

# 双重 Stone 代数的核理想

赵秀兰<sup>1</sup>, 陈丽娟<sup>2</sup>

(1. 黄河科技学院数理部, 郑州 450063; 2. 河南工程学院理学院, 郑州 451191)

**摘要:**理想是研究 Ockham 代数类结构的一个重要工具,在双重 Stone 代数上引入核理想的概念,构造了核理想同余关系表达式,获得了双重 Stone 代数核理想判别定理。根据双重 Stone 代数的运算特征及主同余表示理论,获得了核理想同余关系的若干等价表达式并证明了双重 Stone 代数核理想与其同余关系是同构的。所得结论为其它 Ockham 代数类核理想性质的研究提供了方法,丰富了 Ockham 代数的发展,为进一步研究 Ockham 代数类的代数结构提供理论支持。

**关键词:**Stone 代数;对偶 Stone 代数;双重 Stone 代数;核理想;同余关系

**中图分类号:**O153.1

**文献标志码:**A

Ockham 代数<sup>[1]</sup>是定义在分配格上的一类序代数,布尔代数、de Morgan 代数、Stone 代数、伪补代数等是 Ockham 代数的子代数。作为 Stone 代数、de Morgan 代数的共同概括,Blyth 引入 MS 代数<sup>[2]</sup>的概念,给出了 MS 代数的运算性质,获得了 MS 代数主同余表示定理。在序代数结构的研究中,常根据理想和滤子的性质来反映序代数结构。文献[3-13]以理想与滤子为工具刻画代数结构。文献[5]证明了 PO 代数类上具有余核滤子的最小同余和最大同余。文献[9]研究了平衡半拟补 Ockham 代数的余核滤子和稠密滤子的特征,并刻画这些滤子的某些同余一致与同余凝聚性质。文献[10]分别就双重伪补代数的假值理想、假值同余和几乎伪补格的核理想与 W-理想<sup>[11]</sup>给出了特征表示。本文将在此基础上构造双重 Stone 代数核理想同余关系表达式,论证核理想与其同余关系之间的关联性。

## 1 预备知识

**定义 1**<sup>[1]</sup> 设  $(L; \wedge, \vee, 0, 1)$  是一个有界分配格,  $f$  是  $L$  上的一元运算,若:

$$(1) \forall x, y \in L, f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y), f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$$

$$(2) f(0) = f(1), f(1) = f(0)$$

则称  $(L; \wedge, \vee, f, 0, 1)$  是一个 Ockham 代数(简记为  $O$ )。

**定义 2**<sup>[1]</sup> 一个伪补代数(简称 p-代数)是一个分配格  $(L; \vee, \wedge)$ , 它具有一个最小元  $0$  及一个映射  $*$ :  $L \rightarrow L$  使得  $x^* = \max\{y \mid x \wedge y = 0\}$ 。

一个伪补代数  $(L; \wedge, \vee, *, 0, 1)$ , 如果运算  $*$  满足条件:  $\forall x \in L, x^* \vee x^{**} = 1$ , 称  $(L; \wedge, \vee, *, 0, 1)$  为 Stone 代数。

对偶地,附加的一元运算  $^+$ :  $L \rightarrow L$ , 使得  $x^+ = \min\{y \mid x \vee y = 1\}$ , 且运算  $^+$  满足条件  $\forall x \in L, x^+ \wedge x^{++} = 0$ , 称  $(L; \vee, \wedge, ^+, 0, 1)$  是对偶 Stone 代数。

**定义 3**<sup>[1]</sup> 设  $(L; \wedge, \vee, 0, 1)$  是一个有界分配格, 其上赋予两个一元运算  $*$ ,  $^+$ , 并且  $(L; \vee, \wedge, *)$  是 Stone 代数,  $(L; \vee, \wedge, ^+)$  是对偶 Stone 代数, 称  $(L; \vee, \wedge, *, ^+)$  是一个双重 Stone 代数。

**引理 1**<sup>[1,14-15]</sup> 设  $(L; \vee, \wedge, *, ^+)$  是一个双重 Stone 代数,任意的  $x, y \in L$ , 则

$$(1) x^* \leq x^+;$$

$$(2) x^{**} = x^{++} \leq x \leq x^{***} = x^{+++};$$

$$(3) 0^* = 1, 1^* = 0, x^* = x^{***}, 0^+ = 1, 1^+ = 0, x^+ = x^{+++};$$

收稿日期:2016-12-20

基金项目:国家自然科学基金(11302072);河南省基础与前沿技术研究(152300410129)

作者简介:赵秀兰(1982-),女,河南商水人,副教授,硕士,主要从事格论与序代数结构方面的研究,(E-mail)xiulanz@126.com

- (4)  $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*, (x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$ ;
- (5)  $(x \wedge y)^+ = x^+ \vee y^+, (x \vee y)^+ = x^+ \wedge y^+$ ;
- (6)  $x^* \vee x^{**} = 1, x^+ \vee x^{++} = 1$ 。

**定义 4** 设  $(L; \vee, \wedge, *, +)$  是一个双重 Stone 代数,  $\theta$  是  $L$  的格同余关系, 若  $(x, y) \in \theta \Rightarrow (x^*, y^*) \in \theta, (x^+, y^+) \in \theta$ , 则称  $\theta$  是  $L$  的同余关系, 符号  $ConL$  表示  $L$  的全体同余关系构成的集合。

**引理 2**<sup>[1]</sup> 设  $(L; \vee, \wedge, \circ, +)$  是一个双重 MS 代数,  $a, b \in L, a \leq b$ , 则

$$\theta(a, b) = \theta_{lat}(a, b) \vee \theta_{lat}(b^0, a^0) \vee \theta_{lat}(a^{00}, b^{00}) \vee \theta_{lat}(b^+, a^+) \vee \theta_{lat}(a^{++}, b^{++})$$

双重 Stone 代数是双重 MS 代数的子代数, 故双重 Stone 代数  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  的主同余关系式为:

$$\theta(a, b) = \theta_{lat}(a, b) \vee \theta_{lat}(b^*, a^*) \vee \theta_{lat}(a^{**}, b^{**}) \vee \theta_{lat}(b^+, a^+) \vee \theta_{lat}(a^{++}, b^{++})$$

**定义 5** 设  $(L; \wedge, \vee)$  是一个格,  $I$  是格  $L$  的子格, 若  $x, y \in L, y \leq x \in I$  总有  $y \in I$ , 称子格  $I$  是格  $L$  的理想。

对偶地,  $F$  是格  $L$  的子格, 若  $x, y \in L, y \geq x \in F$  总有  $y \in F$ , 称子格  $F$  是格  $L$  的滤子。

**定义 6** 设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数, 对于  $L$  的理想  $I$ , 若存在  $L$  的一个同余关系  $\varphi$ , 使得  $I = Ker \varphi$ , 其中  $Ker \varphi = \{x \in L | x \equiv 0(\varphi)\}$ , 称理想  $I$  为  $L$  的核理想。

便于阐述, 假定  $L$  是双重 Stone 代数,  $a, b \in L, F \subseteq L$ , 符号  $\theta(a, b)$  和  $\theta_{lat}(a, b)$  分别表示包含  $a, b$  的最小同余与最小格同余(即由  $a, b$  所生成的主同余和格主同余), 用  $\theta(F)$  和  $\theta_{lat}(F)$  分别表示包含  $F$  的最小同余与最小格同余(即由  $F$  所生成的主同余和格主同余)。

## 2 核理想的性质

给出双重 Stone 代数核理想判别定理。

**定理 1** 设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I$  是  $L$  的理想, 则  $I$  是核理想的充要条件是  $(a \in L) a \in I \Rightarrow a^{**} \in I$ 。

**证明** 充分性 若  $I$  是  $L$  的核理想, 则存在  $\varphi \in ConL$ , 使得  $I = Ker \varphi$ 。设  $a \in I$ , 故  $a \equiv 0(\varphi)$ , 从而  $a^{**} \equiv 0(\varphi)$ , 所以  $a^{**} \in I$ 。

必要性 设  $a \in L, a \in I$  蕴涵  $a^{**} \in I$ 。在  $L$  上定义一个等价关系  $\delta_I: (x, y) \in \delta_I \Leftrightarrow (\exists i \in I) x \vee i = y \vee i$ 。易得,  $\delta_I$  是一个格同余。

现证  $\delta_I \in ConL$ 。设  $(x, y) \in \delta_I$ , 则存在  $i \in I$ , 使得  $x \vee i = y \vee i$ 。从而有

$$x^* \wedge i^* = y^* \wedge i^*, x^+ \wedge i^+ = y^+ \wedge i^+ \\ i^{**} \vee (x^* \wedge i^*) = i^{**} \vee (y^* \wedge i^*), i^{++} \vee (x^+ \wedge i^+) =$$

$$i^{++} \vee (y^+ \wedge i^+)$$

由引理 1 知,  $i^* \vee i^{**} = 1, i^+ \vee i^{++} = 1$ , 根据双重 Stone 代数运算的分配性可得  $i^{**} \vee x^* = i^{**} \vee y^*, i^{++} \vee x^+ = i^{++} \vee y^+$ 。在双重 Stone 代数中, 由引理 1 知, 任意的  $x \in L, x^{**} \leq x \leq x^{**}$ , 所以可得  $i^{**} \vee x^* = i^{**} \vee y^*$ 。由题设知,  $i^{**} \in I$ 。所以  $(x^*, y^*) \in \delta_I, (x^+, y^+) \in \delta_I$ , 因此  $\delta_I \in ConL$ 。

下证  $I = Ker \delta_I$ 。设  $x \in Ker \delta_I$ , 即  $(x, 0) \in \delta_I$ , 则存在  $i \in I$ , 使得  $x \vee i = 0$ , 从而  $x \leq i \in I$ , 故  $x \in I$ , 因此  $Ker \delta_I \subseteq I$ 。另一方面, 设  $i \in I$ , 由题设知  $i^{**} \in I$ 。由引理 1 知,  $i \leq i^{**}$ , 故  $i \in Ker \delta_I$ , 从而有  $I \subseteq Ker \delta_I$ 。所以  $I = Ker \delta_I$ 。

设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数, 由定理 1 知,  $\delta_I \in ConL$  且  $I = Ker \delta_I$ , 进一步可得  $\delta_I$  的其它性质。记  $I(L)$  和  $KI(L)$  分别为  $L$  的所有理想与所有核理想构成的集合。 $I(L), KI(L)$  具有下列性质。

**推论 1** 设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I, J \in KI(L)$ , 则

- (1)  $(\forall \varphi \in ConL) I = Ker \varphi \Rightarrow \delta_I \leq \varphi$ ;
- (2)  $I \leq J \Leftrightarrow \delta_I \leq \delta_J$ 。

**证明** (1) 设  $\varphi \in ConL$  且  $I = Ker \varphi$ , 若  $(x, y) \in \delta_I$ , 则存在  $i \in I$ , 使得  $x \vee i = y \vee i$ 。又有  $i \in I$ , 故  $(i, 0) \in \varphi$ , 所以  $(x \vee i, x) \in \varphi, (y \vee i, y) \in \varphi$ , 因此  $x \overset{\varphi}{\equiv} x \vee i = y \vee i \overset{\varphi}{\equiv} y$ , 故  $(x, y) \in \varphi$ , 所以  $\delta_I \leq \varphi$ 。

(2) 设  $I, J \in KI(L)$ , 且  $I \leq J$ 。由  $\delta_I, \delta_J$  的定义知,  $\delta_I \leq \delta_J$ 。另一方面, 若  $\delta_I \leq \delta_J$ , 则  $Ker \delta_I \leq Ker \delta_J$ , 又由定理 1 的证明知,  $I = Ker \delta_I, J = Ker \delta_J$ , 所以  $I \leq J$ 。

**定理 2**  $KI(L)$  是  $I(L)$  的一个子格。

**证明** 令  $I, J \in KI(L)$ , 下证  $I \wedge J, I \vee J \in KI(L)$ 。

设  $x \in I \wedge J$ , 则  $x \in I, x \in J$ 。又因  $I, J \in KI(L)$ , 由定理 1 知,  $x^{**} \in I$  且  $x^{**} \in J$ 。故  $x^{**} \in I \wedge J$ , 又由定理 1 知,  $I \wedge J \in KI(L)$ 。令  $x \in I \vee J$ , 由文献[16]知, 存在  $i \in I$  及  $j \in J$ , 使得  $x \leq i \vee j$ , 从而  $x^{**} \leq i^{**} \vee j^{**}$ 。又因  $I, J \in KI(L)$ , 所以由定理 1 知,  $i^{**} \in I$  且  $j^{**} \in J$ 。因此  $x^{**} \in I \vee J$ 。从而由定理 1 得  $I \vee J \in KI(L)$ 。所以  $KI(L)$  是  $I(L)$  的一个子格。

## 3 核理想的同余关系

设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I$  是  $L$  的核理想, 定义  $F_I = \{x \in L | (\exists a \in I) x \geq a^*\}$ , 显然,  $F_I$  是  $L$  的滤子, 现有如下结论。

**定理 3** 设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I$  是  $L$  的核理想, 则  $\theta(I) = \theta_{lat}(I) \vee \theta_{lat}(F_I)$ 。

**证明** 设  $a, b \in L$  且  $a \leq b$ , 由引理 2 知,

$$\theta(a,b) = \theta_{lat}(a,b) \vee \theta_{lat}(b^*,a^*) \vee \theta_{lat}(a^{**},b^{**}) \vee \theta_{lat}(b^+,a^+) \vee \theta_{lat}(a^{++},b^{++})$$

由定理1知,  $a^{**}, b^{**} \in I$ , 又因  $a^{++} \leq a, a^+ \geq a^*$ ,  $b^{++} \leq b, b^+ \geq b^*$ , 故  $a^{++}, b^{++} \in I, a^*, b^*, a^+, b^+ \in F_I$ , 故  $\theta_{lat}(a,b), \theta_{lat}(a^{**}, b^{**}), \theta_{lat}(a^{++}, b^{++}) \leq \theta_{lat}(I), \theta_{lat}(b^*, a^*), \theta_{lat}(b^+, a^+) \leq \theta_{lat}(F_I)$  于是,  $\theta(a,b) \leq \theta_{lat}(I) \vee \theta_{lat}(F_I)$ . 由文献[16]知,  $\theta(I) = \bigvee \{ \theta(a,b) \mid a, b \in I \}$ , 所以  $\theta(I) \leq \theta_{lat}(I) \vee \theta_{lat}(F_I)$ .

另一方面, 易见  $\theta_{lat}(I) \leq \theta(I)$ . 设  $a, b \in F_I$  且  $a \leq b$ , 由  $F_I$  的定义知, 存在  $c \in I$ , 使得  $b \geq a \geq c^*$ . 又因  $(0, c) \in \theta(I)$ , 因此  $(c^*, 1) \in \theta(I)$ , 故  $(a \vee c^*, a \vee 1) \in \theta(I), (b \vee c^*, b \vee 1) \in \theta(I)$ , 从而有,  $(a, 1) \in \theta(I), (b, 1) \in \theta(I)$ , 故得  $(a, b) \in \theta(I)$ .

又由文献[16]知,  $\theta(F_I) = \bigvee \{ \theta(a,b) \mid a, b \in F_I \}$ , 因此有  $\theta(F_I) \leq \theta(I)$ , 所以  $\theta_{lat}(I) \vee \theta_{lat}(F_I) \leq \theta(I)$ . 因此  $\theta(I) = \theta_{lat}(I) \vee \theta_{lat}(F_I)$ .

进一步地, 用另一种形式刻画  $\theta(I)$ .

**定理4** 设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I$  是  $L$  的核理想, 则

$$(x,y) \in \theta(I) \Leftrightarrow (\exists a,b \in I)(x \vee a) \wedge b^* = (y \vee a) \wedge b^*$$

**证明** 定义  $L$  上一个等价关系  $\varphi$ :

$$(x,y) \in \varphi \Leftrightarrow (\exists a,b \in I)(x \vee a) \wedge b^* = (y \vee a) \wedge b^*$$

易见,  $\varphi$  是一个格同余关系。

下证  $\varphi \in ConL$ . 设  $(x,y) \in \varphi$ , 则存在  $a, b \in I$ , 使得  $(x \vee a) \wedge b^* = (y \vee a) \wedge b^*$ . 故

$$(x^* \wedge a^*) \vee b^{**} = (y^* \wedge a^*) \vee b^{**}$$

$$(x^+ \wedge a^+) \vee b^{**} = (y^+ \wedge a^+) \vee b^{**}$$

根据运算的分配性有,

$$(x^* \vee b^{**}) \wedge (a^* \vee b^{**}) = (y^* \vee b^{**}) \wedge (a^* \vee b^{**})$$

$$(x^+ \vee b^{**}) \wedge (a^+ \vee b^{**}) = (y^+ \vee b^{**}) \wedge (a^+ \vee b^{**})$$

根据 Stone 代数的运算性质有,  $a^* = a^{***}, a^* \vee b^{**} = (a \wedge b^*)^*$ , 且  $a \wedge b^* \leq a \in I$ , 则  $a \wedge b^* \in I$ . 又因  $a^+ \geq a^*$ , 故  $(a^+ \vee b^{**}) \wedge a^* = a^*$ , 因此  $(x^+ \vee b^{**}) \wedge (a^{**})^* = (y^+ \vee b^{**}) \wedge (a^{**})^*$ . 又因  $I$  是  $L$  的核理想, 由定理1知,  $a^{**}, b^{**} = b^{**} \in I$ , 所以  $(x^*, y^*), (x^+, y^+) \in \varphi$ . 因此  $\varphi \in ConL$ .

现证  $\varphi = \theta(I)$ . 设  $(x,y) \in \varphi$ , 则存在  $a, b \in I$ , 使得  $(x \vee a) \wedge b^* = (y \vee a) \wedge b^*$ . 因为  $(a, 0) \in \theta_{lat}(I), (b^*, 1) \in \theta_{lat}(F_I)$ , 所以  $(x, x \vee a) \in \theta_{lat}(I), ((x \vee a) \wedge b^*, x \vee a) \in \theta_{lat}(F_I)$ , 因此  $(x, (x \vee a) \wedge b^*) \in \theta_{lat}(I) \vee \theta_{lat}(F_I)$ .

$$b^*) \in \theta_{lat}(I) \vee \theta_{lat}(F_I).$$

同理可得,  $(y, (y \vee a) \wedge b^*) \in \theta_{lat}(I) \vee \theta_{lat}(F_I)$ . 所以  $(x,y) \in \theta_{lat}(I) \vee \theta_{lat}(F_I)$ , 即  $\varphi \leq \theta_{lat}(I) \vee \theta_{lat}(F_I)$ , 由定理3知,  $\varphi \leq \theta(I)$ .

另一方面, 设  $(x,y) \in \theta(I) = \theta_{lat}(I) \vee \theta_{lat}(F_I)$ , 则存在  $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1} = y$  且  $(x_i, x_{i+1}) \in \theta_{lat}(I)$  或者  $(x_i, x_{i+1}) \in \theta_{lat}(F_I) (i = 0, 1, 2, \dots, n-2)$ .

不失一般性, 假设  $x = x_0 \equiv_{\theta_{lat}(I)} x_1 \equiv_{\theta_{lat}(F_I)} x_2 \equiv_{\theta_{lat}(I)} x_3 \equiv_{\theta_{lat}(F_I)} \dots \equiv_{\theta_{lat}(I)} x_{n-1} = y$ , 则存在  $i_1, i_2, \dots, i_l \in I$  及  $j_1, j_2, \dots, j_s \in I$ , 使得  $x \vee i_1 = x_1 \vee i_1, x_1 \wedge j_1^* = x_2 \wedge j_1^*, x_2 \vee i_2 = x_3 \vee i_2, x_3 \wedge j_2^* = x_4 \wedge j_2^*, \dots$ , 现令  $i = \bigvee_{k=1}^l i_k, j = \bigvee_{r=1}^s j_r$ , 易见  $i, j \in I$ , 故有

$$(x \vee i) \wedge j^* = (x \vee (\bigvee_{k=1}^l i_k)) \wedge (\bigwedge_{r=1}^s j_r^*) = (x_1 \vee (\bigvee_{k=1}^l i_k)) \wedge (\bigwedge_{r=1}^s j_r^*) = (x_1 \wedge (\bigwedge_{r=1}^s j_r^*)) \vee ((\bigvee_{k=1}^l i_k) \wedge (\bigwedge_{r=1}^s j_r^*)) = (x_2 \wedge (\bigwedge_{r=1}^s j_r^*)) \vee ((\bigvee_{k=1}^l i_k) \wedge (\bigwedge_{r=1}^s j_r^*)) = (x_2 \vee (\bigvee_{k=1}^l i_k)) \wedge (\bigwedge_{r=1}^s j_r^*) = \dots = (y \vee (\bigvee_{k=1}^l i_k)) \wedge (\bigwedge_{r=1}^s j_r^*) = (y \vee i) \wedge j^*$$

因此  $(x,y) \in \varphi$ , 故  $\theta(I) \leq \varphi$ . 定理得证。

**推论2** 设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数,  $I$  是  $L$  的核理想,  $x, y \in L$ , 则下列命题等价:

- (1)  $(x,y) \in \theta(I)$ ;
- (2)  $(\exists a \in I)x \vee a = y \vee a$ ;
- (3)  $(\exists a,b \in I)(x \vee a) \wedge b^* = (y \vee a) \wedge b^*$ .

**证明** 易得, (2)  $\Rightarrow$  (3). 由定理5得, (1)  $\Leftrightarrow$  (3).

下证(3)  $\Rightarrow$  (2). 设存在  $a, b \in I$ , 使得  $(x \vee a) \wedge b^* = (y \vee a) \wedge b^*$ . 因此  $((x \vee i) \wedge b^*) \vee b^{**} = ((y \vee a) \wedge b^*) \vee b^{**}$ .

根据 Stone 代数运算的分配性及运算性质  $b^* \vee b^{**} = 1$ . 所以  $x \vee (a \vee b^{**}) = y \vee (a \vee b^{**})$ . 又由定理1知,  $a, b^{**} \in I$ , 故  $a \vee b^{**} \in I$ , 所以(2)成立。

设  $(L; \vee, \wedge, *, +, 0, 1)$  是一个双重 Stone 代数, 记  $C_k(L) = \{ \delta_I \mid I \in KI(L) \}$ , 其中  $\delta_I$  如定理1中所定义的同余关系,  $C_k(L)$  和  $KI(L)$  之间具有下面的关系。

**定理5**  $C_k(L) \cong KI(L)$ .

**证明** 由  $\delta_I$  的定义得,  $R_{\{0\}} = \omega$  (相等关系) 及  $R_L = \iota$  (泛同余关系). 先证对任意的  $I, J \in KI(L)$ , 有  $\delta_I \wedge \delta_J = \delta_{I \wedge J}$ . 由定理2知,  $I \wedge J \in KI(L)$ . 因为  $I \wedge J \leq I, I \wedge J \leq J$ , 故由推论1知,  $\delta_{I \wedge J} \leq \delta_I, \delta_{I \wedge J} \leq \delta_J$ , 所以  $\delta_{I \wedge J} \leq \delta_I \wedge \delta_J$ .

设  $(x,y) \in \delta_I \wedge \delta_J$ , 由文献[16]知,  $(x,y) \in \delta_I$  且  $(x,y) \in \delta_J$ . 因此存在  $i \in I, j \in J$ , 使得  $x \vee i = y \vee i, x \vee j = y \vee j$ , 于是有  $x \vee (i \wedge j) = y \vee (i \wedge j)$ , 又因

$i \wedge j \in I \wedge J$ , 所以  $(x, y) \in \delta_{i \wedge j}$ . 故  $\delta_i \wedge \delta_j \leq \delta_{i \wedge j}$ . 所以  $\delta_i \wedge \delta_j = \delta_{i \wedge j}$ .

下证若  $I, J \in KI(L)$ , 有  $\delta_i \vee \delta_j = \delta_{i \vee j}$ . 由定理 2 知,  $I \vee J \in KI(L)$ . 由于  $I \vee J \geq I, I \vee J \geq J$ , 由推论 1 知,  $\delta_{i \vee j} \geq \delta_i, \delta_{i \vee j} \geq \delta_j$ , 所以  $\delta_{i \vee j} \geq \delta_i \vee \delta_j$ .

设  $(x, y) \in \delta_{i \vee j}$ , 则存在  $i \in I$  及  $i \in J$ , 使得  $x \vee i \vee j = y \vee i \vee j$ , 故

$$x \stackrel{\delta_i}{=} x \vee i \stackrel{\delta_j}{=} x \vee i \vee j = y \wedge i \wedge j \stackrel{\delta_i}{=} y \wedge j \stackrel{\delta_j}{=} y$$

于是  $(x, y) \in \delta_i \vee \delta_j$ , 因此  $\delta_{i \vee j} \leq \delta_i \vee \delta_j$ , 所以  $\delta_i \vee \delta_j = \delta_{i \vee j}$ .

由定理 1 的证明知, 若  $\delta_i = \delta_j$  当且仅当  $I = \text{Ker}\delta_i = \text{Ker}\delta_j = J$ , 从而映射  $I \rightarrow \delta_i$  建立起  $C_k(L) \rightarrow KI(L)$  的对应, 所以  $C_k(L) \cong KI(L)$ .

### 3 结束语

理想是研究 Ockham 代数类的结构及同余关系的一个重要工具, 特别是核理想, 根据核理想的性质特征, 使人们对抽象的相关 Ockham 代数类的结构及同余关系有一个清晰的认识, 有助于了解双重 Stone 代数的结构, 同时丰富了序代数结构的研究。

#### 参考文献:

- [1] BLYTH T S, VARLET J C. Ockham algebras [M]. Oxford: Oxford University Press, 1994.
- [2] BLYTH T S, VARLET J C. On a common abstraction of de Morgan algebras and Stone algebras [J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1983, 94A: 301-308.
- [3] 黎爱平. 分配 P-代数的核理想 [J]. 赣南师范学院学报, 2006(3): 32-33.

- [4] 黎爱平, 章书文. 双重 stone 代数的素理想与同余关系 [J]. 上饶师范学院学报, 1999, 19(6): 12-15.
- [5] 方捷, 吴丽云. 拟补 Ockham 代数的理想与滤子 [J]. 数学学报, 2004, 47(4): 647-652.
- [6] 赵秀兰, 刘洁. 伪补 MS-代数的核理想与同余关系 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2014, 38(6): 565-568.
- [7] 罗从文. MS-代数的核理想 [J]. 应用数学, 2001, 14(1): 39-41.
- [8] 张小红, 刘三阳, 刘用麟. 伪 MIL-代数 (WPBL-代数) 的正则滤子 [J]. 西安电子科技大学学报: 自然科学版, 2006, 33(5): 829-832.
- [9] 方捷, 沈吓妹. 平衡半伪补 Ockham 代数的滤子 [J]. 模糊系统与数学, 2010, 24(3): 38-45.
- [10] 王雷波, 方捷. 双重伪补代数的假值理想的一点注记 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2012, 28(1): 119-122.
- [11] 王雷波, 方捷. 几乎伪补格的核理想与 W-理想 [J]. 模糊系统与数学, 2012, 26(1): 61-66.
- [12] 牛超群, 吴洪博. BRo 代数中的 \* 理想及其诱导的商代数 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 37(3): 221-224.
- [13] 赵秀兰, 马红娟, 初元红, 等. 双重半伪补 de Morgan 代数的滤子同余关系 [J]. 模糊系统与数学, 2015, 29(4): 19-26.
- [14] 朱怡权. 双重 stone 代数的主同余关系 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2006, 22(4): 520-525.
- [15] 陈杰. 格论初步 [M]. 呼和浩特: 内蒙古大学出版社, 1990.
- [16] GRATZER G. Lattice Theory [M]. New York: W. H. Freeman and Company, 1971.

## The Kernel Ideal on Double Stone Algebras

ZHAO Xiulan<sup>1</sup>, CHEN Lijuan<sup>2</sup>

(1. Department of Mathematics and Physics, Huanghe Science and Technology College, Zhengzhou 450063, China;

2. College of Science, Henan Institute of Engineering, Zhengzhou 451191, China)

**Abstract:** The concept of kernel ideal on double Stone algebras is introduced. The expression of ideal congruence is constructed and the discrimination theorem of the kernel ideal is obtained. According to the operational characteristics and the principal congruence representation theory of double Stone algebras, some equivalent expressions of the double Stone algebras are obtained. It is proved that the set of kernel ideal is isomorphic to the set of the congruences with the kernel ideal. Based on the conclusion, a method for the study of the properties of the other Ockham algebras is provided, and the theory of ordered algebraic structures is enriched.

**Key words:** Stone algebras; dual Stone algebras; double Stone algebras; kernel ideal; congruence