

一维波动方程混合问题的通解

樊龙

(山西大同大学煤炭工程学院, 山西 大同 037000)

摘要:一维情形下波动方程的混合问题(初边值问题)是一类重要的物理模型,常用求解方法是波的反射原理,计算特征线在边界上的反射次数得出问题的解,但是弊端在于计算量大,且没有通用的求解公式,并不能反映出波的反射实质,另一种方法是 Fourier 级数法,利用分离变量将原方程化为常微分方程组,再利用常微分方程特征理论得出级数解,同样不易计算。为了简化计算过程,先对初值条件 $\varphi(x), \psi(x)$ 根据边值条件进行相应的奇偶性延拓,可将原问题简化为初值问题,由 D'Alambert 公式给出问题在 R 上的解,再将问题的全局解限定在有限区间 $[0, l]$ 上得出通解公式,结果具有一般性。

关键词:波动方程; D'Alambert 公式; 延拓

中图分类号: O175.27

文献标志码: A

引言

本文主要讨论以下两类混合问题,

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (1)$$

边值条件为

$$u_x(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0, t \geq 0 \quad (2)$$

或者边值条件为

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0 \quad (3)$$

对于以上问题求解,常用的方法有波的反射原理^[1]以及 Fourier 级数方法(分离变量法)^[2-3]。文献[4]利用特征线法,给出方程在可解区域内的通解公式,提供了另一种计算方法,文献[5]中提及了通过将函数延拓,将求解区域进行划分,然后逐个进行讨论,利用波的反射原理,给出各个可解区域内解的显示表达,最近,在文献[6]中,利用分离变量方法求解了几类特殊的波动方程,在文献[7]中利用 Laplace 变换对有限一维空间弹性动

力学边值问题给出解的严格推导。

以往的工作都集中在具体的求解过程及方法,并未给出一个确切的解的表达式,本文的工作完善了波动方程在通解公式方面的内容,并且采用不同于以往的方法,直接利用 D'Alambert 公式计算,从而避开各区域讨论的繁琐过程,直接给出方程在各个区域的解的显示表达,且结果具有一般性。

1 主要结论

引理 1 对于问题(1),若初始函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 都是关于 x_0 的奇函数,则方程的解在任何时间都有 $u(x_0, t) = 0$ 。

证明 由达朗贝尔公式,方程的解为

$$u(x_0, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x_0 + at) + \varphi(x_0 - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x_0 - at}^{x_0 + at} \psi(\tau) d\tau$$

由于 $\varphi(x), \psi(x)$ 都是关于 x_0 的奇函数,有

$$\varphi(x_0 + C) = -\varphi(x_0 - C), \psi(x_0 + C) = -\psi(x_0 - C)$$

收稿日期:2016-11-27

基金项目:山西大同大学教学改革项目(XJY2013211)

作者简介:樊龙(1989-),男,山西忻州人,助教,硕士,主要从事偏微分方程方面的研究,(E-mail)fanlongmath@163.com

所以 $\frac{1}{2}(\varphi(x_0 + at) + \varphi(x_0 - at)) = 0$, 现只需证

$$\int_{x_0-at}^{x_0+at} \psi(\tau) d\tau = 0$$

$$\int_{x_0-at}^{x_0+at} \psi(\tau) d\tau = \int_{x_0-at}^{x_0} \psi(\tau) d\tau + \int_{x_0}^{x_0+at} \psi(\tau) d\tau$$

令 $\tau = 2x_0 - \xi$

$$\int_{x_0}^{x_0+at} \psi(\tau) d\tau = -\int_{x_0}^{x_0-at} \psi(2x_0 - \xi) d\xi = \int_{x_0}^{x_0-at} \psi(\xi) d\xi$$

证毕。

引理 2 对于问题(1),若初始函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 都是关于 x_0 的偶函数,则方程的解在任何时间都有 $u_x(x_0, t) = 0$ 。

证明

$$u_x(x_0, t) = \frac{1}{2}(\varphi'(x_0 + at) + \varphi'(x_0 - at)) + \frac{1}{2a}(\psi(x_0 + at) - \psi(x_0 - at))$$

$\varphi(x)$ 为关于 x_0 偶函数,则 $\varphi'(x)$ 为关于 x_0 的奇函数,所以 $u_x(x_0, t) = 0$, 证毕。

由引理 1 和引理 2,问题(1)、(2)以及(1)、(3)可对初始函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 进行相应的延拓,再利用达朗贝尔公式得出通解。

定理 1 对于问题(1)、(2),对函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 对于点 $x = 0, x = l$ 均作偶延拓,即

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 < x < l \\ \varphi(-x), & -l < x < 0 \\ \text{以 } 2l \text{ 为周期延拓} \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & 0 < x < l \\ \psi(-x), & -l < x < 0 \\ \text{以 } 2l \text{ 为周期延拓} \end{cases}$$

若 $\left[\frac{x+at}{l}\right] = m, \left[\frac{x-at}{l}\right] = n$, 则有

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{ \varphi[(-1)^m(x+at) + (-1)^{m-1}(m+\delta_m)l] + \varphi[(-1)^n(x-at) + (-1)^{n-1}(n+\delta_n)l] \} + \frac{1}{2a} [(-1)^n \int_{(-1)^n(x-at)+(-1)^{n-1}(n+\delta_n)l}^{(1-\delta_n)l} \psi(t) dt + (-1)^m \int_{\delta_n l}^{(-1)^m(x+at)+(-1)^{m-1}(m+\delta_m)l} \psi(t) dt] + \frac{1}{2a}(m-n-1) \int_0^l \psi(t) dt$$

其中, $\delta_k = \begin{cases} 0, k \text{ 为偶数} \\ 1, k \text{ 为奇数} \end{cases}$

定理 2 对于问题(1)、(3),对函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 关于 $x = 0$ 作奇延拓,对函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 关于 $x = l$ 作偶延拓即

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\varphi(x+2l), & -2l < x < -l \\ -\varphi(-x), & -l < x < 0 \\ \varphi(x), & 0 < x < l \\ \varphi(2l-x), & l < x < 2l \\ \text{以 } 4l \text{ 为周期延拓} \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} -\psi(x+2l), & -2l < x < -l \\ -\psi(-x), & -l < x < 0 \\ \psi(x), & 0 < x < l \\ \psi(2l-x), & l < x < 2l \\ \text{以 } 4l \text{ 为周期延拓} \end{cases}$$

若 $\left[\frac{x+at}{l}\right] = m, \left[\frac{x-at}{l}\right] = n$, 则有

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{ (-1)^{\frac{m-\delta_m}{2}} \varphi[(-1)^m(x+at) + (-1)^{m-1}(m+\delta_m)l] + (-1)^{\frac{n-\delta_n}{2}} \varphi[(-1)^n(x-at) + (-1)^{n-1}(n+\delta_n)l] \} + \frac{1}{2a} \left[\int_{(-1)^n(x-at)+(-1)^{n-1}(n+\delta_n)l}^l (-1)^{\frac{n+\delta_n}{2}} \psi(t) dt + \int_l^{(-1)^m(x+at)+(-1)^{m-1}(m+\delta_m)l} (-1)^{\frac{m+\delta_m}{2}} \psi(t) dt \right]$$

其中 δ_k 定义同定理 1。

2 结论证明

定理 1 的证明:首先问题(1)、(2)的解可用达朗贝尔公式表示

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\Phi(x+at) + \Phi(x-at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau \tag{4}$$

由引理 1、引理 2 以及 $\Phi(x), \Psi(x)$ 均为关于 $x = 1, x = l$ 的偶函数,可知 $u_x(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0$, 满足边值条件。

由 $\Phi(x), \Psi(x)$ 的定义,容易得到

$$\Phi(x) = \varphi[(-1)^p x + (-1)^{p-1}(p+\delta_p)l], p = \left[\frac{x}{l}\right] \tag{5}$$

$$\Psi(x) = \psi[(-1)^q x + (-1)^{q-1}(q+\delta_q)l], q = \left[\frac{x}{l}\right] \tag{6}$$

分析积分部分,将问题分情况讨论:

(1) n 为偶数, m 为偶数

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = \int_{x-at}^{(n+1)l} \Psi(\tau) d\tau + \int_{(n+1)l}^{(n+2)l} \Psi(\tau) d\tau + \dots + \int_{(m-1)l}^{ml} \Psi(\tau) d\tau +$$

$$\int_{ml}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = K_1 + K_2 + K_3$$

$$K_1 = \int_{x-at}^{(n+1)l} \Psi(\tau) d\tau = \int_{x-at}^{(n+1)l} \psi(x - nl) dx = \int_{x-at-nl}^l \psi(t) dt$$

由于 $\Psi(x)$ 是关于 $x = 0, l$ 的偶函数, 所以对于 $k \in Z$ 有

$$\int_{kl}^{(k+1)l} \Psi(\tau) d\tau = \int_0^l \Psi(x) dx$$

进而

$$K_2 = \int_{(n+1)l}^{(n+2)l} \Psi(\tau) d\tau + \dots + \int_{(m-1)l}^{ml} \Psi(\tau) d\tau =$$

$$\int_{(n+1)l}^{(n+2)l} \psi(-x + (n+2)l) d\tau +$$

$$\int_{(n+2)l}^{(n+3)l} \psi(x - (n+2)l) d\tau \dots +$$

$$\int_{(m-1)l}^{ml} \psi(-x + ml) d\tau =$$

$$(m - n - 1) \int_0^l \psi(t) dt$$

$$K_3 = \int_{ml}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = \int_{ml}^{x+at} \psi(x - ml) dx =$$

$$\int_0^{x+at-ml} \psi(t) dt$$

综合

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = \int_{x-at-nl}^l \psi(t) dt + \int_0^{x+at-ml} \psi(t) dt +$$

$$(m - n - 1) \int_0^l \psi(t) dt$$

(2) n 为奇数, m 为偶数

同理,

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = - \int_{-(x-at)+(n+1)l}^0 \psi(t) dt + \int_0^{x+at-ml} \psi(t) dt +$$

$$(m - n - 1) \int_0^l \psi(t) dt$$

(3) n 为偶数, m 为奇数

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = \int_{x-at+nl}^0 \psi(t) dt - \int_l^{-(x+at)+(m+1)l} \psi(t) dt +$$

$$(m - n - 1) \int_0^l \psi(t) dt$$

(4) n 为奇数, m 为奇数

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = - \int_{-(x-at)+(n+1)l}^0 \psi(t) dt -$$

$$\int_l^{-(x+at)+(m+1)l} \psi(t) dt +$$

$$(m - n - 1) \int_0^l \psi(t) dt$$

所以

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = (-1)^n \int_{(-1)^n(x-at)+(-1)^{n+1}(n+\delta_n)l}^{(1-\delta)l} \psi(t) dt +$$

$$(-1)^m \int_{\delta_2 l}^{(-1)^m(x+at)+(-1)^{m-1}(n+\delta_n)l} \psi(t) dt +$$

$$(m - n - 1) \int_0^l \psi(t) dt \quad (7)$$

将式(5)、式(7)代入式(4), 定理1 证毕。

定理2 的证明: 方法类似于定理1, 由引理1、引理2 以及 $\Phi(x), \Psi(x)$ 的定义, 可知 $u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0$; 易知

$$\Phi(x) = (-1)^{\frac{p-\delta_p}{2}} \varphi[(-1)^p x + (-1)^{p-1} (p + \delta_p) l] \quad (8)$$

$$\Psi(x) = (-1)^{\frac{q-\delta_q}{2}} \psi[(-1)^q x + (-1)^{q-1} (p + \delta_q) l] \quad (9)$$

其中 $p = \lfloor \frac{x}{l} \rfloor, q = \lfloor \frac{x}{l} \rfloor$, 分析积分部分, 分情况讨论:

(1) n 为偶数, m 为偶数

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = \int_{x-at}^{(n+1)l} \Psi(\tau) d\tau + \int_{(n+1)l}^{(n+3)l} \Psi(\tau) d\tau + \dots +$$

$$\int_{(m-3)l}^{(m-1)l} \Psi(\tau) d\tau + \int_{(m-1)l}^{ml} \Psi(\tau) d\tau +$$

$$\int_{ml}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau =$$

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

由(9)式可知

$$K_1 = \int_{x-at}^{(n+1)l} \Psi(\tau) d\tau =$$

$$\int_{x-at}^{(n+1)l} (-1)^{\frac{+}{-}} \psi(x - nl) dx =$$

$$\int_{x-at-nl}^l (-1)^{\frac{+}{-}} \psi(t) dt$$

因为 $\Psi(x)$ 是关于 $2kl (k \in Z)$ 的奇函数, 且 m, n 均为偶数, 所以

$$\int_{(n+1)l}^{(n+3)l} \Psi(\tau) d\tau = \dots = \int_{(m-1)l}^{ml} \Psi(\tau) d\tau = 0, \text{ ie } K_2 = 0$$

同理

$$K_3 = \int_{(m-1)l}^{ml} \Psi(\tau) d\tau =$$

$$\int_{(m-1)l}^{ml} (-1)^{\frac{m-2}{2}} \psi(-x + ml) dx =$$

$$\int_1^0 (-1)^{\frac{m}{2}} \psi(t) dt$$

$$K_4 = \int_{ml}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau =$$

$$\int_{ml}^{x+at} (-1)^{\frac{m}{2}} \psi(x - ml) dx =$$

$$\int_0^{x+at-ml} (-1)^{\frac{m}{2}} \psi(t) dt$$

所以可得

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = \int_{x-at-ml}^l (-1)^{\frac{n}{2}} \psi(t) dt +$$

$$\int_1^{x+at-ml} (-1)^{\frac{m}{2}} \psi(t) dt$$

(2) n 为奇数, m 为偶数

同理,

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = \int_{-(x-at)+(n+1)l}^l (-1)^{\frac{n+1}{2}} \psi(t) dt +$$

$$\int_l^{x+at-ml} (-1)^{\frac{m}{2}} \psi(t) dt$$

(3) n 为偶数, m 为奇数

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = \int_{x-at-ml}^l (-1)^{\frac{n}{2}} \psi(t) dt +$$

$$\int_1^{-(x+at)+(m+1)l} (-1)^{\frac{m+1}{2}} \psi(t) dt$$

(4) n 为奇数, m 为奇数

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = \int_{-(x-at)+(n+1)l}^l (-1)^{\frac{n+1}{2}} \psi(t) dt +$$

$$\int_l^{-(x+at)+(m+1)l} (-1)^{\frac{m+1}{2}} \psi(t) dt$$

综合可得

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\tau) d\tau = \int_{(-1)^n(x-at)+(-1)^{n+1}(n+\delta_n)l}^l (-1)^{\frac{n+\delta_n}{2}} \psi(t) dt +$$

$$\int_1^{(-1)^n(x+at)+(-1)^{n+1}(n+\delta_n)l} (-1)^{\frac{m+\delta_m}{2}} \psi(t) dt \quad (10)$$

将式(8)、式(10)代入式(4),定理2证毕。

推论 1 当边值条件为 $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, t \geq 0$, 解为

$$u(x,t) =$$

$$\frac{1}{2} \{ (-1)^m \varphi [(-1)^m (x + at) + (-1)^{m-1} (m + \delta_m) l] +$$

$$(-1)^n \varphi [(-1)^n (x - at) + (-1)^{n-1} (n + \delta_n) l] \} +$$

$$\frac{1}{2a} \int_{(-1)^n(x-at)+(-1)^{n+1}(n+\delta_n)l}^{(-1)^n(x+at)+(-1)^{n+1}(n+\delta_n)l} \psi(t) dt$$

推论 2 当边值条件为 $u_x(0,t) = 0, u(l,t) = 0, t \geq 0$, 解为

$$u(x,t) =$$

$$\frac{1}{2} \{ (-1)^{\frac{m+\delta_m}{2}} \varphi [(-1)^m (x + at) + (-1)^{m-1} (m + \delta_m) l] +$$

$$(-1)^{\frac{n+\delta_n}{2}} \varphi [(-1)^n (x - at) + (-1)^{n-1} (n + \delta_n) l] \} +$$

$$\frac{1}{2a} \left[\int_{(-1)^n(x-at)+(-1)^{n+1}(n+\delta_n)l}^0 (-1)^{\frac{n-\delta_n}{2}} \psi(t) dt \right.$$

$$\left. \int_0^{(-1)^n(x+at)+(-1)^{n+1}(n+\delta_n)l} (-1)^{\frac{m-\delta_m}{2}} \psi(t) dt \right]$$

证明过程类似定理 1, 定理 2, 在此省略。

3 实例

求解如下混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = x, u_t(x,0) = x^2 \\ u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

解 利用定理 1 中的公式, 已知 $\varphi(x) = x, \psi(x) = x^2$, 为了简便起见, 不妨设 $\left[\frac{x+t}{l} \right] = 4, \left[\frac{x-t}{l} \right] = 5$, 那

么在区域 $D = \{ (x,t) \mid 3l < x+t < 4l, 4l < x-t < 5l \}$ 中, 以上混合问题的解可以表示为

$$u(x,t) = t + l + \frac{1}{2} \left(- \int_{-(x-t)+6l}^0 t^2 dt + \int_0^{x+t-4l} t^2 dt \right) =$$

$$t + l + \frac{1}{6} (-x+t+6l)^3 + \frac{1}{6} (x+t+4l)^3$$

其他区域同理, 这也体现了在不同区域, 由于沿各边界反射次数不同, 所以得到不同形式的解, 反映出波的反射原理的实质。

参考文献:

- [1] 朱长江, 邓引斌. 偏微分方程教程[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [2] 谷超豪, 李大潜, 陈恕行, 等. 数学物理方程[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1996.
- [3] 陈恕行, 秦铁虎, 周忆. 数学物理方程[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2003.
- [4] 姜玲玉. 关于波动方程混合问题的特征线方法[J]. 数学杂志, 2004, 24(5): 577-580.
- [5] 赵天玉, 毛占军. 求解波动方程混合问题的通解函数延拓法[J]. 长江大学学报: 自然科学版, 2005, 2(1): 4-9.
- [6] 王心平. 分离变量法在求解波动方程中的应用[J]. 科技视界, 2014, 35: 60-61.
- [7] 赵福焱, 宋二祥. 有限一维弹性波动问题的公理化求

- 解及其在自由场中的应用[J].工程力学,2015(4):47-53.
- [8] 杜心华.一类非线性波动方程混合问题整体解的存在唯一性[J].四川师范大学学报:自然科学版,1994(4):10-14.
- [9] 杨萌.可控一维波动方程的边值混合问题[J].湖北理工学院学报,2008(6):55-58.
- [10] 梁志辉,李之杰.一维波动方程混合问题的差分分解[J].内蒙古民族大学学报,2009(2):5-6.
- [11] 赵天玉.求解波动方程混合问题的曲线积分法[J].长沙大学学报,2005(2):1-3.
- [12] 林琼桂.高维波动方程与热传导方程非齐次边界条件的一般处理[J].大学物理,2015(5):1-4.
- [13] WALTER A S. Partial Differential Equations-An Introduction[M]. New York: John Wiley&Sons Inc, 1992.
- [14] RAUCH J. Partial Differential Equations [M]. New York:Springer-Verlag,1991.
- [15] 洪洁.一类非线性波动方程混合问题解的爆破[J].兰州理工大学学报,2004(3):124-126.

The General Solution to Mixed Problem of a 1D Wave Equation

FAN Long

(School of Coal Engineering, Shanxi Datong University, Datong 037000, China)

Abstract: The mixed problem of 1D wave equation is an important model in physics. The most commonly used method is the principle of reflection wave, which calculates the number of reflection on the boundary to obtain the solution of the problem, but the disadvantage of this method is that the scale of calculation is large and general formula is not given, at the same time, the essence of reflection is not reflected. Another method is the Fourier series which is also hard to calculate. With method of Fourier series, ordinary differential equations can be obtained by separation of variables, then the problem is solved by using characteristic method. In the purpose of simplifying the calculation, taking corresponding extension of initial value $\varphi(x)$, $\psi(x)$ according to the boundary value, the problem can be simplified into the form of initial problem, then the solution in R can be got by using D'Alambert's formula, and the general solution is the restriction of global solution on $[0, l]$, meanwhile the result is general.

Key words: wave equation; D'Alambert's formula; extensions