

拓扑动力系统中强传递集的一些性质

李瑞佳, 朱培勇

(电子科技大学数学科学学院, 成都 611731)

摘 要:在拓扑动力系统中传递集的基础上引入强传递集的概念。首先证明强传递集是严格强于传递集的,然后证明两个强传递集的并是强传递的,但传递集没有类似结果。在拓扑动力系统 (X, f) 中分别讨论强传递集与传递点集、回复点集、轨道集、映射传递之间的关系,得到了存在点 $x \in X$ 使得 $x \in \text{Rec}(f)$, 但 $\{x\}$ 不是强传递集,以及映射 f 是传递的当且仅当 X 中的任意非空开集为强传递集等一些等价刻画和充分性结果,并且在符号动力系统中利用强传递集证明了任意有限长度柱形都为传递集,从而推广了相关文献得到的结果,最后通过反例证明了强传递集与映射传递集 Trans_f 是互不蕴含的。

关键词:拓扑动力系统;强传递集;符号动力系统

中图分类号:O189.11

文献标志码:A

引 言

2011 年, Oprocha P 等提出了拓扑动力系统中传递集的概念并获得了传递集的一些充分条件与充要条件^[1]。随后,文献[2]在超空间上,对传递集的拓扑结构进行讨论,得到了一些创新性的研究结果。在此基础上,文献[3-5]对非自治离散动力系统和符号动力系统的传递集进行研究,给出了两类系统中的传递子集是弱混合子集的一个充分条件,更多相关的研究成果参见文献[6-11]。本文主要强化传递集的条件,进而在拓扑动力系统中引入强传递集的概念,研究强传递集与拓扑动力系统中传递点构成的集合,回复点构成的集合与集轨道的关系,以及强传递集与传递函数的关系,并且把强传递集应用到符号动力系统,使文献[5]的命题 2.1 得到严格推广。

动力系统相关概念^[12-13]:设 (X, f) 是一个拓扑动力系统,若 $U, V \subseteq X$, 则通常用 $N(U, V)$ 表示集合 $\{n \in \mathbb{N}^+ : f^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$, 其中 \mathbb{N}^+ 是正整数集。系统 $(X,$

$f)$ 或者映射 $f: X \rightarrow X$ 称为是传递的,如果对于任意两个非空开集 $U, V \subseteq X$ 有 $N(U, V) \neq \emptyset$, 称点 $x \in X$ 为 f 的一个传递点,如果 $\text{orb}^+(x, f) = X$, 其中 $\text{orb}^+(x, f) = \{x, fx, f^2x, \dots\}$ 称为点 x 的轨道,设 $\emptyset \neq A \subseteq X$, $\text{orb}^+(A, f) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(A)$, $f^n x$ 是点 x 关于 f 的 n 次迭代, f 的所有传递点的集合记为 Trans_f , 点 $x \in X$ 称为一个回复点是指存在序列 $n_i \rightarrow +\infty$ 使得 $f^{n_i}x \rightarrow x$, 并且用 $\text{Rec}(f)$ 记全体回复点的集合。更一般地,设 $\emptyset \neq A \subseteq X$, 称集合 A 是传递的,如果对于任意两个非空开集 $U, V \subseteq X$, 若 $U \cap A \neq \emptyset$ 并且 $V \cap A \neq \emptyset$, 则 $N(U \cap A, V) \neq \emptyset$ 。下面,引入强传递集的概念:

定义 1 设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, $\emptyset \neq A \subseteq X$, 称 A 是强传递的,如果对于 X 的任意非空开集 U, V , 若 $U \cap A \neq \emptyset$, 则 $N(U \cap A, V) \neq \emptyset$ 。

为了问题讨论的需要,设符号动力系统为:

设 $S = \{0, 1, \dots, k-1\}$, 其中 $k \geq 2$ 为整数, $\sum_k = \{x = x_0x_1 \dots \mid x_i \in S, i = 0, 1, \dots\}$ 。对于 $\forall x = x_0x_1 \dots, y = y_0y_1 \dots \in \sum_k$, 定义,其中,

收稿日期:2016-09-02

基金项目:国家自然科学基金(11501391)

作者简介:李瑞佳(1992-),男,四川自贡,硕士生,从事拓扑动力系统方面的研究,(E-mail)1142698760@qq.com;

朱培勇(1956-),男,四川自贡,教授,主要从事拓扑学和混沌理论方面的研究,(E-mail)zpy6940@sina.com

$$\rho(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta(x_n, y_n)}{2^n}$$

而

$$\delta(x_n, y_n) = \begin{cases} 0, & x_n = y_n, n = 1, 2, \dots \\ 1, & x_n \neq y_n \end{cases}$$

定义 $\sigma: \sum_k \rightarrow \sum_k$, 其中: $\sigma(x) = x_1 x_2 \dots$ (对于 $\forall x = x_0 x_1 \dots \in \sum_k$), 并称映射 σ 为 \sum_k 的位移映射。

由文献[14]知: (\sum_k, ρ) 是紧致的度量空间, $\sigma: \sum_k \rightarrow \sum_k$ 是连续映射, (\sum_k, σ) 称为符号动力系统。S 中符号的一个有限排列 $A = a_0 \dots a_{n-1}$ 称为 S 上的一个符号段, 其中 n 称为 A 的长度, 并且记 $|A| = n$, 子集 $[A] = \{x \in \sum_k \mid x_i = a_i, 0 \leq i \leq n-1\}$ 称为 A 上的柱形。

1 主要结果及其证明

定理 1 强传递集一定是传递集, 但存在拓扑动力系统 (X, f) , 它有传递集不是强传递的, 即强传递集是严格强于传递集的。

证明 由传递集与强传递集的定义直接得知: 强传递是传递的。下面证明存在传递集不是强传递的。

设 $X = [0, 1]$, 而 $f: X \rightarrow X$ 定义为: $f(x) = 4x(1-x)$, $x \in X$ 。则 (X, f) 是一个拓扑动力系统。

(1) $\{0\}$ 是传递集。

显然, $x = 0$ 是 f 不动点, 它的周期为 $1 \in \mathbb{N}^+$ 。另外, 对于 X 的任意非空开集 U, V 若 $U \cap \{0\} \neq \emptyset$ 并且 $V \cap \{0\} \neq \emptyset$, 即存在 $p, q \in (0, 1)$ 使得 $[0, p] \subset U, [0, q] \subset V$, 则有

$$N(U \cap \{0\}, V) = N(\{0\}, V) \Leftrightarrow N(\{0\}, [0, q]) = \{n \in \mathbb{N}^+ \mid f^n(\{0\}) \cap [0, q] \neq \emptyset\} = \mathbb{N}^+$$

从而, $N(U \cap \{0\}, V) \neq \emptyset$, 即 $\{0\}$ 是传递集。

(2) $\{0\}$ 不是强传递集。

取 X 中的开集 $U = [0, 1]$, 当然 $0 \in U$, 又取 $V = (0, 1)$ 。显然 V 为 X 中的非空开集并且当 $x = 0$ 时, 有 $orb^+(x, f) = \{0\} \cap V = \emptyset$, 所以 $N(U \cap \{0\}, V) = N(\{0\}, V) = \emptyset$ 。因此, $\{0\}$ 不是强传递集。

在文献[1]中有: 设一个 (X, f) 拓扑动力系统, $x \in \text{Rec}(f)$ 当且仅当 $\{x\}$ 是传递集。结合定理 1, 自然可得:

推论 1 在拓扑动力系统 (X, f) 中, 存在 $x \in X$ 使得 $x \in \text{Rec}(f)$, 但 $\{x\}$ 不是强传递集。

定理 2 在拓扑动力系统 (X, f) 中, 任意两个强传

递集的并集一定是强传递集。

证明 设 A, B 为拓扑动力系统 (X, f) 的任意两个强传递集。任取 X 中的任意非空开集 U, V , 满足 $U \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, 不妨设 $U \cap A \neq \emptyset$, 因为 A 是强传递集, 所以 $N(U \cap A, V) \neq \emptyset$ 。从而 $N(U \cap A, V) \subseteq N(U \cap (A \cup B), V) \neq \emptyset$, 所以 $A \cup B$ 是强传递集。

定理 3 存在拓扑动力系统 (X, f) , 它的两个传递集的并集不是传递的。即, 两个传递集的并集不一定是传递集。

证明 设 $X = \{2\} \cup [0, 1]$ (取 \mathbb{R} 的遗传拓扑), 而 $f: X \rightarrow X$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

取非空集合 $A \subseteq [0, 1], B = \{2\}$ 有 A, B 都是传递集, 但 $A \cup B$ 不是传递集。

再任取 X 中的任意非空开集 U, V , 满足 $U \cap A \neq \emptyset$ 且 $V \cap A \neq \emptyset$ 。因为 $U \cap A$ 也为 X 中的开集, 所以存在 $m \in \mathbb{N}^+$ 使得

$$B = \left[\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^{m-1}}\right] \subseteq A \cap U$$

又因为 $f^m(B) = [0, 1] \subseteq f^m(A \cap U)$, 所以 $f^m(A \cap U) \cap V \neq \emptyset$, 即 $N(U \cap A, V) \neq \emptyset$, 所以 A 是传递集。任取 X 中的任意非空开集 U, V , 满足 $U \cap B \neq \emptyset$ 且 $V \cap B \neq \emptyset$ 。因为 $f(U \cap B) = 2 \in V$, 所以有 $N(U \cap B, V) \neq \emptyset$, 所以 B 是传递集。但 $A \cup B$ 不是传递集, 事实上, 取 X 中的开集 $U = [0, 1], V = \{2\}$, 满足 $U \cap (A \cup B) \neq \emptyset, V \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, 显然有 $N(U \cap (A \cup B), V) \subseteq N(U, V) = \emptyset$, 所以 $A \cup B$ 不是传递集。

系统 (X, f) 传递的一个等价刻画:

定理 4 设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, f 是传递的当且仅当 X 中的任意非空开集为强传递集。

证明 必要性, 设 A 为 X 中的任意非空开集, 因为 f 是传递的, 所以对 X 的任意两个非空开集 U, V 有 $N(U, V) \neq \emptyset$ 。令 $W = U \cap A$, 由 A 为 X 中的开集得 W 也为 X 中的开集。若 $W \neq \emptyset$, 则 $N(W, V) \neq \emptyset$, 所以 A 为强传递集。

充分性, 任取 X 中的非空开集 U, V , 因为 U 是强传递集并且 U 不是空集, 所以 $N(U \cap U, V) \neq \emptyset$, 即 $N(U, V) \neq \emptyset$, 所以 f 是传递的。

定理 4 证明了: 拓扑动力系统 (X, f) 中, f 是传递函数当且仅当 X 是强传递集。于是, 有如下推论:

推论2 设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, 则以下命题等价:

- (1) f 是传递的;
- (2) X 是强传递集;
- (3) X 中的任意非空开集为强传递集。

定理5 设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, $\phi \neq A \subseteq X$. A 是强传递集当且仅当对 X 的任意开集 U , 若有 $A \cap U \neq \phi$, 则 $\text{orb}^+(f(U \cap A), f) = X$ 。

证明 设 A 为强传递集, 则对 X 的任意非空开集 U, V , 若有 $U \cap A \neq \phi$, 则 $N(U \cap A, V) \neq \phi$, 即对 X 的任意非空开集 V 存在 $m \in \mathbb{N}^+$ 使得 $f^m(U \cap A) \cap V \neq \phi$, 因此 $\text{orb}^+(f(U \cap A), f) = X$ 。反过来, 对 X 的任意开集 U , 若有 $A \cap U \neq \phi$, 因为 $\text{orb}^+(f(U \cap A), f) = X$, 所以对 X 的任意非空开集 V 存在 $m \in \mathbb{N}^+$ 使得 $f^m(U \cap A) \cap V \neq \phi$, 从而对 X 的任意非空开集 U, V , 若有 $U \cap A \neq \phi$, 则 $N(U \cap A, V) \neq \phi$, 所以 A 是强传递集。

推论3 设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, $x \in X$ 。若 $x \in \text{Trans}_f$ 当且仅当 $\{f(x)\}$ 是强传递集。

定理6 符号动力系统 (\sum_k, σ) 中任意有限长度柱形是一个强传递集。

证明 设 $[A]$ 为任一柱形, 不妨设其长度为 $n \in \mathbb{N}^+$, 为了方便记 $A = [A] = [a_0 a_1 \dots a_{n-1}]$ 。对 \sum_k 的任意非空开集 U, V 若有 $U \cap A \neq \phi$, 令 $W = U \cap A$, 显然 W 为柱形, 记 $W = [a_0 a_1 \dots a_{m-1}]$, 其中 $m \geq n$ 。因为 $\sigma^m(W) = \sigma^m([a_0 a_1 \dots a_{m-1}]) = \sum_k$, 所以存在 $m \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\sigma^m(A \cap U) \cap V = \sigma^m(W) \cap V = \sum_k \cap V = V$, 因为 V 为非空开集, 所以 $\sigma^m(A \cap U) \cap V \neq \phi$, 即 $m \in N(U \cap A, V)$, 所以 A 为 (\sum_k, σ) 中的强传递集。

因为任意强传递集为传递集, 所以符号动力系统 (\sum_k, σ) 中任意有限长度柱形都为传递集, 这是文献 [5] 中命题 2.1 的推广。

最后, 讨论在拓扑动力系统中强传递集与传递点集之间的关系。

定理7 存在拓扑动力系统 (X, f) , Trans_f 不是强传递集也存在系统 (X, f) , 它有强传递集不是 Trans_f 。

证明 (1) 存在拓扑动力系统 (X, f) , Trans_f 不是强传递集。事实上, 可取 $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}$, 并且赋予 X 的拓扑是实直线 \mathbb{R} 的子空间拓扑。又 $f: X \rightarrow X$ 定义为 $f(0) = 0, f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ 。是 $\text{Trans}_f = \{1\}$, 但是 $\{1\}$ 不是强传递集。事实上, 因为对于 $\forall n \in \mathbb{N}^+$,

$f^n(1) = \frac{1}{n+1}$, 故存在非空开集 $\{1\} \subset X$ 使得 $N(\{1\} \cap \{1\}, \{1\}) = \{n \in \mathbb{N}^+ | f^n(\{1\}) \cap \{1\} \neq \emptyset\} = \emptyset$ 。

(2) 存在系统 (X, f) , 它有强传递集不是 Trans_f 。设 $g: I \rightarrow I$ 其中 $I = [0, 1]$, $g(x) = 1 - |2x - 1|$ 为帐篷映射。则由文献 [15] 知 $\overline{\text{Per}(g)} = I$ 。令 $X = \text{Per}(g)$ 及 $f = g|_{\text{Per}(g)}$ 于是 (X, f) 为传递的, 从而 X 为强传递集, 但 X 不是 Trans_f 。

2 结束语

本文在拓扑动力系统中提出的强传递集强化了传递集的条件, 得到了一些比传递集更好的性质。另外, 通过对强传递集与传递点集、回复点集以及映射传递性之间关系的研究, 丰富了拓扑动力系统传递性理论。

参考文献:

- [1] OPROCHA P, ZHANG G H. On local aspects of topological weak mixing in dimension one and beyond[J]. Stud Math, 2011, 202(3): 261-268.
- [2] OPROCHA P, ZHANG G H. On sets with recurrence properties, their topological structure and entropy[J]. Top Appl, 2012, 159: 803-811.
- [3] LIU L, ZHAO S L, LIANG H L. Uniform convergence and transitive subsets[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2012, 2012: 970934.
- [4] 刘磊. 传递子集的性质及其在符号动力系统中的应用[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(16): 274-277.
- [5] 刘磊. 符号动力系统的弱混合子集和传递子集[J]. 四川师范大学学报, 2015, 38(6): 843-845.
- [6] LI J, YE X D. Recent development of chaos theory in topological dynamics[J]. Acta Mathematica Sinica English, 2016, 32(1): 83-114.
- [7] ZHANG G H. Relativization of dynamical properties [J]. Acta Mathematica Sinica English, 2012, 55(5): 913-936.
- [8] LIU L. On Local Aspects of Topological Transitivity and Weak Mixing in Set-Valued Discrete Systems[J]. Discrete Dynamics in Nature & Society, 2013(2): 66-67.
- [9] OPROCHA P, BALIBREA F. Weak mixing and chaos

- in nonautonomous discrete systems[J].Applied Mathematics Letters,2012,25(8):1135-1141.
- [10] OPROCHA P,ZHANG G H.On weak product recurrence and synchronization of return times[J].Advances in Mathematics,2013,244:395-412.
- [11] LIU L,SUN Y J.Weakly mixing sets and transitive sets for non-autonomous discrete systems[J].Advances in Difference Equations,2014(1):1-9.
- [12] 叶向东,黄文,邵松.拓扑动力系统概论[M].北京:科学出版社,2008.
- [13] 周作领,尹建东,许绍元.拓扑动力系统:从拓扑方法到遍历理论方法[M].北京:科学出版社,2011.
- [14] 廖公夫,王立冬,范钦杰.映射迭代与混沌动力系统[M].北京:科学出版社,2012.
- [15] 张景中,熊金城.函数迭代与一维动力系统[M].成都:四川教育出版社,1992.

Some Properties of Strong Transitive Sets on Topological Dynamical System

LI Ruijia, ZHU Peiyong

(School of Mathematical Science, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: The concept of strong transitive sets on the basis of transitive sets in topological dynamical systems are introduced. First, it is proved that the strong transitive set is strictly stronger than the transitive set, and then it is proved that the union of two strong transitive sets is strong transitive set, but the transitive sets have no similar results. Then, the relationships between the strong transitive set, the transitive point set, the recurrent point set, the orbit set, and the transitive map in topological dynamical systems (X, f) are discussed. The $x \in X$ such that $x \in Rec(f)$, but $\{x\}$ is not a strong transitive set, and the mapping of f is transitive if and only if the arbitrary nonempty open set is strong transitive set and so on. Besides, some equivalent characterizations and sufficient results are obtained. And in the symbolic dynamical system, the strong transitive set is used to prove that any finite length cylinder is a transitive set, which generalizes a result obtained by Liu Lei in the near future. Finally, the counter example shows that strong transitive set and $Trans_f$ are not implied in each other.

Key words: topological dynamical system; strong transitive set; symbolic dynamical system