 对于复合型裂纹扩展, 有多个判据被提出, 例如最大周向应力判据<sup>[15]</sup>、最小应变能密度判据<sup>[16]</sup>和最大能量释放率判据<sup>[17]</sup>等。其中应用最广泛的就是最大周向应力判据, 因为它应用简便, 对脆性材料的扩展方向能比较准确地预测。最大周向应力判据是由薛昌明提出<sup>[15]</sup>, 对认为裂纹将会朝周向拉应力最大的方向扩展, 由此可以得到裂纹扩展方向:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 2 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} - \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right], K_{II} > 0 \\ \beta &= 2 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} + \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right], K_{II} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中,  $\beta$  为裂纹扩展方向, 规定裂纹逆时针扩展为正, 顺时针扩展为负。

## 2 问题描述

本文研究一个微裂纹区域对一个半无限长主裂纹的影响, 在此先考虑一个较简单的情况, 如图2所示。微裂纹区域内包含5个长度相同的微裂纹, 微裂纹的长度均为  $2a$ , 五条微裂纹的方位分别为  $\theta - 20^\circ, \theta - 10^\circ, \theta, \theta + 10^\circ$  和  $\theta + 20^\circ$ 。五条微裂纹的角度均为  $\varphi = 0$ , 即均为平行的微裂纹。本文将要分析这个微裂纹区域, 即损伤区对主裂纹的影响。外部载荷考虑最简单的情况, 在垂直方向上承受远端拉伸, 即对于主裂纹是 I 型加载。

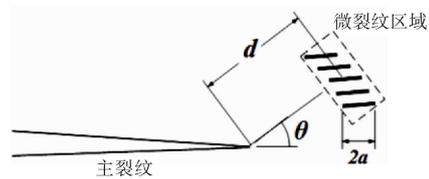


图2 一个半无限长的主裂纹和一个微裂纹区

## 3 有限元验证

为了验证式(1)~式(3)给出的公式是否正确, 在这一部分建立了一个2维的有限元模型。这个模型的长为300 mm, 高为400 mm, 其中包含一个表面主裂纹和一个方位角  $\theta = 30^\circ$  的微裂纹。主裂纹的长度为10 mm, 微裂纹长度取了三个值分别为5 mm, 2 mm 和1 mm。有限元模型的单元类型是 plane183, 材料的弹性模量为

90 GPa,泊松比为 0.36。主裂纹尖端和微裂纹尖端均用三角形的奇异单元,有 20 个奇异单元围绕在裂纹尖端一周。有限元的计算是弹性的。模型的网格划分如图 3 所示。

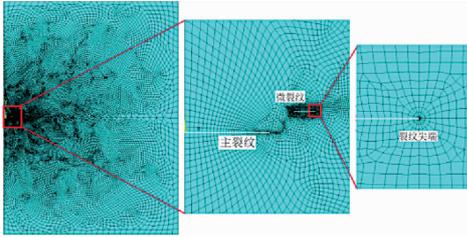


图 3 有限元模型

## 4 结果与讨论

### 4.1 有限元验证

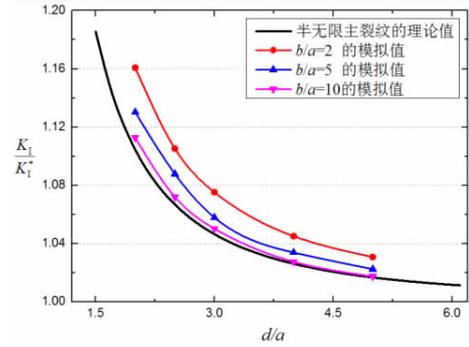
图 4 给出的是一个微裂纹与一个主裂纹相互作用的结果。其中的  $b$  表示的是主裂纹的长度。微裂纹的方位角取  $\theta = 30^\circ$ 。由图 4 可知,主裂纹相对微裂纹的长度越大,模拟结果就越接近理论结果,这是因为理论结果是建立在主裂纹是半无限长裂纹假设的基础上得到的,因此  $b/a$  越大,模拟结果就越接近理论结果。这也验证了理论公式的正确性。对于大多数情况而言,微裂纹相对于主裂纹时非常小的,因此 Gong<sup>[10]</sup> 给出的理论公式能够适用于分析微裂纹对主裂纹的影响问题。同时可知,随着微裂纹与主裂纹之间的距离增加,主裂纹尖端的应力强度因子不断地减小,这是因为距离增加,它们之间的影响就变小了。

### 4.2 微裂纹区对主裂纹应力强度因子的影响

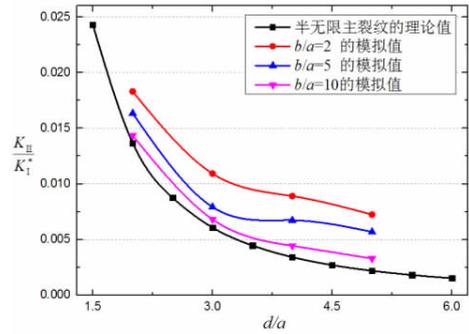
主裂纹尖端应力强度因子随微裂纹区位置的变化如图 5 所示。由图 5 可知,主裂纹与微裂纹区之间的距离越大,主裂纹的应力强度因子越小,这与图 4 的结果是一致的。由图 5(a)可知,当微裂纹区位于  $-75^\circ < \theta < 75^\circ$  时,微裂纹区增强主裂纹的  $K_I$ ,而微裂纹区位于  $-150^\circ < \theta < -75^\circ$  和  $75^\circ < \theta < 150^\circ$  时,微裂纹区减弱主裂纹的  $K_I$ 。位于  $\theta = 105^\circ$  和  $\theta = -105^\circ$  时,微裂纹区对主裂纹  $K_I$  的减弱作用最明显,位于  $\theta = 30^\circ$  和  $\theta = -30^\circ$  时,微裂纹区对主裂纹  $K_I$  的增强作用最明显。从图 5(b)可以看出,当微裂纹区位于  $-115^\circ < \theta < -30^\circ$ ,  $0^\circ < \theta < 30^\circ$  和  $115^\circ < \theta < 150^\circ$  时,主裂纹的  $K_{II}$  为正值。当微裂纹区位于其他的位置时,主裂纹的  $K_{II}$  为负值。位于  $\theta = 75^\circ$  和  $\theta = -75^\circ$  时,微裂纹区对主裂纹  $K_{II}$  的增强作用最明显。

### 4.3 微裂纹区对主裂纹扩展速率的影响

由 Paris 公式<sup>[18]</sup>可以得知,裂纹扩展速率与应力强度

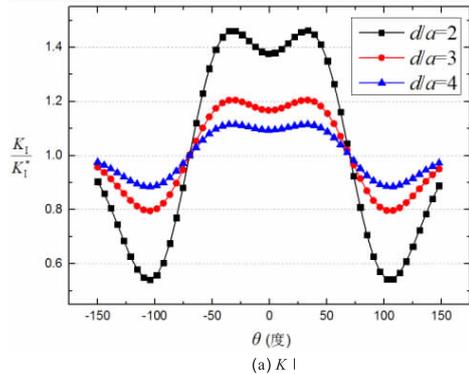


(a) 主裂纹  $K_I$  的变化

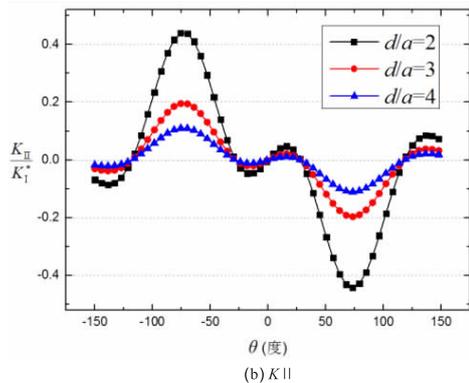


(b) 主裂纹  $K_{II}$  的变化

图 4 模拟结果与理论结果对比



(a)  $K_I$



(b)  $K_{II}$

图 5 主裂纹尖端应力强度因子随微裂纹区位置的变化因子的幅值是成正相关的关系。对于复合型裂纹,要用等效应力强度因子  $K_{eff}$  来表示  $K_I$  和  $K_{II}$  作用的结果<sup>[19-21]</sup>:

$$K_{eff} = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 4(1.155K_{II}^2)} \quad (6)$$

主裂纹尖端等效应力强度因子随微裂纹区位置的变化如图6所示。由图6可知,主裂纹的 $K_{eff}$ 和 $K_I$ 的变化情况大致一样,这是因为主裂纹的 $K_{II}$ 比较小,因此它对等效应力强度因子 $K_{eff}$ 影响不大。当微裂纹区位于 $-75^\circ < \theta < 75^\circ$ 时,微裂纹区增加主裂纹的扩展速率,而微裂纹区位于 $-150^\circ < \theta < -75^\circ$ 和 $75^\circ < \theta < 150^\circ$ 时,微裂纹区减弱主裂纹的扩展速率。在 $\theta = 105^\circ$ 和 $\theta = -105^\circ$ 时,微裂纹区对主裂纹扩展速率的减小作用最大,在 $\theta = 30^\circ$ 和 $\theta = -30^\circ$ 时,微裂纹区对主裂纹扩展速率的增加作用最大。从图6也能够看出主裂纹与微裂纹区之间的距离越大,对主裂纹的扩展速率影响越小。

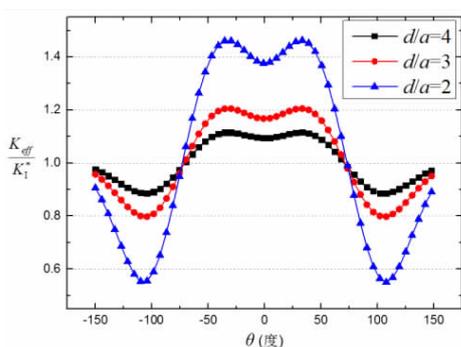


图6 主裂纹尖端等效应力强度因子随微裂纹区位置的变化

#### 4.4 微裂纹区对主裂纹扩展方向的影响

主裂纹扩展方向随微裂纹区位置的变化如图7所示。由图7可知,当微裂纹区位于 $-30^\circ < \theta < 30^\circ$ 时,对主裂纹的扩展方向影响不大。当微裂纹区位于 $30^\circ < \theta < 115^\circ$ 和 $-150^\circ < \theta < -115^\circ$ 时,主裂纹朝逆时针方向扩展,当微裂纹区大约位于 $-115^\circ < \theta < -30^\circ$ 和 $115^\circ < \theta < 150^\circ$ 时,主裂纹朝顺时针方向扩展。当微裂纹区大约位于 $\theta = 80^\circ$ 和 $\theta = -80^\circ$ 时,主裂纹扩展方向偏转最大。当 $d/a = 2$ 是,主裂纹扩展方向最大偏转达到了 $45^\circ$ ,说明微裂纹引起了主裂纹剧烈的偏转,这个影响是非常大的。从图7中也能看出主裂纹与微裂纹区之间的距离越大,微裂纹区对主裂纹的扩展方向影响越小。

## 5 结论

本文基于Gong的理论公式,分析了微裂纹区对主裂纹的影响,得到的以下几点结论:

(1) 当主裂纹长度是微裂纹长度10倍以上时,Gong的理论公式是比较准确的。

(2) 主裂纹与微裂纹区之间的距离越大,微裂纹区对主裂纹的影响越小。

(3) 当微裂纹区位于 $-75^\circ < \theta < 75^\circ$ 时,微裂纹区增

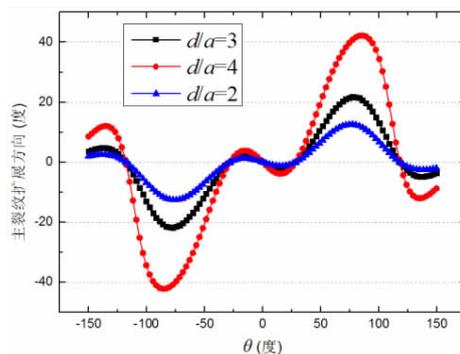


图7 主裂纹扩展方向随微裂纹区位置的变化

加主裂纹的扩展速率,位于 $\theta = 30^\circ$ 和 $\theta = -30^\circ$ 时,微裂纹区对主裂纹扩展速率的增加作用最大。而当微裂纹区位于 $-150^\circ < \theta < -75^\circ$ 和 $75^\circ < \theta < 150^\circ$ 时,减弱主裂纹的扩展速率,位于 $\theta = 105^\circ$ 和 $\theta = -105^\circ$ 时,微裂纹区对主裂纹扩展速率的减小作用最大。

(4) 当微裂纹区大约位于 $-30^\circ < \theta < 30^\circ$ 时,对主裂纹的扩展方向影响不大。当微裂纹区大约位于 $30^\circ < \theta < 115^\circ$ 和 $-150^\circ < \theta < -115^\circ$ 时,主裂纹朝逆时针方向扩展,当微裂纹区大约位于 $-115^\circ < \theta < -30^\circ$ 和 $115^\circ < \theta < 150^\circ$ 时,主裂纹朝顺时针方向扩展。当微裂纹区大约位于 $\theta = 80^\circ$ 和 $\theta = -80^\circ$ 时,引起主裂纹扩展方向偏转最大。

#### 参考文献:

- [1] TAO Y S, FANG Q H, ZENG X, et al. Influence of dislocation on interaction between a crack and a circular inhomogeneity[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2014, 80: 47-53.
- [2] PENG B, LI Z, FENG M. The mode I crack-inclusion interaction in orthotropic medium[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2015, 136: 185-194.
- [3] PAUL S K. Numerical models to determine the effect of soft and hard inclusions on different plastic zones of a fatigue crack in a C(T) specimen[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2016, 159: 90-97.
- [4] YANG R, XU P, YUE Z, et al. Dynamic fracture analysis of crack-defect interaction for mode I running crack using digital dynamic caustics method[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2016, 161: 63-75.
- [5] KACHANOV M. A simple technique of stress analysis in elastic solids with many cracks [J]. International Journal of Fracture, 1985, 28(1): R11-R19.
- [6] KACHANOV M. Elastic solids with many cracks: a simple method of analysis[J]. International Journal of Solids & Structures, 1987, 23(1): 23-43.

- [7] CHUDNOVSKY A,DOLGOPOLSKY A,KACHANOV M. Elastic interaction of a crack with a microcrack array—II. Elastic solution for two crack configurations (piecewise constant and linear approximations)[J].International Journal of Solids & Structures,1987,23(1):11-21.
- [8] 闫相桥.主裂纹与微裂纹相互作用的有效算法[J].力学学报,2006,38(1):119-124.
- [9] 闫相桥.有限长主裂纹与微裂纹的相互作用[J].哈尔滨工业大学学报,2006,38(4):503-506.
- [10] GONG S X,HORII H.General solution to the problem of microcracks near the tip of a main crack[J].Journal of the Mechanics & Physics of Solids,1989,37(1):27-46.
- [11] GONG S X,MEGUID S A.Microdefect interacting with a main crack:A general treatment[J].International Journal of Mechanical Sciences,1992,34(12):933-945.
- [12] GONG S X.On the main crack-microcrack interaction under mode III loading[J].Engineering Fracture Mechanics,1995,51(5):753-762.
- [13] BOUIADJRA B B,BENGUEDIAB M,ELMEGUENNI M,et al.Analysis of the effect of micro-crack on the plastic strain ahead of main crack in aluminium alloy 2024 T3 [J].Computational Materials Science,2008,42(1):100-106.
- [14] ALAM M M,BARSOUM Z,JONSÉN P,et al.Influence of defects on fatigue crack propagation in laser hybrid welded eccentric fillet joint [J].Engineering Fracture Mechanics,2011,78(10):2246-2258.
- [15] ERDOGAN F,SIH G C.On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear [J].Journal of Fluids Engineering,1963,85:519-525.
- [16] SIH G C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems[J].International Journal of fracture,1974,10(3):305-321.
- [17] PALANISWAMY K,KNAUSS W.Propagation of a crack under general, in-plane tension[J].International Journal of Fracture,1972,8(1):114-117.
- [18] PARIS P C,GOMEZ M P,ANDERSON W E.A rational analytic theory of fatigue[J].The Trend in Engineering,1961,13:9-14.
- [19] SCHÖLLMANN M,RICHARD H A,KULLMER G,et al.A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures [J].International Journal of Fracture,2002,117(2):129-141.
- [20] RICHARD H,FULLAND M,SANDER M.Theoretical crack path prediction[J].Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures,2005,28(1-2):3-12.
- [21] RICHARD H A,SCHRAMM B,SCHIRMEISEN N H. Cracks on mixed mode loading: theories, experiments,simulations[J].International Journal of Fatigue,2014,62(2):93-103.

## Influence of a Micro-crack Zone on the Macro-crack Propagation

GOU Kai

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** The influence of a micro-crack zone on the macro-crack is analyzed based on the theoretical equation derived by Gong. The influence of the micro-crack zone on the macro-crack propagation direction is quantitatively and qualitatively investigated by the maximum circumferential stress criterion. And the influence of the micro-crack zone on the macro-crack propagation rate is qualitatively studied by the calculation of the equivalent stress intensity factor. The results show that the micro-crack zone increases the macro-crack propagation rate at  $-75^\circ < \theta < 75^\circ$ , while it decreases the macro-crack propagation rate at  $-150^\circ < \theta < -75^\circ$  and  $75^\circ < \theta < 150^\circ$ . The micro-crack zone has a little effect on the macro-crack propagation direction at  $-30^\circ < \theta < 30^\circ$ . The macro-crack propagates along the counterclockwise direction at  $30^\circ < \theta < 115^\circ$  and  $-150^\circ < \theta < -115^\circ$ , while the macro-crack propagates along the clockwise direction at  $-115^\circ < \theta < -30^\circ$  and  $115^\circ < \theta < 150^\circ$ . The results obtained in the paper are useful to predict fatigue and fracture behavior of brittle materials.

**Key words:** macro-crack; micro-crack; maximum circumferential stress criterion; propagation rate; propagation direction