文章编号:1673-1549(2016)05-0088-09 DOI:10.11863/j. suse.2016.05.19

菲涅尔积分的几种计算方法

邢家省[1,2], 杨义川[1,2], 王拥军[1,2]

(1.北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191;2.数学、信息与行为教育部重点实验室, 北京 100191)

摘 要:考虑菲涅尔积分的多种计算方法的来源问题,介绍了通过引入收敛因子转化为二重广义积分计算的方法,并指出这种方法发现的思想来源。对菲涅尔积分和广义菲涅尔积分给出了利用广义积分交换次序定理的计算方法,没有通过引入收敛因子就解决了问题,方法自然且具有一般性。对一类欧拉积分公式,给出了对参变量求导的简便计算方法,指出了一类欧拉积分公式对广义菲涅尔积分计算的应用,发现菲涅尔积分、广义菲涅尔积分、狄利克雷积分都可以是一类欧拉积分公式的特例,沟通了这些积分之间的关系。

关键词:菲涅尔积分;广义菲涅尔积分;欧拉积分公式;含参变量广义积分;内闭一致收敛性;函数列积分的极限理论

中图分类号:O177.2 **文献标志码**:A

菲涅尔积分是一类重要的广义积分[1-14],在物理学中具有重要应用价值[4-5,11-13]。虽然菲涅尔积分的计算问题已被人们解决[1-8,13],然而在计算过程中涉及的两广义积分的交换积分次序的问题,文献[1-3,13]中给出的证明过程都较为复杂,对有些过程缺乏严格的理论证明,寻找简单的计算方法引起了人们的研究兴趣[4,5,11]。在现有文献结果的基础上,对涉及菲涅尔积分计算的理论根据和计算方法进行了系统的整理,建立了一套新的理论基础,简化了相关问题的处理,对菲涅尔积分和广义菲涅积分给出了统一的处理方法,并指出了相关广义积分之间的联系。

1 利用广义二重积分计算菲涅尔积分的方法

定理1[1-5] 设 a,b 为常数,且 $a>0$, 则有

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2}$$

文献[4,13]在菲涅尔积分中直接引入收敛因子 e^{-tx^2},然后化为广义二重积分,给出了简便的计算方法,其转换计算过程为:

设 $t>0$, 记 $F(t)=\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\cos x^2\mathrm{d}x$, $G(t)=\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\sin x^2\mathrm{d}x$。化为广义二重积分进行计算,得到

$$\begin{aligned}&(F(t))^2-(G(t))^2=\\&\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\cos x^2\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} e^{-ty^2}\cos y^2\mathrm{d}y-\\&\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\sin x^2\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} e^{-ty^2}\sin y^2\mathrm{d}y=\\&\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-tr^2}\cos r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\\&\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty} e^{-tz}\cos z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}\frac{t}{t^2+1}\end{aligned}\quad(1)$$

$$2F(t)G(t)=\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\cos x^2\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} e^{-ty^2}\sin y^2\mathrm{d}y+$$

收稿日期:2016-01-10

基金项目:国家自然科学基金(61271010);北京航空航天大学校级重大教改项目(2016)

作者简介:邢家省(1964-),男,河南泌阳人,副教授,博士,主要从事偏微分方程、微分几何方面的研究,(E-mail)xjsh@buaa.edu.cn;

杨义川(1970-),男,甘肃天水人,教授,主要从事逻辑代数、序代数、软计算及其应用方面的研究,(E-mail)ycyang@buaa.edu.cn

$$\int_0^{+\infty} e^{-ty^2}\cos y^2\mathrm{d}y\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\sin x^2\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-tr^2}\sin r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty} e^{-tz}\sin z\mathrm{d}z =$$

$$\frac{\pi}{4}\frac{1}{t^2+1} \tag{2}$$

由(1)式和(2)式,可得

$$[(F(t))^2+(G(t))^2]^2 = [(F(t))^2-(G(t))^2]^2 +$$

$$4(F(t)G(t))^2 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{t^2+1}{(t^2+1)^2} \tag{3}$$

$$(F(t))^2+(G(t))^2 = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2+1} \tag{4}$$

由(1)式和(4)式联立,解得

$$F(t) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{t^2+1}}$$

$$G(t) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{\sqrt{t^2+1}-t}{t^2+1}} \tag{5}$$

由阿贝尔判别[1-3,6-7]可知,积分 $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\cos x^2\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\sin x^2\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, $e^{-tx^2}\cos x^2$, $e^{-tx^2}\sin x^2$ 在 $(x,t)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续,所以 $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\cos x^2\mathrm{d}x$, $G(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\sin x^2\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

于是得到菲涅尔积分[1-7,9-12]

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = F(0) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = G(0) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \tag{6}$$

注意到

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\cos x^2\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\sin x^2\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

在积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 中引入收敛因子 e^{-tx},导致需要计算形如 $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 的积分,或者对函数 $\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上求拉普拉斯变换时,需要计算形如 $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\cos x^2\mathrm{d}x$, $G(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\sin x^2\mathrm{d}x$ 的积分问题。

设 $a>0$,在形如 $\int_0^{+\infty} e^{-(a+ib)x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx^2\mathrm{d}x - i\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\sin bx^2\mathrm{d}x$ 的含参变量积分中,出现含参变量的积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx^2\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\sin bx^2\mathrm{d}x$ 的问题[13-14],文献[13]中用对参变量求导的方法给出了计算结果。

积分 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是发散的[13],只有文献[4]中发现引入收敛因子 $e^{-t(x^2+y^2)}$,可用于计算菲涅尔积分。

2 两无穷区间上广义积分交换次序的充分条件

定理 2[1-3,10] 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $(a,+\infty)$ 上的函数列,积分 $\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $\{f_n(x)\}$ 在 $(a,+\infty)$ 上收敛于 $f(x)$。

如果满足条件:

(1)对任意 $B>A>a$, $\{f_n(x)\}$ 在 $[A,B]$ 上一致收敛于 $f(x)$,即 $\{f_n(x)\}$ 在 $(a,+\infty)$ 上内闭一致收敛于 $f(x)$。

(2)积分 $\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ 对 n 一致收敛,则有积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,而且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$。

定理 3[1-3,10] (控制收敛定理)设 $\{f_n(x)\}$ 是 $(a,+\infty)$ 上的函数列,积分 $\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $\{f_n(x)\}$ 在 $(a,+\infty)$ 上收敛于 $f(x)$。

如果满足:

(1)对任意 $B>A>a$, $\{f_n(x)\}$ 在 $[A,B]$ 上一致收敛于 $f(x)$;

(2)存在 $(a,+\infty)$ 上的非负函数 $F(x)$,使得 $\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 收敛,而且对 $x\in(a,+\infty)$ 及所有的 n,都有 $|f_n(x)|\leqslant F(x)$,则有

①积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛;

② $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$;

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$。

定理 2 和定理 3 虽然是以函数列的极限形式叙述的,但完全可以写出其它极限过程的相应结论[1-3]。

利用定理 2 或定理 3,可以给出如下积分交换次序定理的证明。

定理 4[8] (无穷区间上的积分交换次序)设函数 $f(x,u)$ 在 $(a,+\infty)\times(c,+\infty)$ 上连续,如果满足下列条件:

(1)对任何 $D>C>c$,积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在区间 $[C,D]$ 上一致收敛;对任何 $B>A>a$,积分 $\int_c^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[A,B]$ 上一致收敛。

(2)积分 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u$ 中至少有一个存在,则成立 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$。

定理 5[8] (无穷区间上的积分交换次序)设函数 $f(x,u)$ 在 $(a,+\infty)\times(c,+\infty)$ 上连续,如果满足下列条件:

(1)对任何 $D>C>c$,积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在区间 $[C,D]$ 上一致收敛;对任何 $B>A>a$,积分 $\int_c^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[A,B]$ 上一致收敛。

(2)积分 $\int_c^{+\infty}G_{A,B}(u)\mathrm{d}u$ 关于 $B>A>a$ 一致收敛,或者 $\int_a^{+\infty}F_{D,C}(x)\mathrm{d}x$ 关于 $D>C>c$ 一致收敛,

则成立

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$$

其中,

$$F_{D,C}(x)=\int_C^D f(x,u)\mathrm{d}u$$

$$G_{A,B}(u)=\int_A^B f(x,u)\mathrm{d}x$$

定理 6[8] (无穷区间上的积分交换次序)设函数 $f(x,u)$ 在 $(a,+\infty)\times(c,+\infty)$ 上连续,如果满足下列条件:

(1)对任何 $D>C>c$,积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在区间 $[C,D]$ 上一致收敛;对任何 $B>A>a$,积分 $\int_c^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[A,B]$ 上一致收敛。

(2)存在 $(c,+\infty)$ 上的非负函数 $G(u)$,对任何 $B>A>a$, $u\in(c,+\infty)$,有 $|G_{A,B}(u)|\leqslant G(u)$,且积分 $\int_c^{+\infty}G(u)\mathrm{d}u$ 收敛,或者存在 $(a,+\infty)$ 上的非负函数 $F(x)$,对任何 $D>C>c$, $x\in(a,+\infty)$,有 $|F_{C,D}(x)|\leqslant F(x)$,且积分 $\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则有

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$$

成立。其中,

$$F_{D,C}(x)=\int_C^D f(x,u)\mathrm{d}u$$

$$G_{A,B}(u)=\int_A^B f(x,u)\mathrm{d}x$$

3 利用无穷区间上积分交换次序定理计算菲涅尔积分

定理 7[1-14] 菲涅尔积分 $\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$。

证明 命 $x^2=t$,那么

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \tag{7}$$

将 $\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\mathrm{d}u$ 代入,得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\cos t\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}\cos t\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \tag{8}$$

记 $f(t,u)=e^{-u^2t}\cos t$,对任意 $\beta>0$,积分 $\int_0^{+\infty}f(u,t)\mathrm{d}t$ 关于 u 在 $[\beta,+\infty)$ 上一致收敛;对任意 $\delta>0$,积分 $\int_0^{+\infty}f(u,t)\mathrm{d}u$ 关于 t 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛。

由 $\int_0^{+\infty}|f(u,t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{u^2}$,得 $\int_\beta^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}|f(u,t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$ 存在,$f(t,u)=e^{-u^2t}\cos t$ 在 $[0,+\infty)\times[\beta,+\infty)$ 上满足定理 4 的条件,故由定理 4,交换积分次序是允许的,于是

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_\beta^{+\infty}e^{-u^2t}\cos t\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\int_\beta^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}\cos t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \tag{9}$$

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}\cos t\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\beta}e^{-u^2t}\cos t\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=$$

$$\int_\beta^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}\cos t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \tag{10}$$

记 $F(t,\beta)=\int_0^{\beta}e^{-u^2t}\cos t\mathrm{d}u=\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\left(\int_0^{\sqrt{t}\beta}e^{-z^2}\mathrm{d}z\right)$,显然积分 $\int_0^{+\infty}F(t,\beta)\mathrm{d}t$ 关于 $\beta>0$ 一致收敛,对任意 $B>A>0$,$\lim\limits_{\beta\to0^+}F(t,\beta)=0$ 关于 $t\in[A,B]$ 是一致的,从而有 $\lim\limits_{\beta\to0^+}\int_0^{+\infty}F(t,\beta)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\lim\limits_{\beta\to0^+}F(t,\beta)\mathrm{d}t=0$,在(10)式中,令 $\beta\to0^+$,取极限,则得

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}\cos t\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}\cos t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \tag{11}$$

所以,有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}\cos t\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=$$
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}\cos t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=$$
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u=$$
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{12}$$

故有

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

设 $k>0$,对引入收敛因子 e^{-kt} 的情形,$f_k(t,u)=e^{-kt}e^{-u^2t}\cos t$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上满足定理 4 的条件[1-3,13]。

类似的,可以给出:

定理 8[1-14]　菲涅尔积分 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$。

注意函数 $g(t,u)=e^{-u^2t}\sin t$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续,对任意 $\beta>0$,函数 $g(t,u)=e^{-u^2t}\sin t$ 在 $[0,+\infty)\times[\beta,+\infty)$ 上满足定理 4 的条件。

设 $k>0$,对引入收敛因子 e^{-kt} 的情形,函数 $g_k(t,u)=e^{-kt}e^{-u^2t}\sin t$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上满足定理 4 的条件[1-3,13]。

4　广义菲涅尔积分的积分交换次序计算方法

定理 9[2,6,9-10,13]　设 $\alpha>0,0<\lambda<2$,则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x=\frac{\pi\alpha^{\lambda-1}}{2\Gamma(\lambda)\sin\frac{\lambda\pi}{2}}$$

证明　显然

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x=\alpha^{\lambda-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{\lambda}}\mathrm{d}y=\alpha^{\lambda-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x$$

只须考虑 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x$,将 $\frac{1}{x^{\lambda}}=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\mathrm{d}y$,$(x>0)$ 代入,于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\lambda}}dx=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

可以证明成立

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \tag{13}$$

在(13)式成立的情况下,得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=$$
$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=$$
$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\frac{\lambda}{2}-1}}{1+u}\mathrm{d}u=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\frac{1}{2}B\left(\frac{\lambda}{2},1-\frac{\lambda}{2}\right)=$$
$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\lambda\pi}{2}}=$$
$$\frac{\pi}{2\Gamma(\lambda)\sin\frac{\lambda\pi}{2}}$$

故有 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\Gamma(\lambda)\sin\frac{\lambda\pi}{2}}$,其中利用了贝塔函数的性质[1-3]和 Γ 函数的余元公式[1-3]。

证明(13)式成立。

证法 1　记 $f(x,y)=y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x$,显然 $f(x,y)=y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x$ 在 $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续。容易知道,对任意 $\delta>0$,积分 $\int_0^{+\infty}f(x,y)dx$ 关于 y 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛;对任意 $\beta>0$,积分 $\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在 $[\beta,+\infty)$ 上一致收敛;对任意 $D>C>0$,由于 $\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $y\in[C,D]$ 上一致收敛,或者由 $\int_0^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\mathrm{d}x=y^{\lambda-1}\frac{1}{y}=\frac{1}{y^{2-\lambda}}$,得 $\int_C^D\left(\int_0^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ 存在,$f(x,y)=y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x$ 在 $[0,+\infty)\times[C,D]$ 上满足交换积分次序的条件,所以,交换积分次序是允许的,于是有

$$\int_C^D\left(\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\left(\int_C^Df(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{14}$$

令 $F(C,D,x)=\int_C^D f(x,y)\mathrm{d}y$，显然 $\lim\limits_{D\to+\infty,C\to0^+}F(C,D,x)=\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$，且关于 $x\in[\delta,+\infty)$ 是一致的，$F(C,D,x)=\dfrac{\sin x}{x^\lambda}\int_{xC}^{xD}u^{\lambda-1}e^{-u}\mathrm{d}u$，

记

$$g(x)=\frac{\sin x}{x^\lambda}$$

$$h(C,D,x)=\int_{xC}^{xD}u^{\lambda-1}e^{-u}\mathrm{d}u=\int_{xC}^{+\infty}u^{\lambda-1}e^{-u}\mathrm{d}u-\int_{xD}^{+\infty}u^{\lambda-1}e^{-u}\mathrm{d}u=H(C,x)-H(D,x)$$

$$F(C,D,x)=g(x)H(C,x)-g(x)H(D,x)$$

由于 $\int_0^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$H(C,x)$，$H(D,x)$ 关于 $x>0$ 单调递增，且一致有界，根据阿贝尔判别法[1-3]，可知 $\int_0^{+\infty}g(x)H(C,x)\mathrm{d}x$，$\int_0^{+\infty}g(x)H(D,x)\mathrm{d}x$ 关于 $D>C>0$ 是一致收敛，所以 $\int_0^{+\infty}F(C,D,x)\mathrm{d}x$ 关于 $D>C>0$ 是一致收敛。

利用广义积分下的积分收敛定理，于是有

$$\lim_{D\to+\infty,C\to0^+}\int_0^{+\infty}F(C,D,x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lim_{D\to+\infty,C\to0^+}F(C,D,x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

在(14)式两端，令 $D\to+\infty$，$C\to0^+$，取极限，得到成立

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

即得

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

证法 2 记 $f(x,y)=y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x$，显然 $f(x,y)=y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x$ 在 $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续。容易知道，对任意 $\delta>0$，积分 $\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛；对任意 $\beta>0$，积分 $\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在 $[\beta,+\infty)$ 上一致收敛；对任意 $B>A>0$，由于 $\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $x\in[A,B]$ 上一致收敛，或者由 $\int_0^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y\leqslant\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{x^\lambda}\Gamma(\lambda)$，得 $\int_A^B\left(\int_0^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ 存在，于是 $f(x,y)=y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x$ 在 $[A,B]\times(0,+\infty)$ 上满足交换积分次序的条件，所以，交换积分次序是允许的，于是有

$$\int_A^B\left(\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_A^B f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \quad (15)$$

令 $G(A,B,y)=\int_A^B f(x,y)\mathrm{d}x$，显然 $\lim\limits_{B\to+\infty,A\to0^+}G(A,B,y)=\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$，且关于 y 在 $(0,+\infty)$ 上是内闭一致收敛，

$$G(A,B,y)=\int_A^B y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x=y^{\lambda-1}\int_A^B e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x=y^{\lambda-1}\left(\frac{e^{-Ay}(y\sin A+\cos A)}{1+y^2}-\frac{e^{-By}(y\sin B+\cos B)}{1+y^2}\right)$$

$$|G(A,B,y)|\leqslant y^{\lambda-1}\left(\frac{e^{-Ay}yA+1}{1+y^2}+\frac{e^{-By}yB+1}{1+y^2}\right)\leqslant y^{\lambda-1}\frac{4}{1+y^2}\ y\in(0,+\infty)$$

又 $\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}\dfrac{4}{1+y^2}\mathrm{d}y$ 收敛，利用广义积分下的积分控制收敛定理，于是有

$$\lim_{B\to+\infty,A\to0^+}\int_0^{+\infty}G(A,B,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\lim_{B\to+\infty,A\to0^+}G(A,B,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

在(15)式两端，令 $B\to+\infty$，$A\to0^+$，取极限，得到成立

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

从而，得到

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

类似地，可以得到：

定理 10[2,6-7,9-10] 设 $0<\lambda<1$，则成立

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\cos x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}y^{\lambda-1}e^{-xy}\cos x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \quad (16)$$

定理 11[2,6-7,9-10,13] 设 $0<\lambda<1$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\lambda}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\Gamma(\lambda)\cos\frac{\lambda\pi}{2}}$$

证明 利用分部积分和定理 9 的结果，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\lambda}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\lambda}(\sin x)'\mathrm{d}x=\lambda\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\lambda+1}}\mathrm{d}x=$$

$$\lambda \frac{\pi}{2\Gamma(\lambda+1)\sin\frac{(\lambda+1)\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\Gamma(\lambda)\cos\frac{\lambda\pi}{2}}$$

利用定理 9 中的方法,也可以给出利用积分交换次序的计算方法。

利用定理 9 的结果,可以得到 Dirichlet 积分[1-3,6-10] $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$。

利用定理 9 中的过程可以对 Dirichlet 积分和菲涅尔积分 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 给出积分交换次序的计算方法[9-10],并且可以对文献[6,9,13]中的计算过程给予简化。

定理 12[9-10]　设 $p > 1$, 则有

$$(1)\ \int_0^{+\infty}\sin x^p\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{1-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}y = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\sin\frac{\pi}{2p}$$

$$(2)\ \int_0^{+\infty}\sin\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{1+\frac{1}{p}}}\mathrm{d}y = \Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)\sin\frac{\pi}{2p}$$

利用定理 12 的结果,可以得到菲涅尔积分[1-3,6-7,9-10] $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$, $\int_0^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$。

定理 13[9-10]　设 $p > \frac{1}{2}$, 则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^p}{x^p}\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\frac{\pi}{\Gamma\left(2-\frac{1}{p}\right)\sin\frac{\pi}{2p}}$$

定理 14[2,6-7,9-10]　设 $p > 1$, 则有

$$\int_0^{+\infty}\cos x^p\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}$$

利用定理 14 的结果,可以得到菲涅尔积分[1-3,6-7,9-10] $\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$。

定理 15[2,10]　设 $-1 < \lambda < 1$, 则有

$$\int_0^{+\infty}x^{\lambda-1}\sin x\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\lambda}\sin\frac{\lambda\pi}{2}$$

定理 16[2,10]　设 $0 < \lambda < 1$, 则有

$$\int_0^{+\infty}x^{\lambda-1}\cos x\mathrm{d}x = \Gamma(\lambda)\cos\frac{\lambda\pi}{2}$$

5　一类 Euler 积分公式的对参变量求导的简便证明方法

定理 17[1,7]　对任意实数 u, 有

$$\int_0^{2\pi}e^{u\cos x}\cos(u\sin x)\mathrm{d}x = 2\pi$$

证明　记 $F(u) = \int_0^{2\pi}e^{u\cos x}\cos(u\sin x)\mathrm{d}x$, 显然

$$F(0) = 2\pi$$

$$F'(u) = \int_0^{2\pi}e^{u\cos x}[\cos x\cos(u\sin x) - \sin(u\sin x)\sin x]\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[e^{u\cos x}\sin(u\sin x)]\mathrm{d}x = 0,(u\neq 0)$$

于是有 $F'(u) = 0$, 故 $F(u) = 2\pi$, 即有

$$\int_0^{2\pi}e^{u\cos x}\cos(u\sin x)\mathrm{d}x = 2\pi$$

定理 17 仅出现在文献[1,7]中,可能的原因是原始发现的证明过程相当复杂,限制了它的传播,这里给出了简单的证明过程。

定理 18[2,6,10,13]　设 $\lambda > 0, x > 0, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则有 Euler 公式

$$(1)\ \int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x$$

$$(2)\ \int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x$$

证明　记

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t$$

$$I_1(\alpha) = \int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t$$

可以证明,对任意 $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, 积分

$$\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}(t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha))\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}(t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha))\mathrm{d}t$$

关于 $\alpha\in[-\delta,\delta]$ 是一致收敛的[6],所以对参数求导可以通过积分号[6],从而

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}(t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha))\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\lambda t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}[\sin\alpha\cos(\lambda t\sin\alpha) - \cos\alpha\sin(\lambda t\sin\alpha)]\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}t^x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha))\mathrm{d}t = -x\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t = -xI_1(\alpha)$$

同理可得，$I'_1(\alpha) = xI(\alpha)$ 于是，$I''(\alpha) + x^2 I(\alpha) = 0$，$I(\alpha) = C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x$，显然，$I(0) = \dfrac{\Gamma(x)}{\lambda^x}$，$I'(0) = 0$，所以，$I(\alpha) = \dfrac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x$，$I_1(\alpha) = \dfrac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x$。

在文献[6,13]中，给出了定理 18 的证明。

定理 19 设 $\lambda > 0$，$-1 < z < 0$，$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，则有 Euler 公式

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z}\frac{\Gamma(z+1)}{\lambda^z}\sin\alpha z$$

证明 由于 $\lambda > 0$，$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，显然积分 $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t$ 关于 $x \in [0,1]$ 一致收敛，从而积分关于 x 在 $[0,1]$ 上连续，且成立

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin\alpha x}{x}\frac{\Gamma(x+1)}{\lambda^x},\ x \in [0,1]$$

对 $-1 < z < 0$，经过分部积分计算，并利用定理 18 的结果，可得

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t =$$
$$\frac{1}{z}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t^z =$$
$$-\frac{1}{z}\int_0^{+\infty} t^{(z+1)-1} e^{-\lambda t\cos\alpha}[-\lambda\cos\alpha\sin(\lambda t\sin\alpha) + \lambda\cos(\lambda t\sin\alpha)\sin\alpha]\,\mathrm{d}t =$$
$$-\frac{1}{z}\lambda\left[-\cos\alpha\frac{\Gamma(z+1)}{\lambda^{z+1}}\sin\alpha(z+1) + \sin\alpha\frac{\Gamma(z+1)}{\lambda^{z+1}}\cos\alpha(z+1)\right] =$$
$$\frac{1}{z}\frac{\Gamma(z+1)}{\lambda^z}\sin\alpha z$$

定理 19 的结果得证。

定理 20[2,6,10,13] 设 $z > -1$，$\lambda > 0$，$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，则有 Euler 公式

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z}\frac{\Gamma(z+1)}{\lambda^z}\sin\alpha z$$

利用定理 18，可得：

定理 21[14] 设 $a > 0$，$-\dfrac{\pi}{2} < a\lambda < \dfrac{\pi}{2}$，则有 Euler 公式

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-r^a\cos a\lambda}\cos(r^a\sin a\lambda)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\cos\lambda$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-r^a\cos a\lambda}\sin(r^a\sin a\lambda)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\sin\lambda$

6 欧拉积分公式的直接应用

定理 22[2,10] 设 $k > 0$，$\lambda > -1$，则有

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}x^{\lambda-1}\sin x\,\mathrm{d}x = (\sin\alpha)^\lambda\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\lambda}\sin\lambda\alpha$$

其中，$\alpha = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$。

证明 令 $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，$\cos\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$，$x = t\sin\alpha$，并利用定理 20 的结论，得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}x^{\lambda-1}\sin x\,\mathrm{d}x =$$
$$(\sin\alpha)^\lambda\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-t\cos\alpha}\sin(t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t =$$
$$(\sin\alpha)^\lambda\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\lambda}\sin\lambda\alpha$$

定理 23[2,10] 设 $k > 0$，$\lambda > 0$，则有

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}x^{\lambda-1}\cos x\,\mathrm{d}x = (\sin\alpha)^\lambda\Gamma(\lambda)\cos\lambda\alpha$$

其中，$\alpha = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$。

证明 令 $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，$\cos\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$，$x = t\sin\alpha$，并利用定理 18 的结论，得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}x^{\lambda-1}\cos x\,\mathrm{d}x =$$
$$(\sin\alpha)^\lambda\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-t\cos\alpha}\cos(t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t =$$
$$(\sin\alpha)^\lambda\Gamma(\lambda)\cos\lambda\alpha$$

设 $k > 0$，$p > 0$，实数 b，对形如 $\int_0^{+\infty} e^{-kx^p}\sin bx^p\,\mathrm{d}x$，$\int_0^{+\infty} e^{-kx^p}\cos bx^p\,\mathrm{d}x$ 的积分，也可以给出计算结果[3,10,13]。

7 欧拉积分公式在广义菲涅尔积分计算中的应用

定理 24[2,10] 设 $-1 < \lambda < 1$，则有 $\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\sin x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\lambda}\sin\dfrac{\lambda\pi}{2}$。

证明 容易知道，当 $-1 < \lambda < 1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\sin x\,\mathrm{d}x$ 收敛，积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}x^{\lambda-1}\sin x\,\mathrm{d}x$ 关于 $k > 0$ 一致收敛，函数 $e^{-kx}x^{\lambda-1}\sin x$ 在 $(k,x) \in [0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续，所以积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}x^{\lambda-1}\sin x\,\mathrm{d}x$ 关于 $k \geqslant 0$ 是连续

的,在 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}x^{\lambda-1}\sin x\mathrm{d}x = (\sin\alpha)^{\lambda}\dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\lambda}\sin\lambda\alpha$ 两端,令 $k\to 0^+$,取极限,则得 $\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\sin x\mathrm{d}x = \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\lambda}\sin\dfrac{\lambda\pi}{2}$。

定理 25[2,6-7,9-10,13]　对 $0<\mu<2$,成立

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\mu}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\sin\frac{\mu\pi}{2}}$$

证明　利用定理 24 的结果和 Γ 函数的性质[1-5]及余元公式[1-5],可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\mu}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{(1-\mu)-1}\sin x\mathrm{d}x =$$

$$\frac{\Gamma(1-\mu+1)}{1-\mu}\sin\frac{(-\mu+1)\pi}{2} =$$

$$\frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\sin\frac{\mu\pi}{2}}$$

定理 26[2,6-7,9-10,13]　设 $0<\lambda<1$,则有

$$\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\cos x\mathrm{d}x = \Gamma(\lambda)\cos\frac{\lambda\pi}{2}$$

证明　容易知道,当 $0<\lambda<1$ 时,积分 $\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\cos x\mathrm{d}x$ 收敛,积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}x^{\lambda-1}\cos x\mathrm{d}x$ 关于 $k>0$ 一致收敛,函数 $e^{-kx}x^{\lambda-1}\cos x$ 在 $(k,x)\in[0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续,所以积分关于 $k\geqslant 0$ 是连续的,在 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}x^{\lambda-1}\cos x\mathrm{d}x = (\sin\alpha)^{\lambda}\Gamma(\lambda)\cos\lambda\alpha$ 两端,令 $k\to 0^+$,取极限,则得 $\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\cos x\mathrm{d}x = \Gamma(\lambda)\cos\dfrac{\lambda\pi}{2}$。

定理 27[2,6-7,9-10,13]　对 $0<\mu<1$,成立

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\mu}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}}$$

证明　利用定理 26 的结果和 Γ 函数的性质[1-3]及余元公式[1-3],可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\mu}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{(-\mu+1)-1}\cos x\mathrm{d}x =$$

$$\Gamma(1-\mu)\cos\frac{(-\mu+1)\pi}{2} =$$

$$\frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}}$$

对 $\alpha>0$,$0<\mu<1$,成立

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^{\mu}}\mathrm{d}x = \frac{\pi\alpha^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}}$$

设 a,b,c 为常数,且 $a\neq 0$,形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x$,$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x$ 的积分,已在文献[6,12,13]中给出计算结果。

对形如 $\int_0^{+\infty} e^{-(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2})}\mathrm{d}x$,$\int_0^{+\infty}\cos(a^2x^2+\dfrac{b^2}{x^2})\mathrm{d}x$,$\int_0^{+\infty}\sin(a^2x^2+\dfrac{b^2}{x^2})\mathrm{d}x$ 的积分,已在文献[13]中给出计算结果。

设 $a>0$,对形如 $\int_0^{+\infty} e^{-(a+ib)x^2}\mathrm{d}x$,$\int_0^{+\infty} e^{-(a+ib)x^p}\mathrm{d}x$,$\int_0^{+\infty} e^{-ibx^2}\mathrm{d}x$ 的积分,在文献[13,14]中给出了复分析中利用围道积分转换的计算方法。

对形如 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^n x}{x^n}\cos bx\mathrm{d}x$ 的积分,在文献[13,15-16]中,给出了计算结果。在文献[9,13,17-18]中,对 Dirichlet 积分给出了几种计算方法。

在文献[19-20]中,给出了两广义积分的交换次序定理,并对广义菲涅尔积分给出了一种计算方法。

参 考 文 献:

[1] 常庚哲,史济怀.数学分析教程(下册)[M].北京:高等教育出版社,2003.

[2] 黄玉民,李成章.数学分析(下册)[M].2 版.北京:科学出版社,2007.

[3] 华罗庚,著.高等数学引论(第二册)[M].王元,校.北京:科学出版社,2009.

[4] FLANDERS H.On the Fresnel Integrals[J].The American Math.Monthly,1982,89(4):264-266.

[5] LEONARD I E. More on Fresnel Integrals[J]. The American Math.Monthly,1988,95(5):431-433.

[6] 费定晖,周学圣.吉米多维奇数学分析习题集题解(五)[M].济南:山东科学技术出版社,1980.

[7] 裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].北京:高等教育出版社,2002.

[8] 白玉兰,陈述涛.一个二次广义积分的顺序交换问题[J].哈尔滨师范大学自然科学学报,1987,3(3):13-18.

[9] 匡继昌.Dirichlet 积分九种解法的思路分析[J].高等数学研究,2012,15(4):61-64.

[10] 匡继昌.实分析与泛函分析(续论)(上册)[M].北京:高等教育出版社,2015.

[11] 张光明.菲涅尔积分的计算[J].工科数学,1990,6

(2):177-178.
[12] 邢家省,李争辉,张愿章.线性齐次梁方程初值问题求解公式的推导[J].河南科学,2010,28(4):379-382.
[13] 菲赫金哥尔茨.微积分学教程(第二卷)[M].北京:高等教育出版社,2006.
[14] 华罗庚,著.高等数学引论(第三册)[M].王元,校.北京:科学出版社,2009.
[15] 杨梦龙,孙建设,雒秋明.一类无穷积分的计算公式[J].数学的实践与认识,2005,35(10):207-212.
[16] 吴崇试.计算含三角函数无穷积分的新方法[J].大学物理,2011,30(2):53-57.
[17] 许宁.Dirichlet 积分及其应用[J].高等数学研究,2014,17(3):15-19.
[18] 许宁.级数求和的复分析方法[J].南京师大学报:自然科学版,2014,37(4):20-27.
[19] 邢家省,杨小远,白璐.两无穷区间上积分交换次序充分条件的改进及其应用[J].四川理工学院学报:自然科学版,2016,29(1):87-92.
[20] 邢家省,杨小远.广义菲涅尔积分的积分交换次序计算方法[J].四川理工学院学报:自然科学版,2016,29(3):85-92.

Calculation Methods of Fresnel Integral

XING Jiasheng[1,2], *YANG Yichuan*[1,2], *WANG Yongjun*[1,2]
(1. School of Mathematics, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. LMIB of the Ministry of Education, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: One of the calculation methods of Fresnel integral is achieved by means of the conversion to double improper integral and the origin of this method is introduced. The calculation method of Fresnel integral and generalized Fresnel integral via the theorem of integral exchange order is discussed without the aid of the convergence factor, which generalizes the method. The simplified calculation method of the Euler integral formula via the derivation of the parameter is demonstrated, which explains the application of Euler integral formula to generalized Fresnel integral calculation and establishes the relationship among Fresnel integral, generalized Fresnel integral and Dirichlet integral which are all found to be the special cases of Euler integral formula.

Key words: Fresnel integral; generalized Fresnel integral; Euler integral formula; generalized integral of parametric variable; inner close uniformly convergence; limit theory of function column integral