

部分测量数据和无溢出二次模型修正问题的可解条件

罗海林, 张二喜

(成都理工大学管理科学学院, 成都 610059)

摘要:针对三个系数矩阵都对称,质量矩阵非奇异和测量数据部分测得的二次模型修正问题,主要研究了它的可解性。首先,给出了该问题的研究背景和文献综述并提出一种特殊部分测量数据的二次有限元模型修正问题,给出两个重要引理,最后,采用矩阵分块法求得问题的可解条件。

关键词:二次模型;模型修正;无溢出现象;部分测量数据

中图分类号:O151;O321

文献标志码:A

引言

二次模型修正问题常出现在振动工程中,修正生成有限元模型的振动结构形式为:

$$M_0 \ddot{q}(t) + C_0 \dot{q}(t) + K_0 q(t) = 0 \quad (1)$$

其中, M_0 , C_0 和 K_0 分别是质量矩阵,阻尼矩阵和刚度矩阵。系数矩阵 M_0 , C_0 和 K_0 满足二次束:

$$Q_0(\lambda) = \lambda^2 M_0 + \lambda C_0 + K_0 \quad (2)$$

其中,特征值 λ 与自然频率相关,特征向量是系统(1)的振型。系数矩阵 M_0 , C_0 和 K_0 满足线性代数系统:

$$M_0 X \Lambda^2 + C_0 X \Lambda + K_0 X = 0 \quad (3)$$

二次模型修正问题是从 (M_0, C_0, K_0) 更新到 (M, C, K) , 其中 M_0 , C_0 , K_0 , M , C 和 K 为对称矩阵,并且 M_0 和 M 是非奇异矩阵。修正后的模型 (M, C, K) 满足:

$$M Y \Sigma^2 + C Y \Sigma + K Y = 0 \quad (4)$$

$$M X \Lambda^2 + C X \Lambda + K X = 0 \quad (5)$$

其中, $\Lambda = \text{diag}\{\Lambda_2, \Lambda_3\}$, $X = [X_2, X_3]$, (Λ_1, X_1) 为需要修正部分的特征对, (Σ, Y) 为测量特征信息, (Λ, X) 为保持不变部分的特征对。二次模型修正问题就是用测得的特征信息 (Σ, Y) 去替代原始的特征对 (Λ_1, X_1) , 使得修正后的矩阵 M, C, K 满足(4)式和(5)式。

本文研究部分不完全测量数据和无溢出现象的二次有限元模型修正问题。在数学上,部分不完全测量数

据和无溢出现象的二次有限元模型修正问题可以描述为:

问题 I (二次模型修正问题) 给定原始二次模型 (M_0, C_0, K_0) , 和少量相关特征对 (Λ_1, X_1) , 在这里 M_0 , C_0 和 K_0 都是对称矩阵, $\Lambda_1 \in R^{p \times p}$ 和 $X_1 \in R^{n \times p}$, $p \leq n$ 。设新测得的特征对为 (Σ, Y) , 在这里 $\Sigma \in R^{p \times p}$ 和 $Y \in R^{n \times p}$ 。修正二次模型 (M_0, C_0, K_0) 到一个新的二次模型 (M, C, K) , 使得:

(1) (Σ, Y) 是修正后模型 (M, C, K) 的 p 个特征对, 其中, $Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$, $Y_{11} \in R^{p \times r}$ 和 $Y_{22} \in R^{(n-p) \times (p-r)}$ 已测得, 并且 $\text{rank}(Y_{11}) = r$ 和 $\text{rank}(Y_{22}) = p - r$; $Y_{21} \in R^{(n-p) \times r}$ 和 $Y_{12} \in R^{p \times (p-r)}$ 未知。

(2) (M, C, K) 中其余的 $2n - p$ 个特征对与原始模型 (M_0, C_0, K_0) 中的保持一致。

在问题 I 中, (1) 为部分测得数据条件, (2) 为无溢出条件。修正后模型 (M, C, K) 满足方程(4)和方程(5), 这就被称为部分测量和无溢出的二次模型修正问题。

文献[1]已经求解得出 (M, C, K) 参数表达式和西尔维斯特方程。文献[2]中采用近似逼近法求解二次模型修正问题。文献[3]用迭代算法解决无阻尼系统下的二次模型修正问题。文献[4]用迭代算法解决了二次模型修正问题。文献[5]用一种全新的方法求解无阻尼下

的二次模型修正问题,同时保持修正后的模型正定和无溢出。文献[6]采用牛顿法研究了陀螺结构下的二次模型修正。文献[7]研究了阻力陀螺系统下的二次逆特征值问题。文献[8]用半正定规划技术研究结构二次逆特征值问题,该问题在理论和计算上都存在很大的难度。文献[9]主要讨论的是二次模型修正问题的无溢出现象。文献[10]主要研究的是二次模型修正问题的无溢出现象。特别的,对于无阻尼的二次模型修正问题总是可能满足无溢出条件。文献[11]研究的是基于梯度的迭代算法的陀螺系统的二次模型修正问题,给定系数矩阵 M 和 K 是对称正定矩阵和 G 是反对称矩阵。使得修正后的矩阵 G 和 K 分别近似逼近于 G_0 和 K_0 (为给定的初始矩阵),其中 $2p < n$ 。修正后的矩阵 G 保持反对称性, K 保持对称性。文献[12]考虑的是质量矩阵 M 确定,采用对偶方法(近似逼近)修正刚度矩阵,使得修正后的刚度矩阵 K 改变最少,并且保持对称性,正定性和稀疏性。文献[13]考虑的是质量矩阵 M 确定,采用矩阵线性变分不等式的方法(近似逼近)修正刚度矩阵,使得修正后的刚度矩阵 K 改变最少,并且保持对称性,正定性和稀疏性。文献[14]研究的是阻尼陀螺系统下的二次模型修正问题,给定矩阵 M, C 和 K 都是对称的(其中, M 和 K 是正定矩阵),矩阵 G 和 N 是反对称的,运用牛顿迭代法,使得修正后的模型保持原有机机构(即对称性或反对称性和正定性)。文献[15]考虑的是质量矩阵 M 确定,采用近点方法(最佳逼近)修正刚度矩阵,使得修正后的刚度矩阵 K 保持对称性、正定性和物理连接性。文献[16]研究的是无阻尼系统下的二次模型修正问题。本文采用最佳逼近方法(克罗内克积求解模型),使得修正后的模型保持物理连接性和满足无溢出条件。本文主要解决了 2 个问题:第一,给出无溢出现象的参数解的表达式;第二,给出该问题的可解条件。

1 两个重要引理

引理 1^[1] 给定测量特征对 $(\Sigma, Y) \in R^{p \times p}$, 无溢出的二次有限元模型修正问题可解仅仅只要存在一个可逆矩阵 $T \in R^{p \times p}$ 和矩阵 D_Σ , 使得

$$Y = X_1 T \tag{6}$$

$$T^T D_\Sigma^0 T = D_\Sigma \tag{7}$$

这里

$$D_\Sigma^0 = -X_1^T X_3^{-T} D_\Sigma^0 X_3^{-1} X_1$$

$$D_\Sigma = Y^T C Y + Y^T M Y \Sigma + \Sigma^T Y^T M Y$$

引理 2^[1] 如果 (M, C, K) 是无溢出的二次有限元模型修正问题的解,那么

$$M = M_0 - M_0 X_1 \Phi X_1^T M_0 \tag{8}$$

$$C = C_0 + M_0 X_1 \Phi \Lambda_1^{-T} X_1^T K_0 +$$

$$K_0 X_1 \Lambda_1^{-1} \Phi X_1^T M_0 \tag{9}$$

$$K = K_0 - K_0 X_1 \Lambda_1^{-1} \Phi \Lambda_1^{-T} X_1^T K_0 \tag{10}$$

其中 $\Phi = \Phi^T \in R^{p \times p}$ 满足西尔维斯特方程

$$(K_1 \Lambda_1^{-1} - \Theta^T M_1) \Phi M_1 + M_1 \Phi (\Lambda_1^{-1} K_1 - M_1 \Theta) = (\Lambda_1 - \Theta)^T M_1 + M_1 (\Lambda_1 - \Theta) \tag{11}$$

这里 $M_1 = X_1^T M_0 X_1, K_1 = X_1^T K_0 X_1, \Theta = T \Sigma T^{-1}$ 。

2 二次模型修正问题的可解条件

在实际情况下被测得的特征向量矩阵通常是不完全的,而且缺失形式多种多样。在这样的情况下也增加了问题求解的难度。

定理 1 设 $Y_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2)$ 在问题 I 中已经被定义, Σ, Y_{11} 和 Y_{22} 已测得并且 $rank(Y_{11}) = r$ 和 $rank(Y_{22}) = p - r$ 。当 T_1 和 T_2 线性无关,问题 I 可解当且仅当存在可逆矩阵 $T = [T_1 \ T_2]$, 其中

$$T_1 = X_{11}^{-1} Y_{11} \tag{12}$$

$$T_2 = X_{12}^+ Y_{22} \tag{13}$$

$$D_\Sigma = \begin{bmatrix} D_{\Sigma_{11}} & D_{\Sigma_{12}} \\ D_{\Sigma_{21}} & D_{\Sigma_{22}} \end{bmatrix} \tag{14}$$

其中

$$D_{\Sigma_{11}} = T_1^T D_1^0 T_1, D_{\Sigma_{22}} = T_2^T D_2^0 T_2$$

$$D_{\Sigma_{21}} = D_{\Sigma_{12}}^T = T_1^T D_1^0 T_2$$

证明 设 $Y = Y_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2)$, 相应将 X_1 和 T 分块为:

$$X_1 = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{bmatrix}$$

$$T = [T_1 \ T_2]$$

其中

$$X_{11} \in R^{p \times p}, X_{12} \in R^{(n-p) \times p}, T_1 \in R^{p \times r}, T_2 \in R^{p \times (p-r)}$$

由(6)式,有:

$$Y_{11} = X_{11} T_1 \tag{15}$$

$$Y_{21} = X_{12} T_1 \tag{16}$$

$$Y_{12} = X_{11} T_2 \tag{17}$$

$$Y_{22} = X_{12} T_2 \tag{18}$$

因为 X_{11} 可逆,由(15)式有(12)式成立。由(16)式和(12)式,有

$$Y_{21} = X_{12} X_{11}^{-1} Y_{11} \tag{19}$$

因为 $X_{12} \in R^{(n-p) \times p}$ 和 $rank(X_{12}) = p$, 那么存在 X_{12}^+ 使得

$$X_{12}^+ X_{12} = I_p \tag{20}$$

由(18)式有(13)式成立,由(17)式和(13)式,有

$$Y_{12} = X_{11} X_{12}^+ Y_{22} \tag{21}$$

由(12)式知,因为 $rank(Y_{11}) = r$, 所以有 $rank(T_1) = r$ 。同理, $rank(T_2) = p - r$ 。又 T_1 和 T_2 线性无关,所以矩阵 T 可逆。设 $D_\Sigma = D_{\Sigma_{ij}} (i, j = 1, 2)$, 由(7)式得:

$$D_{\Sigma} = \begin{bmatrix} D_{\Sigma_{11}} & D_{\Sigma_{12}} \\ D_{\Sigma_{21}} & D_{\Sigma_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \end{bmatrix} D_1^0 [T_1 \ T_2] = \begin{bmatrix} T_1^T D_1^0 T_1 & T_1^T D_1^0 T_2 \\ T_2^T D_1^0 T_1 & T_2^T D_1^0 T_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

所以得

$$D_{\Sigma_{11}} = T_1^T D_1^0 T_1, D_{\Sigma_{22}} = T_2^T D_1^0 T_2, D_{\Sigma_{21}} = D_{\Sigma_{12}}^T = T_1^T D_1^0 T_2$$

证毕。

3 结束语

本文主要研究部分测量数据和无溢出现象的二次模型修正问题的可解条件。首先提出问题,然后给出该问题的可解条件。对于问题 I 仍有许多问题待完善,比如如何保持问题 I 的解正定,保持该问题正定的条件,这些都有待后续研究。

参考文献:

- [1] KUO Y C,DATTA B N.Quadratic model updating with no spill-over and incomplete measured data:existence and computation of solution[J]. Linear Algebra Appl., 2012,436(7):2480-2493.
- [2] KUO Y C,LIN W W,XU S F.New methods for finite element model updating problems [J]. AIAA, Journal, 2006,44(44):1310-1316.
- [3] YUAN Y X,LIU H. An iterative updating method for undamped structural systems[J]. Meccanica,2002,47(3): 99-706.
- [4] YUAN Y X,LIU H. An iterative updating method for damped structural systems using symmetric eigenstructure assignment[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2014,256(1):268-277.
- [5] MAO X B,DAI H. Finite element model updating with positive definiteness and no spill-over [J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2012,28(2):387-398.
- [6] XIAO X T,GU J,ZHANG L W. Quadratic model updating with gyroscopic structure from partial eigendata[J]. Optim. Eng.,2013,14(3):431-455.
- [7] QIAN J,CHENG M S. Quadratic inverse eigenvalue problem for damped gyroscopic systems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2014,255:306-312.
- [8] LIN M M,DONG B,CHU M T. Semi-definite programming techniques for structured quadratic inverse eigenvalue problems[J]. Numer. Algor.,2010,53(4):419-437.
- [9] CHU M T,LIN W W,XU S F. Updating quadratic models with no spillover effect on unmeasured spectral data [J]. Inverse Problems,2007,23(1):243-256.
- [10] CHU M,DATTA B,LIN W W. Spillover Phenomenon in Quadratic Model Updating[J]. AIAA Journal,2008,46(2):420-428.
- [11] LIU H,YUAN Y. A gradient based iterative algorithm for solving model updating problems of gyroscopic systems[J]. Applied Mathematical Modelling,2012,36(36): 4810-4816.
- [12] YUAN Q. Dual approaches to finite element model updating[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2012,236(7):1851-1861.
- [13] YUAN Q. Matrix linear variational inequality approach for finite element model updating[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2012,28(2):507-516.
- [14] XIAO X,GU J,ZHANG L. Quadratic model updating with gyroscopic structure from partial eigendata[J]. Optim Eng.,2013,14(3):431-455.
- [15] YUAN Q. Proximal - point method for finite element model updating problem[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2013,34(1-2):47-56.
- [16] YUAN Y,ZUO K. A no spill-over updating method for undamped structural systems[J]. Applied Mathematics and Computation,2014,238(7):13-20.

Solvability of Quadratic Model Updating Problems with Solvability of Quadratic Model Updating Problems with No Spillover and Partially Measured Data

LUO Hailin, ZHANG Erxi

(College of Management Science, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract: Based on quadratic model updating problem of partially measurement data with three symmetric coefficient matrix and mass matrix nonsingular, the solvability of it is mainly studied. Firstly, the problems of the background, literature review and quadratic finite element model updating problems with a special partially measurement data are presented; then two important lemmas are given; finally, matrix partition method is used to obtain solvability conditions of the problem.

Key words: quadratic model updating problem; no spillover; partial incomplete eigenvectors