第 30 卷第 2 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 30　No. 2
2017 年 4 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Apr. 2017
文章编号:1673-1549(2017)02-0098-03　　DOI:10.11863/j. suse.2017.02.19

伪补 Ockham 代数核理想同余关系的注记

赵秀兰[1], 陈丽娟[2]

(1.黄河科技学院数理部, 郑州 450063;2.河南工程学院理学院, 郑州 451191)

摘　要:理想是反映 Ockham 代数类结构的一个重要工具,利用伪补 Ockham 代数的核理想判别定理以及核理想同余关系表达式,研究了伪补 Ockham 代数的核理想的性质,证明了伪补 Ockham 代数核理想及其同余关系是同构的。主要结果为:(1)设 L 是伪补 Ockham 代数,符号 $I(L)$,$I_k(L)$ 分别表示 L 的理想和核理想构成的集合,则 $I_k(L)$ 是 $I(L)$ 的一个子格。(2)对于任意的 $I,J \in I_k(L)$,则 R_I,R_J 具有同余置换性,其中同余关系 R_I 定义为:$(x,y) \in \mathbf{R}_I \Leftrightarrow (\exists a \in I) x \wedge a^* = y \wedge a^*$。(3)设 L 是伪补 Ockham 代数,则 $I_k(L) \cong C_k(L)$,其中符号 $C_k(L) = \{R_I \mid (\exists a \in I) x \wedge a^* = y \wedge a^*, I \in I_k(L)\}$。所得结论为进一步研究 Ockham 代数类的代数结构提供理论支持,丰富了 Ockham 代数的发展。

关键词:Ockham 代数;伪补 Ockham 代数;理想;核理想;同构

中图分类号:O153.1　　**文献标志码**:A

Blyth 和 Varlet 首次在文献[1]中研究了伪补 Ockham 代数 $(L; \wedge, \vee, f, {}^*0,1)$,简称 pO 代数,它是一个 $(2,2,1,1,0,1)$ 类型的代数类,是在有界分配格上赋予两个一元运算 $f,{}^*$ 的代数,$(L; \wedge, \vee, f, 0,1) \in O$,$(L; \wedge, \vee, {}^*0,1) \in p$ 且一元运算 $f,{}^*$ 满足交换律(p 代数,Ockham 代数,pO 代数的详细信息见文献[2-5])。在泛代数研究领域,对代数结构的研究,一直是本专业学者关注的方向。借助理想和滤子是认识 Ockham 代数类的结构及同余关系的一个重要工具,特别是核理想与余核滤子,根据核理想与余核滤子同余关系反映 Ockham 代数类的结构见文献[6-14]。在文献[6]中,作者借助核理想与余核滤子的同余关系刻画了伪补 Ockham 代数的结构。本文将在文献[6]的基础上,进一步的探讨、刻画伪补 Ockham 代数核理想同余关系的性质特征,反映伪补 Ockham 代数属性。

1　基本知识

定义 1[2-3]　一个伪补代数(简称 p-代数)是一个代数$(L; \vee, \wedge, *, 0,1)$,它具有一个最小元 0 及一个映射 $*: L \to L$ 使得 $x^* = \max\{y \in L \mid x \wedge y = 0\}$。

定义 2[15]　设 $(L; \wedge, \vee)$ 是一个格,I 是格 L 的子格,若 $x,y \in L$, $y \leqslant x \in I$ 总有 $y \in I$,称子格 I 是格 L 的理想。

定义 3[1]　设 $(L; \wedge, \vee, 0,1)$ 是一个有界分配格,其上赋予两个一元运算*和 f, 且 (1) $(L; {}^*) \in p$;(2) $(L; f) \in O$;(3) $(x \in L) f(x^*) = [f(x)]^*$,称 $(L; \wedge, \vee, {}^*, f, 0,1)$ 是伪补 Ockham-代数(简称 pO-代数)。

定义 4[6]　设 $(L; \wedge, \vee, f, {}^*, 0,1) \in pO$,$\theta$ 是 L 的一个格同余关系,若 $(x,y) \in \theta \Rightarrow (x^*, y^*) \in \theta$,$(f(x), f(y)) \in \theta$,则称 θ 是 L 的同余关系。符号 $ConL$ 表示 L 的全体同余关系构成的集合。

定义 5[6]　设 $L \in pO$,对于 L 的理想 I,若存在 L 的一个同余关系 φ,使得 $I = Ker\varphi$,其中 $Ker\varphi = \{x \in L \mid x \equiv 0(\varphi)\}$,称理想 I 为 L 的核理想。

引理 1[6]　设 $L \in pO$,I 是 L 的理想,则下面的条件成立:I 是 L 的核理想当且仅且 $(\forall a \in L) a \in I \Rightarrow a^{**}$,

收稿日期:2017-01-16
基金项目:国家自然科学基金(11302072)
作者简介:赵秀兰(1982-),女,河南商水人,副教授,硕士,主要从事序代数结构方面的研究,(E-mail) xiulanz@126.com

$f(a^*) \in I$。

引理2[6]　设 $L \in pO$, I 是 L 的核理想,则 $I = KerR_I$,其中同余关系 R_I 定义为:$(x,y) \in \mathbf{R}_I \Leftrightarrow (\exists a \in I) x \wedge a^* = y \wedge a^*$。

设 $(L; \vee, \wedge, f, ^*)$ 是一个伪补 Ockham 代数,在文献[6]中,由核理想 I 能构造一个与核理想对应的同余关系,那么,核理想与核理想对应的同余关系能否构成一一对应。

2　主要结果

设 $L \in pO$, 符号 $I(L)$,$I_k(L)$ 分别表示 L 的理想和核理想构成的集合,则 $I(L)$,$I_k(L)$ 之间存在下列关系。

定理1　$I_k(L)$ 是 $I(L)$ 的一个子格。

证明　令 $I,J \in I_k(L)$, 下证 $I \wedge J, I \vee J \in I_k(L)$。

设 $x \in I \wedge J$, 则 $x \in I, x \in J$。又因 $I,J \in I_k(L)$, 由引理1知, $x^{**}, f(x^*) \in I$ 且 $x^{**}, f(x^*) \in J$, 故 $x^{**}, f(x^*) \in I \wedge J$, 又由引理1知, $I \wedge J \in I_k(L)$。

令 $x \in I \vee J$, 由引理1知,存在 $i \in I$ 及 $j \in J$ 使得 $x \leqslant i \vee j$。由文献[6]知, $x^{**} \leqslant i^{**} \vee j^{**}$ 和 $f(x^*) \leqslant f(i^*) \vee f(j^*)$, 又因 $I,J \in I_k(L)$, 所以由引理1知, $i^{**} \in I, f(i^*) \in I$ 且 $j^{**} \in J, f(j^*) \in J$。因此 $x^{**}, f(x^*) \in I \vee J$。从而由引理1得 $I \vee J \in I_k(L)$。所以 $I_k(L)$ 是 $I(L)$ 的一个子格。

设 L 是一个伪补 Ockham 代数, I 是 L 的一个核理想,具有核理想 I 的最小同余关系 R_I, 沿用文献[6]中的定义,即 $(x,y) \in \mathbf{R}_I \Leftrightarrow (\exists a \in I) x \wedge a^* = y \wedge a^*$。设 $L \in pO$, $\theta, \varphi \in ConL$, 定义 L 上的一个等价关系, $(x,y) \in \theta \circ \varphi \Leftrightarrow (\exists z \in L)(x,z) \in \theta, (z,y) \in \varphi$。显然, $\theta \circ \varphi$ 是 L 上的同余关系。

若 $\theta, \varphi \in ConL$, 且 θ, φ 满足关系式 $\theta \circ \varphi = \varphi \circ \theta$, 则称同余关系 θ, φ 具有同余置换性。对于任意的 $I,J \in I_k(L)$, 则 R_I, R_J 具有同余置换性。

定理2　设 L 是一个伪补 Ockham 代数, $I,J \in I_k(L)$, 则 $R_I \circ R_J = R_J \circ R_I$。

证明　假设 $(x,y) \in \mathbf{R}_I \circ R_J$, 则存在 $z \in L$, 使得 $(x,z) \in \mathbf{R}_I$, $(z,y) \in \mathbf{R}_J$, 于是存在 $i \in I, j \in J$, 有 $x \wedge i^* = z \wedge i^*$, $z \wedge j^* = y \wedge j^*$, 所以 $x \wedge i^* \wedge j^* = y \wedge i^* \wedge j^*$。

令 $s = (x \wedge j^*) \vee (y \wedge i^*)$, 从而可得

$$x = x \vee (x \wedge i^* \wedge j^*) \stackrel{R_J}{\equiv} (x \wedge j^*) \vee (x \wedge i^* \wedge j^*) =$$

$$(x \wedge j^*) \vee (y \wedge i^* \wedge j^*) \stackrel{R_J}{\equiv} (x \wedge j^*) \vee (y \wedge i^*)$$

因此, $(x,s) \in \mathbf{R}_J$。又因 $s \wedge i^* = (x \wedge i^* \wedge j^*) \vee (y \wedge i^*) = [(x \wedge i^* \wedge j^*) \vee y] \wedge i^*$, 所以, $s \stackrel{R_I}{\equiv} (x \wedge i^* \wedge j^*) \vee y = (y \wedge i^* \wedge j^*) \vee y = y$, 即 $s \stackrel{R_I}{\equiv} y$, 所以 $(x,y) \in \mathbf{R}_J \circ R_I$, 故 $R_I \circ R_J \subseteq R_J \circ R_I$。

同理可证, $R_J \circ R_I \subseteq R_I \circ R_J$。所以, $R_I \circ R_J = R_J \circ R_I$。

下面,探讨伪补 Ockham 代数的核理想及其同余关系之间的联系。

定理3　设 L 是一个伪补 Ockham 代数, $I,J \in I_k(L)$, 则 $I \subseteq J \Leftrightarrow R_I \subseteq R_J$。

证明　设 $I,J \in I_k(L)$, $I \subseteq J$, 根据 R_I, R_J 的定义,可得 $R_I \leqslant R_J$。

另一方面,设 $I,J \in I_k(L)$, $R_I \leqslant R_J$, 则 $KerR_I \leqslant KerR_J$。由引理2知, $I = KerR_I$, $J = KerR_J$, 所以 $I \subseteq J$。定理得证。

为进一步探讨 pO-代数核理想的性质。引入符号 $C_k(L) = \{R_I \mid (\exists a \in I) x \wedge a^* = y \wedge a^*, I \in I_k(L)\}$, 则 $I_k(L)$, $C_k(L)$ 之间存在下列关系。

定理4　设 L 是一个伪补 Ockham 代数,则 $I_k(L) \cong C_k(L)$。

证明　显然, $R_{\{0\}} = \omega$(相等关系)及 $R_L = \iota$(泛同余关系)。

先证对任意的 $I,J \in I_k(L)$, 有 $R_I \wedge R_J = R_{I \wedge J}$。由定理1知, $I \wedge J \in I_k(L)$。因为 $I \wedge J \leqslant I, I \wedge J \leqslant J$, 故由定理3知, $R_{I \wedge J} \leqslant R_I, R_{I \wedge J} \leqslant R_J$, 所以 $R_{I \wedge J} \leqslant R_I \wedge R_J$。

设 $(x,y) \in \mathbf{R}_I \wedge R_J$, 由文献[15]知, $(x,y) \in \mathbf{R}_I$ 且 $(x,y) \in \mathbf{R}_J$。因此存在 $i \in I, j \in J$ 使得 $x \wedge i^* = y \wedge i^*$, $x \wedge j^* = y \wedge j^*$, 于是有 $x \wedge (i \wedge j)^* = y \wedge (i \wedge j)^*$, 又因 $i \wedge j \in I \wedge J$, 所以 $(x,y) \in \mathbf{R}_{I \wedge J}$, 故 $R_I \wedge R_J \leqslant R_{I \wedge J}$, 所以 $R_I \wedge R_J = R_{I \wedge J}$。

证对任意的 $I,J \in I_k(L)$, 有 $R_I \vee R_J = R_{I \vee J}$。由定理1知, $I \vee J \in I_k(L)$。由于 $I \vee J \geqslant I, I \vee J \geqslant J$, 由定理3知, $R_{I \vee J} \geqslant R_I, R_{I \vee J} \geqslant R_J$, 所以 $R_{I \vee J} \geqslant R_I \vee R_J$。

设 $(x,y) \in \mathbf{R}_{I \vee J}$, 则存在 $i \in I$ 及 $i \in J$ 使 $x \wedge i^* \wedge j^* = y \wedge i^* \wedge j^*$, 于是有

$$x \stackrel{R_I}{\equiv} x \wedge i^* \stackrel{R_J}{\equiv} x \wedge i^* \wedge j^* = y \wedge i^* \wedge j^* \stackrel{R_I}{\equiv} y \wedge j^* \stackrel{R_J}{\equiv} y$$

因此 $(x,y) \in \mathbf{R}_I \vee R_J$, 从而有 $R_{I \vee J} \leqslant R_I \vee R_J$, 故 $R_I \vee R_J = R_{I \vee J}$。又因 $R_I = R_J$ 当且仅当 $I = KerR_I = KerR_J = J$, 因此映射: $I \to R_I$ 建立起 $I_k(L) \to C_k(L)$ 的一一对应,所以 $I_k(L) \cong C_k(L)$。

3　结束语

本文在文献[6]的基础上,对伪补 Ockham 代数的核理想同余关系作了一个补充,借助伪补 Ockham 代数的核理想判别定理以及具有核理想同余关系表达式,获

得了伪补 Ockham 代数核理想及其同余关系同构的结论。这一结论有助于了解伪补 Ockham 代数的代数结构。

参 考 文 献:

[1] BLYTH T S,FANG J,VARLET J C.Ockham algebras with pseudocomplementation[J].Communications in Algebra,1997(25):3605-3615.

[2] BLYTH T S, VARLET J C. Ockham algebras[M]. Oxford:Oxford University Press,1994.

[3] FANG J.Distributive Lattices with Unary Operations[M].北京:科学出版社,2011.

[4] FANG J, WANG T. De Morgan algebras with double demi-pseudocomplementation[J].Acta Mathematica Scientia,2011,31B(4):1613-1623.

[5] BLYTH T S,FANG J.On the endomorphisms of Ockham algebras with pseudocomplementation[J].Studia Logica,2011,98:237-250.

[6] 方捷,吴丽云.拟补 Ockham 代数的理想与滤子[J].数学学报,2004,47(4):647-652.

[7] 罗从文.MS-代数的核理想[J].应用数学,2001,14(1):39-41.

[8] 张小红,刘三阳,刘用麟.伪 MIL-代数(WPBL-代数)的正则滤子[J].西安电子科技大学学报:自然科学版,2006,33(5):829-832.

[9] 方捷,沈吓妹.平衡半伪补 Ockham 代数的滤子[J].模糊系统与数学,2010,24(3):38-45.

[10] 王雷波,方捷.几乎伪补格的核理想与 W-理想[J],模糊系统与数学,2012,26(1):61-66.

[11] 牛超群,吴洪博.BRo 代数中的* 理想及其诱导的商代数[J].江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(3):221-224.

[12] 赵秀兰,马红娟,初元红,等.双重半伪补 de Morgan 代数的滤子同余关系[J].模糊系统与数学,2015,29(4):19-26.

[13] 赵秀兰,史西专.半伪补 MS 代数的理想及同余关系[J].模糊系统与数学,2016,30(2):57-63.

[14] 赵秀兰,蒋红敬.平衡伪补 Ockham 代数的 O 理想[J].汕头大学学报,2016,31(4):19-23.

[15] GRATZER G.Lattice Theory[M].New York:W.H. Freeman and Company,1971.

A Note on the Ideal Congruence Relations on Pseudocomplement Ockham Algebras

ZHAO Xiulan[1] , *CHEN Lijuan*[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Huanghe Science and Technology College, Zhengzhou 450063, China;
2. College of Science, Henan Institute of Engineering, Zhengzhou 451191, China)

Abstract: By using the discriminant theorem of kernel ideals on pseudocomplemented Ockham algebras and the expression of the kernel ideal congruence relations, the kernel ideal properties of pseudocomplemented Ockham algebras are studied, and the kernel ideal and congruence relations of Ockham algebras are isomorphic. The main results are as follows: (1) Let L be a pseudocomplemented Ockham algebra. The symbol$I(L)$,$I_k(L)$ represents the set of ideals and kernel ideals, and $I_k(L)$ is a sublattice of $I(L)$. (2) Let $I,J \in I_k(L)$ then R_I,R_Jsatisfy congruence permutation, where R_I : $(x,y) \in \mathbf{R}_I \Leftrightarrow (\exists a \in I) x \wedge a^* = y \wedge a^*$. (3) Let L be a pseudocomplemented Ockham algebra then$I_k(L) \cong C_k(L)$, where $C_k(L) = \{R_I \mid (\exists a \in I) x \wedge a^* = y \wedge a^*, I \in I_k(L)\}$. The conclusion provides a method for the study of the properties of the other Ockham algebras, and enriches the theory of ordered algebraic structures.

Key words: Ockham algebra; pseudocomplemented Ockham algebra; ideal; kernel ideal; isomorphism