

# $2k + 1$ 等分 Cantor 集构造的一个基本性质

张 显, 吴 波

(南京财经大学应用数学学院, 南京 210023)

**摘 要:**将三分 Cantor 集构造的一个性质推广到  $2k + 1$  等分 Cantor 集, 利用质量分布原理计算  $2k + 1$  等分 Cantor 集的 Hausdorff 维数。根据三分 Cantor 集的结构与性质, 计算出  $2k + 1$  等分 Hausdorff 集的测度。传统的计算维数的方法需要大量复杂的计算和几乎不提供任何直接启发的估计, 存在一定的局限性, 运用质量分布原理定义区间上的一个质量分布, 可以快捷有效地给出  $2k + 1$  等分 Cantor 集的 Hausdorff 维数的下界。从基本的区间覆盖去估计  $2k + 1$  等分 Cantor 集的 Hausdorff 测度, 对于上界, 只需要估计一个特殊的覆盖。通过对所有的覆盖类进行估计, 即可证得下界。

**关键词:**  $2k + 1$  等分 Cantor 集; 质量分布原理; Hausdorff 维数; Hausdorff 测度

**中图分类号:** O189

**文献标志码:** A

## 引 言

自 19 世纪开始, 人们对分形几何的认识从自然现象过渡到数学问题, 提出了几类典型的分形集, 并对其做出了大量的分析与研究。尤其 19 世纪后期, 经过对分形集性质的深入研究, 分形几何已经正式成为一门独立学科。Hausdorff 在 1919 年引入了 Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数, 为分形几何的研究提供了最基本的工具。Mandelbrot 在前人研究的基础上, 结合自己的研究成果, 在 1975 年出版了关于分形的专著, 标志着分形几何正式成为一门独立的学科<sup>[1]</sup>。

三分 Cantor 集是分形几何研究中的一种人们最了解而又最容易构造的分形, 然而, 它却显示出许多最典型的特征。从单位区间出发, 通过一系列不断地去掉部分子区间的过程来构造三分 Cantor 集。设  $E_0$  是闭区间  $[0, 1]$ <sup>[2]</sup>,  $E_1$  表示由  $E_0$  去掉中间  $\frac{1}{3}$  后所得的集, 即  $E_1$  包含  $[0, \frac{1}{3}]$  和  $[\frac{2}{3}, 1]$  两个区间。再分别去掉这两个区间的中间  $\frac{1}{3}$  后得

到  $E_2$ , 即  $E_2$  包含  $[0, \frac{1}{9}]$ ,  $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ ,  $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ ,  $[\frac{8}{9}, 1]$  四个区间。依次进行下去, 则  $E_k$  是由  $2^k$  个长度各为  $3^{-k}$  的区间组成。三分 Cantor 集  $F$  是由属于所有  $E_k$  的数组成, 即  $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ <sup>[3]</sup>,  $F$  可以看成是集序列当趋于无穷时的极限。显然, 对三分 Cantor 集  $F$  的上界估计, 可以知道其 Hausdorff 维数的上界就是维数的实际数值, 而对其下界的估计却比较困难。因此, Falconer<sup>[4]</sup> 运用质量分布原理给出了三分 Cantor 集  $F$  的一个快捷的下界估计, 即在三分 Cantor 集  $F$  上定义一个质量分布  $\mu$ , 则在构造中可以得出每一个长度为  $3^{-k}$  的  $2^k$  个区间都带有质量  $2^{-k}$ 。设  $|U| < 1$ ,  $k$  为正数, 满足  $3^{-(k+1)} \leq |U| \leq 3^{-k}$ , 则  $U$  最多与  $E_k$  的一个区间相交, 所以  $\mu(U) \leq 2^{-k} = (3^{-k})^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leq (3|U|)^{\frac{\log 2}{\log 3}}$ , 从而得到三分集下界估计为  $\frac{\log 2}{\log 3}$ <sup>[5]</sup>。

## 1 主要内容

### 1.1 $2k + 1$ 等分 Cantor 集的 Hausdorff 维数计算

设  $E_0$  是闭区间  $[0, 1]$ , 第一步, 将闭区间  $[0, 1]$  进行

收稿日期: 2016-10-18

基金项目: 江苏省高校自然科学基金面上项目(13KJB110010)

作者简介: 张 显(1993-), 男, 江苏淮安人, 硕士生, 主要从事调和分析和分形分析方面的研究, (E-mail) 1056454113@qq.com;

吴 波(1982-), 男, 江苏南通人, 副教授, 博士, 主要从事调和分析和分形分析方面的研究, (E-mail) bowu8800@gmail.com

2k + 1 等分,构造出每个长度为 (2k + 1)<sup>-1</sup> 的 2k + 1 个区间,并去掉第 2,4,6,⋯,2k 个开区间:

$$\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{2}{2k+1}\right), \left(\frac{3}{2k+1}, \frac{4}{2k+1}\right), \dots, \left(\frac{2k-1}{2k+1}, \frac{2k}{2k+1}\right)$$

则剩下基本区间长度为 (2k + 1)<sup>-1</sup> 的 k + 1 个闭区间:

$$\left[0, \frac{1}{2k+1}\right], \left[\frac{2}{2k+1}, \frac{3}{2k+1}\right], \dots, \left[\frac{2k}{2k+1}, 1\right]$$

并记

$$E_1 = \left[0, \frac{1}{2k+1}\right] \cup \left[\frac{2}{2k+1}, \frac{3}{2k+1}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{2k}{2k+1}, 1\right]$$

第二步,将 E<sub>1</sub> 中的 k + 1 个闭区间分别继续 2k + 1 等分,构造出每个长度为 (2k + 1)<sup>-2</sup> 的 (k + 1)(2k + 1) 个区间,并去掉每个等分闭区间中的第 2,4,6,⋯,2k 个开区间:

$$\left(\frac{1}{(2k+1)^2}, \frac{2}{(2k+1)^2}\right), \left(\frac{3}{(2k+1)^2}, \frac{4}{(2k+1)^2}\right), \dots, \left(\frac{2k-1}{(2k+1)^2}, \frac{2k}{(2k+1)^2}\right), \dots, \left(\frac{2k(2k+1) + 2k - 1}{(2k+1)^2}, \frac{2k(2k+1) + 2k}{(2k+1)^2}\right)$$

则剩下基本区间长度为 (2k + 1)<sup>-2</sup> 的 (k + 1)<sup>2</sup> 个闭区间:

$$\left[0, \frac{1}{(2k+1)^2}\right], \left[\frac{2}{(2k+1)^2}, \frac{3}{(2k+1)^2}\right], \dots, \left[\frac{2k}{(2k+1)^2}, \frac{2k+1}{(2k+1)^2}\right]$$

并记

$$E_2 = \left[0, \frac{1}{(2k+1)^2}\right] \cup \left[\frac{2}{(2k+1)^2}, \frac{3}{(2k+1)^2}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{2k}{(2k+1)^2}, \frac{2k+1}{(2k+1)^2}\right]$$

第三步,继续上述步骤,第 n 次去掉每个等分区间中的第 2,4,6,⋯,2k 个开区间,则剩下基本区间长度为 (2k + 1)<sup>-n</sup> 的 (k + 1)<sup>n</sup> 个闭区间,并记

$$E_n = \left[0, \frac{1}{(2k+1)^n}\right] \cup \left[\frac{2}{(2k+1)^n}, \frac{3}{(2k+1)^n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{2k(2k+1)^{n-1} + (2k+1)^{n-1}}{(2k+1)^n}, 1\right]$$

由上述步骤依次类推,无限进行,得到一个闭集合列 {E<sub>n</sub>}<sup>[6]</sup>, 则集 F = ⋂<sub>n=0</sub><sup>∞</sup> E<sub>n</sub>。

**定理 1**<sup>[4]</sup> 设 F ⊂ R<sup>n</sup>, F 可以由 N<sub>δ</sub> 个直径最大为 δ 的集覆盖,且当 δ → 0 时, 则

$$\dim_H F \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta}{\log \delta}$$

**定理 2** (质量分布原理)<sup>[4]</sup> 设 μ 是 F 上的质量分

布,且对某个 s 存在 c > 0 和 δ > 0,使 μ(U) ≤ c|U|<sup>s</sup> 对所有满足 |U| ≤ δ 的集 U 成立,则 H<sup>s</sup>(F) ≥ μ(F)/c,且 s ≤ dim<sub>H</sub>F。

**定理 3** 对 2k + 1 等分 Cantor 集 F, 有 dim<sub>H</sub>F =  $\frac{\log k + 1}{\log 2k + 1}$ , 且满足 0 < H<sup>s</sup>(F) < ∞。

**证明** 对每个 n, F 存在一个由 (k + 1)<sup>n</sup> 个长度为 (2k + 1)<sup>-n</sup> 的区间组成的覆盖集,从而 F 可由 (k + 1)<sup>n</sup> 个长度为 (2k + 1)<sup>-n</sup> 的区间自然覆盖,由定理 1, 当 n → ∞, (2k + 1)<sup>-n</sup> → 0 则

$$\dim_H F \leq \frac{\log(k+1)}{\log(2k+1)}$$

现在定义 μ 是由单位质量均匀分布在 F 上所得的质量分布,则在构造 E<sub>n</sub> 中的每一个长度为 (2k + 1)<sup>-n</sup> 的 (k + 1)<sup>n</sup> 个区间都带有质量 (k + 1)<sup>-n</sup>。

设 |U| < 1, n 为正数,若 (2k + 1)<sup>-(n+1)</sup> ≤ |U| ≤ (2k + 1)<sup>-n</sup><sup>[7-8]</sup>, 则 U 最多可与 E<sub>n</sub> 的一个区间相交,所以

$$\mu(U) \leq (k+1)^{-n} \leq [(2k+1)^{-n}]^{\frac{\log(k+1)}{\log(2k+1)}} \leq [(2k+1)|U|]^{\frac{\log(k+1)}{\log(2k+1)}} \leq (2k+1)^{\frac{\log(k+1)}{\log(2k+1)}} |U|^s$$

由质量分布原理, H <sup>$\frac{\log(k+1)}{\log(2k+1)}$</sup> (F) > 0, 得

$$\dim_H F \geq \frac{\log(k+1)}{\log(2k+1)}$$

故

$$\dim_H F = \frac{\log(k+1)}{\log(2k+1)}$$

### 1.2 2k + 1 等分 Cantor 集 Hausdorff 测度估计

由定理 3, 已经确定 2k + 1 等分 Cantor 集的 Hausdorff 维数 s =  $\frac{\log(k+1)}{\log(2k+1)}$ <sup>[9-10]</sup>, 由此出发确定 H<sup>s</sup>(F) 的值。

对任意 n ≥ 1, n 阶基本区间构成的集合恰好为 F 的一个 (2k + 1)<sup>-n</sup> 覆盖, 从而

$$H^s_{(2k+1)^{-n}} \leq \sum_{i=1}^{(k+1)^n} |U_i|^s = \sum_{i=1}^{(k+1)^n} |(2k+1)^{-n}|^s = 1$$

即

$$H^s(F) \leq 1$$

对上界, 只需估计一个特殊的覆盖, 而对于下界, 则需要对所有覆盖类进行估计, 下面只需考虑 F 的开区间覆盖。

设 U = {U<sub>i</sub>} 为 F 的一个开区间覆盖, 由于 F 是紧集, 可从 U 找出一个有限覆盖, 且 U 的任一开区间不包含在 U 的其他任何一个开区间中。

取 U\* = (a, b) ∈ U, 存在 x ∈ U\*, x ∉ F, 从而存在开区间 (x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>), 使 (x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>) ∩ F 为空集。此时, 可将 (x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>) 看作是基本间隔, 令 U<sub>1</sub>\* = (a, x<sub>1</sub>), U<sub>1</sub>\* = (x<sub>2</sub>, b), 则 U<sub>1</sub>\* ∩ U<sub>2</sub>\* = ∅, 得到 F 的一个开区间覆盖 U\* = {U<sub>i</sub>\*}, 其中 U\* 中的元素两两不相交, 并且每个 U<sub>i</sub>\* 都由

基本间隔分开,从而有  $U^s \geq U^{*s}$ 。

令  $L_i = [\inf U_i^* \cap F, \sup U_i^* \cap F]$ , 即  $P = \{L_i\}$  是互不相交的闭区间覆盖且被基本间隔隔开, 并且  $P$  的左右两端各含有一个基本区间, 从而  $U^{*s} \geq P^s$ 。

由  $F$  的构造知,  $L_i = L_{i,1} \cup \epsilon_1 \cup L_{i,2} \cup \dots \cup \epsilon_k \cup L_{i,k+1}$ , 其中  $\epsilon_1$  是包含于  $L_i$  的最大间隔集, 故有  $|\epsilon_i| \geq \frac{1}{k+1}(|L_{i,1}| + |L_{i,2}| + \dots + |L_{i,k+1}|)$ 。由  $x^s$  的凸性以及  $(2k+1)^s = k+1$ , 得

$$|L_i|^s = (|L_{i,1}| + |\epsilon_1| + \dots + |\epsilon_k| + |L_{i,k+1}|)^s \geq \left(\frac{(2k+1)}{k+1}(|L_{i,1}| + \dots + |L_{i,k+1}|)\right)^s = |L_{i,1}|^s + \dots + |L_{i,k+1}|^s$$

则得到一个新的闭区间覆盖  $P_i = \{L_j\}_{j \neq i} \cup \{L_{i,1}, L_{i,2}, \dots, L_{i,k+1}\}$  [11], 使得  $P^s \geq P_i^s$ 。

对上述每个  $i$ , 若  $L_i$  不是基本区间, 则重复上述过程, 因为  $L_i$  左右两端包含的基本区间必有正的长度, 经过有限步后, 上述过程中去掉的  $\epsilon_i$  的长度必与某个  $L_{i,j}$  ( $j = 1, 2, \dots, k+1$ ) 相等, 从而经过有限步后, 所得新的集族  $P^*$  由基本区间组成, 且  $P^s \geq P^{*s}$ 。

令  $P^*$  中最短的基本区间是  $n_0$  阶, 则重复上述过程有限步后, 得到一个由所有  $n_0$  阶基本区间构成的覆盖  $P_{n_0}$ 。因为

$$P_{n_0}^s = \sum_{i=1}^{(k+1)^{n_0}} (2k+1)^{-n_0 i} = (k+1)^{n_0} \cdot (k+1)^{-n_0} = 1$$

则得  $P_{n_0}^s = 1$ , 从而  $H^s(F) \geq 1$ 。结合上界估计, 得到  $H^s(F) = 1$ 。

## 2 结束语

三分 Cantor 集作为最基础的一类分形, 在分形几何

的研究中具有一定价值及应用。本文正是基于三分 Cantor 集自身特殊的构造研究了一类推广形式  $2k+1$  等分 Cantor 集, 运用质量分布原理以及区间覆盖的方法, 计算了其 Hausdorff 维数并得到了其 Hausdorff 测度。

## 参考文献:

- [1] 张从军, 王宏勇, 史平, 等. 数理经济现代分析基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [2] 沙震, 阮火军. 分形与拟合 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2005.
- [3] 董秀英, 刘卫斌. 一类广义非均匀 Cantor 集的 Hausdorff 测度的估计 [J]. 山西大学学报: 自然科学版, 2016, 39(1): 12-16.
- [4] 肯尼斯法尔科内. 分形几何——数学基础及其应用 [M]. 曾文曲, 译. 沈阳: 东北大学出版社, 2001.
- [5] 伍火熊. Cantor 三分集构造方法探微 [J]. 湘潭师范学院学报: 自然科学版, 2005, 27(1): 12-13.
- [6] 苏灵翠, 赵克文.  $\lambda$  等分 Cantor 集构造的一个基本性质 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2006, 27(4): 17-19.
- [7] 张静, 刘鸿博. 一类 Weierstrass 型函数图像的 Box 维数 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2013, 26(5): 74-76.
- [8] 张建宏, 邢妍. 康拓三分集的维数计算 [J]. 保山师专学报, 2004, 23(5): 38-40.
- [9] 郭金生. Cantor 的拓展 [J]. 佳木斯大学学报: 自然科学版, 2012, 30(6): 942-945.
- [10] 于兴太. Cantor 三分集构造方法探究 [J]. 江西科学学报, 2010, 28(2): 147-149.
- [11] 文志英. 分形几何的数学基础 [M]. 上海: 上海科学技术教育出版社, 1999.

## One Result of the Structure of $2k+1$ Divided Cantor Set Equally

ZHANG Xian, WU Bo

(Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** One of the natures of the structure of trisection cantor set is extended to the  $2k+1$  divided Cantor set equally. Principle of mass distribution and the structure of trisection cantor set are applied to calculate the Hausdorff dimension and Hausdorff conjecture of the  $2k+1$  divided Cantor set equally. The traditional calculation method of dimension needs complex computation and hardly has any direct illumination estimation, besides, there are some limitations. And the quality distribution of the interval is defined by using the quality distribution principle, the lower bound of the Hausdorff dimension of the  $2k+1$  divided Cantor set equally can be given quickly and efficiently. From the basic interval coverage to estimate the Hausdorff conjecture of the  $2k+1$  divided Cantor set equally, it is only need to estimate a special upper bound. And estimating all the cover classes of lower bounds, the lower bound is proved.

**Key words:**  $2k+1$  divided Cantor set equally; principle of mass distribution; Hausdorff dimension; Hausdorff conjecture