

# 一类级数部分和不等式及其应用

罗 静

(四川理工学院理学院,四川 自贡 643000)

**摘 要:**级数部分和不等式是不等式研究和近代数学发展的基础,基于对经典不等式的研究,建立了一类含有多个参数,结构形式简洁的级数部分和不等式。应用基本不等式,结合初等变换对所建立的不等式进行了严格证明。在分析该类不等式结构特征的基础上,赋予参数特定的值式,得出了一系列重要的推论。通过实例,检验定理及其推论在构造或者证明一大批级数部分和不等式中具有普适性。同时所得结果不仅囊括了众多著名不等式,更是对这些不等式以及相关文献结果的推广、改进和加强。

**关键词:**基本不等式;级数部分和不等式;普适性

**中图分类号:**0178

**文献标志码:**A

## 引 言

级数部分和不等式在不等式研究中占有重要地位,它的一些著名定理在很多领域都是重要的基本工具,是近代数学发展不可缺少的理论基础(比如经典的 Holder 不等式和 Minkowski 不等式是建立  $L_p$  空间的基本工具)。本文以几个基本不等式为引理,建立了一类很有意义的级数部分和不等式。这些结果推广或改进了相关文献的相应结果,在不等式研究中有较好的应用。

## 1 基本引理

本文约定:文中的符号“ $\sum$ ”均指“ $\sum_{k=1}^n$ ”。

**引理 1** (Jensen 不等式推论) 设  $x_k > 0 (k = 1, 2, \dots, n)$ , 当  $p \leq 0$  或  $p \geq 1$  时,

$$\sum x_k^p \geq n^{1-p} (\sum x_k)^p \quad (1)$$

当  $0 < p < 1$  时,

$$\sum x_k^p \leq n^{1-p} (\sum x_k)^p \quad (2)$$

当  $p = 0$ , 或  $p = 1$ , 或  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  时等号成立。

**注** 在文献[1]中取  $f(x) = x^p (x > 0)$  即得此推论。

**引理 2** ( $c_p$  不等式) 设  $x_k > 0 (k = 1, 2, \dots, n)$ , 当  $p \leq 1$  时,

$$\sum x_k^p \geq (\sum x_k)^p \quad (3)$$

当  $p > 1$  时,

$$\sum x_k^p \leq (\sum x_k)^p \quad (4)$$

当  $p = 1$ , 或  $n = 1$  时等号成立。

**引理 3** (Holder 不等式) 设  $x_k, y_k \geq 0 (1 \leq k \leq n)$ ,  $\alpha + \beta = 1$ , 当  $\alpha\beta > 0$  时,

$$\sum x_k^\alpha y_k^\beta \leq (\sum x_k)^\alpha (\sum y_k)^\beta \quad (5)$$

当  $\alpha\beta < 0$  时,

$$\sum x_k^\alpha y_k^\beta \geq (\sum x_k)^\alpha (\sum y_k)^\beta \quad (6)$$

当  $x_k = 0$ , 或  $y_k = 0$  时等号成立;若  $x_k \neq 0$  且  $y_k \neq 0$ , 则仅

当  $\frac{x_k}{x_k} = \frac{y_k}{y_k}$  时等号成立。

**引理 4** (Chebyshev 不等式) 设  $\{x_n\}, \{y_n\}$  是两个实序列, 当它们同增, 或同减时,

$$\sum x_k y_k \geq \frac{1}{n} \sum x_k \sum y_k \tag{7}$$

当它们一增一减时,

$$\sum x_k y_k \leq \frac{1}{n} \sum x_k \sum y_k \tag{8}$$

当且仅当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , 或  $y_1 = y_2 = \dots = y_n$  时等号成立。

### 2 主要结果及证明

**定理1** 设  $x_k, y_k > 0 (1 \leq k \leq n), r > 0$ , 则当  $\alpha\beta < 0, \alpha - \beta \geq r$  时,

$$\left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r \leq \frac{\left(\sum x_k^r\right)^\alpha}{\left(\sum y_k^r\right)^\beta} \tag{9}$$

当  $\alpha\beta > 0, \alpha - \beta \leq r$  时,

$$\left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r \geq \frac{\left(\sum x_k^r\right)^\alpha}{\left(\sum y_k^r\right)^\beta}$$

当且仅当  $\frac{x_k}{\sum x_k} = \frac{y_k}{\sum y_k}$ , 且  $\alpha - \beta = r$  时等号成立。

**证明** 当  $\alpha\beta < 0, \alpha - \beta \geq r$  时,  $\frac{\alpha - \beta}{r} \geq 1$  且

$\frac{\alpha}{\alpha - \beta} \cdot \frac{-\beta}{\alpha - \beta} > 0$ , 由(4)式与(5)式得

$$\begin{aligned} \left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r &= \\ [ \sum (x_k^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} y_k^{\frac{-\beta}{\alpha-\beta}})^{\frac{\alpha-\beta}{r}} ]^r &\leq \\ [ (\sum x_k^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} y_k^{\frac{-\beta}{\alpha-\beta}})^{\frac{\alpha-\beta}{r}} ]^r &= \\ [ \sum (x_k^r)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} (y_k^r)^{\frac{-\beta}{\alpha-\beta}} ]^{\alpha-\beta} &\leq \\ [ (\sum x_k^r)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} (\sum y_k^r)^{\frac{-\beta}{\alpha-\beta}} ]^{\alpha-\beta} &= \\ (\sum x_k^r)^\alpha (\sum y_k^r)^{-\beta} \end{aligned}$$

即是

$$\left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r \leq \frac{\left(\sum x_k^r\right)^\alpha}{\left(\sum y_k^r\right)^\beta}$$

同理可证  $\alpha\beta > 0, \alpha\beta \leq r$  时的情况。

**定理2** 设  $x_k, y_k > 0 (1 \leq k \leq n), r > 0, \alpha\beta > 0, \alpha - \beta \geq r$ , 则

$$\left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r \geq n^{r+\beta-\alpha} \frac{\left(\sum x_k^r\right)^\alpha}{\left(\sum y_k^r\right)^\beta}$$

对  $\alpha - \beta = r$ , 当且仅当  $\frac{x_k}{\sum x_k} = \frac{y_k}{\sum y_k}$  时等号成立。

对  $\alpha - \beta > r$ , 当且仅当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , 且  $y_1 = y_2 = \dots = y_n$  时等号成立。

**证明** 由题设条件知  $\frac{\alpha - \beta}{r} \geq 1$ , 且  $\frac{\alpha}{\alpha - \beta} \cdot \frac{-\beta}{\alpha - \beta} <$

0。由(1)式与(6)式得

$$\begin{aligned} \left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r &= \\ [ \sum (x_k^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} y_k^{\frac{-\beta}{\alpha-\beta}})^{\frac{\alpha-\beta}{r}} ]^r &= \\ \{ \sum [ (x_k^r)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} (y_k^r)^{\frac{-\beta}{\alpha-\beta}} ]^{\frac{\alpha-\beta}{r}} \}^r &\geq \\ \{ n^{1-\frac{\alpha-\beta}{r}} [ \sum (x_k^r)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} (y_k^r)^{\frac{-\beta}{\alpha-\beta}} ]^{\frac{\alpha-\beta}{r}} \}^r &= \\ n^{r+\beta-\alpha} [ \sum (x_k^r)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} (y_k^r)^{\frac{-\beta}{\alpha-\beta}} ]^{\alpha-\beta} &\geq \\ n^{r+\beta-\alpha} [ (\sum x_k^r)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} (\sum y_k^r)^{\frac{-\beta}{\alpha-\beta}} ]^{\alpha-\beta} &= \\ n^{r+\beta-\alpha} (\sum x_k^r)^\alpha (\sum y_k^r)^{-\beta} \end{aligned}$$

即是

$$\left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r \geq n^{r+\beta-\alpha} \frac{\left(\sum x_k^r\right)^\alpha}{\left(\sum y_k^r\right)^\beta}$$

**定理3** 设  $x_k, y_k > 0 (1 \leq k \leq n), r > 0, \alpha > 0, \beta < 0, \alpha - \beta \leq r$ , 则

$$\left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r \leq n^{r+\beta-\alpha} \frac{\left(\sum x_k^r\right)^\alpha}{\left(\sum y_k^r\right)^\beta}$$

对  $\alpha - \beta = r$ , 当且仅当  $\frac{x_k}{\sum x_k} = \frac{y_k}{\sum y_k}$  时等号成立,

对  $\alpha - \beta < r$ , 当且仅当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , 且  $y_1 = y_2 = \dots = y_n$  时等号成立。

**证明** 同定理2, 过程略。

**定理4** 设  $x_k, y_k > 0 (1 \leq k \leq n), r > 0$ , 则

当  $\alpha \leq 0, \beta > 0$  时有

$$\left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r \geq n^{r+\beta-\alpha} \frac{\left(\sum x_k^r\right)^\alpha}{\left(\sum y_k^r\right)^\beta} \tag{10}$$

当  $\alpha \geq 0, r \geq -\beta > 0$  时, 不等号反向。当且仅当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , 且  $y_1 = y_2 = \dots = y_n$  时等号成立。

**证明** (i) 当  $\alpha = 0, \beta > 0$  时, 由题设知  $-\frac{\beta}{r} < 0$ 。

根据(1)式得

$$\begin{aligned} \left(\sum \frac{1}{y_k^\beta}\right)^r &= [ \sum (y_k^r)^{-\frac{\beta}{r}} ]^r \geq \\ [ n^{1+\frac{\beta}{r}} (\sum y_k^r)^{-\frac{\beta}{r}} ]^r &= n^{r+\beta} \frac{1}{(\sum y_k^r)^\beta} \end{aligned}$$

即(10)式成立。

(ii) 当  $\alpha < 0, \beta > 0$  时, 由 (i) 的结论得

$$\left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r = \left[\sum \frac{1}{(x_k^{\frac{\alpha}{r}} y_k^{\frac{\beta}{r}})^{\beta-\alpha}}\right]^r \geq n^{r+\beta-\alpha} \frac{1}{\left[\sum (x_k^r y_k^{\frac{\beta}{r}})^{\beta-\alpha}\right]^r} = n^{r+\beta-\alpha} \frac{1}{\left[\sum (x_k^r)^{\frac{\beta-\alpha}{r}} (y_k^r)^{\frac{\beta-\alpha}{r}}\right]^{\beta-\alpha}}$$

因为  $\frac{-\alpha}{\beta-\alpha} \frac{\beta}{\beta-\alpha} > 0$ , 由(5)式得

$$\sum (x_k^r)^{\frac{\beta-\alpha}{r}} (y_k^r)^{\frac{\beta-\alpha}{r}} \leq \left(\sum x_k^r\right)^{\frac{\beta-\alpha}{r}} \left(\sum y_k^r\right)^{\frac{\beta-\alpha}{r}}$$

式两边  $\beta - \alpha$  乘方后取倒数得

$$\frac{1}{\left[\sum (x_k^r)^{\frac{\beta-\alpha}{r}} (y_k^r)^{\frac{\beta-\alpha}{r}}\right]^{\beta-\alpha}} \geq \frac{1}{\left(\sum x_k^r\right)^{-\alpha} \left(\sum y_k^r\right)^\beta}$$

由传递性得

$$\left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r \geq n^{r+\beta-\alpha} \frac{1}{\left(\sum x_k^r\right)^{-\alpha} \left(\sum y_k^r\right)^\beta} = n^{r+\beta-\alpha} \frac{\left(\sum x_k^r\right)^\alpha}{\left(\sum y_k^r\right)^\beta}$$

此时(10)式成立。

同理可证  $\alpha \geq 0, r \geq -\beta > 0$  时的情况。

**定理 5** 设  $x_k, y_k > 0 (1 \leq k \leq n), \alpha \geq r > 0$ , 若  $\beta > 0$ , 且  $\{x_n\}, \{y_n\}$  是一增一减序列, 或  $\beta \leq -r$ , 且  $\{x_n\}, \{y_n\}$  是同增或同减序列, 则

$$\left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r \geq n^{r+\beta-\alpha} \frac{\left(\sum x_k^r\right)^\alpha}{\left(\sum y_k^r\right)^\beta}$$

当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , 且  $y_1 = y_2 = \dots = y_n$ , 或  $\alpha = \beta$ , 且  $x_k = \lambda y_k$  ( $\lambda$  为常数) 时等号成立。

**证明** 由题设知  $\frac{\alpha}{r} \geq 1$ , 若  $\beta > 0$ , 且  $\{x_n\}, \{y_n\}$  是一增一减序列, 则  $-\frac{\beta}{r} < 0$ , 且  $\{x_n^\alpha\}$  与  $\{y_n^{-\beta}\}$  是同增或同减序列, 由(7)式与(1)式得

$$\left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r = \left(\sum x_k^\alpha y_k^{-\beta}\right)^r \geq \left(\frac{1}{n} \sum x_k^\alpha \sum y_k^{-\beta}\right)^r = n^{-r} \left[\sum (x_k^r)^{\frac{\alpha}{r}} (y_k^r)^{-\frac{\beta}{r}}\right]^r \geq n^{-r} \left[n^{1-\frac{\alpha}{r}} \left(\sum x_k^r\right)^{\frac{\alpha}{r}} n^{1+\frac{\beta}{r}} \left(\sum y_k^r\right)^{-\frac{\beta}{r}}\right]^r = n^{r+\beta-\alpha} \left(\sum x_k^r\right)^\alpha \left(\sum y_k^r\right)^{-\beta}$$

即是

$$\left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r \geq n^{r+\beta-\alpha} \frac{\left(\sum x_k^r\right)^\alpha}{\left(\sum y_k^r\right)^{-\beta}}$$

同理可证  $\beta \leq -r$ , 且  $\{x_n\}, \{y_n\}$  是同增或同减序列的情况。

**定理 6** 设  $x_k, y_k > 0 (1 \leq k \leq n), 0 < \alpha \leq r, -r \leq$

$\beta < 0$ , 且  $\{x_n\}, \{y_n\}$  是一增一减序列, 则  $\left(\sum \frac{x_k^\alpha}{y_k^\beta}\right)^r \leq n^{r+\beta-\alpha} \frac{\left(\sum x_k^r\right)^\alpha}{\left(\sum y_k^r\right)^\beta}$

当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , 且  $y_1 = y_2 = \dots = y_n$ , 或当  $\alpha = \beta$ , 且  $x_k = \lambda y_k$  ( $\lambda$  为常数) 时等号成立。

证明同定理 5, 过程略。

在定理 1 ~ 定理 6 中, 各不等式成立的条件虽然各异, 但结果的结构形式相同或者十分相近。特别是指数  $\alpha$  与  $\beta$  的非共轭性, 寓示着不等式有较宽的应用范围。对定理中各参数取适当的值得出一系列重要的推论。

**推论 1** (Jensen 不等式推论的推广) 设  $x_k > 0 (1 \leq k \leq n)$ , 且  $r > 0$ , 若  $\alpha \leq 0$ , 或  $\alpha \geq r$ , 则  $\left(\sum x_k^\alpha\right)^r \geq n^{r-\alpha} \left(\sum x_k^r\right)^\alpha$ , 若  $0 \leq \alpha \leq r$ , 则  $\left(\sum x_k^\alpha\right)^r \leq n^{r-\alpha} \left(\sum x_k^r\right)^\alpha$ 。

在定理 2, 定理 3 和定理 4 中, 取  $y_k = 1$ , 即得此推论。特别, 取  $r = 1$ , 即为引理 1。

**推论 2** (Cauchy 不等式的推广) 设  $x_k, y_k > 0 (1 \leq k \leq n)$ , 且  $\alpha \geq \frac{r}{2} > 0$ , 则  $\left(\sum x_k^\alpha y_k^\alpha\right)^r \leq \left(\sum x_k^r\right)^\alpha \left(\sum y_k^r\right)^\alpha$ 。

在定理 1 中, 设  $\beta = -\alpha < 0$ , 即得此推论。特别, 取  $\alpha = 1, r = 2$ , 即是 Cauchy 不等式。

**推论 3** (Holder 不等式的推广) 设  $x_k, y_k > 0 (1 \leq k \leq n)$ , 当  $p > 0, q > 0$ , 且  $p + q \geq 1$  时,  $\sum x_k^p y_k^q \leq \left(\sum x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$ , 当  $p < 0, q < 0$ , 且  $p + q \leq 1$  时,  $\sum x_k^p y_k^q \geq \left(\sum x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$ 。

$$(\sum x_k)^p (\sum y_k)^q.$$

在定理1中,设  $\alpha = p, \beta = -q, r = 1$ , 即得此推广。

**推论4** (Holder不等式的另一推广) 设  $x_k, y_k > 0 (1 \leq k \leq n), r > 0$ , 则当  $p, q < 0$ , 且  $p + q \geq r$  时,  $(\sum x_k^p y_k^q)^r \geq n^{r-p-q} (\sum x_k^r)^p (\sum y_k^r)^q$ , 当  $p > 0, q > 0$ , 且  $p + q \leq r$  时,  $(\sum x_k^p y_k^q)^r \leq n^{r-p-q} (\sum x_k^r)^p (\sum y_k^r)^q$ .

在定理2与定理3中取  $\alpha = p, \beta = -q$  即得此推论。

(注:在此推论中取  $p = \frac{1}{t}, q = \frac{1}{s}, p + q = r = 1$ , 并设  $x_k = a_k^t, y_k = b_k^s$ , 即得 Holder 不等式的基本形式)。

**推论5** (Radon不等式推广) 设  $x_k, y_k > 0 (1 \leq k \leq n)$ , 则当  $p > 0, q < 0, p + q > 0$  时,

$$\left(\sum \frac{x_k^{p+q}}{y_k^q}\right)^p \leq \frac{(\sum x_k^p)^{p+q}}{(\sum y_k^q)^q}$$

当  $p > 0, q > 0$  时,

$$\left(\sum \frac{x_k^{p+q}}{y_k^p}\right)^q \geq \frac{(\sum x_k^q)^{p+q}}{(\sum y_k^q)^p}$$

在定理1中,设  $\alpha = p + q > 0, \beta = q < 0, r = p$  得推论5中第一个不等式, 设  $\alpha = p + q, \beta = p > 0, r = q > 0$  得推论5中第二个不等式。特别,在第二个不等式中取  $q = 1$ , 即是 Radon 不等式。

**推论6** (Chebyshev不等式推广) 设  $x_k, y_k > 0 (1 \leq k \leq n)$ , 则当  $\alpha \geq r > 0$ , 且  $\{x_n\}, \{y_n\}$  是同增或同减序列时,  $(\sum x_k^\alpha y_k^\alpha)^r \geq n^{r-2\alpha} (\sum x_k^r)^\alpha (\sum y_k^r)^\alpha$ , 当  $0 < \alpha \leq r$ , 且  $\{x_n\}, \{y_n\}$  是一增一减序列时,  $(\sum x_k^\alpha y_k^\alpha)^r \leq n^{r-2\alpha} (\sum x_k^r)^\alpha (\sum y_k^r)^\alpha$ 。

在定理5与定理6中,设  $\beta = -\alpha$  即得此推论。特别,若取  $\alpha = r = 1$ , 则得文献[2]中的不等式。

**推论7** (Shapiro不等式的多参数推广) 设  $x_k > 0, \lambda - \mu x_k^t > 0 (k = 1, 2, \dots, n), \lambda, \mu, t \in R, r > 0$ , 则当  $\alpha\beta > 0, \alpha - \beta \geq r$  时有

$$\left[\sum \frac{x_k^\alpha}{(\lambda - \mu x_k^t)^\beta}\right]^r \geq$$

$$n^{r+\beta-\alpha} \frac{(\sum x_k^r)^\alpha}{[\sum (\lambda - \mu x_k^t)^r]^\beta}$$

在定理2中,设  $y_k = \lambda - \mu x_k^t$  即得此推论。

实际上,在6个定理中都设  $y_k = \lambda - \mu x_k^t$ , 即可得到

文献[3-4]中的所有不等式。

**推论8** (Minkowshi不等式推广)<sup>[5-8]</sup> 设  $a_{jk} > 0 (1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m)$ , 则当  $p \geq 1$  时,

$$\left[\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

当  $p \leq 1$  时,不等号反向。当且仅当

$$\frac{a_{1k}}{\sum_{k=1}^n a_{1k}} = \dots = \frac{a_{mk}}{\sum_{k=1}^n a_{mk}}$$

等号成立。

**证明** (9)式中取  $\alpha = \frac{1}{p} (p \geq 1), \beta = \frac{1}{p} - 1, r = 1$ , 则

$$\sum_{k=1}^n x_k^{\frac{1}{p}} y_k^{1-\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n y_k\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

设  $x_k = a_{jk}^p, y_k = \left(\sum_{j=1}^m a_{jk}\right)^p$ , 代入上式:

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \left(\sum_{j=1}^m a_{jk}\right)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk}\right)^p\right]^{1-\frac{1}{p}}$$

记

$$\left(\sum_{j=1}^m a_{jk}\right)^{p-1} = A$$

$$\left[\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk}\right)^p\right]^{1-\frac{1}{p}} = B$$

则

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} A \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^p\right)^{\frac{1}{p}} B$$

依次取  $j = 1, 2, \dots, m$  得  $m$  个同向不等式, 累加得

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk}\right) A \leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^p\right)^{\frac{1}{p}} B$$

即

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk}\right)^p \leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk}\right)^p\right]^{1-\frac{1}{p}}$$

两边同除以  $\left[\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk}\right)^p\right]^{1-\frac{1}{p}}$ ,

得

$$\left[\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

同理可证  $p \leq 1$  时的情况。特别,当  $m = 2$  时即为 Minkowshi 不等式。

### 3 实 例

**例 1** 设正数  $a_k, b_k (1 \leq k \leq n)$  满足  $\sum a_k = A, \sum b_k = B$ , 则当  $p > 0, \beta$  为实数时, 有  $\sum \frac{b_k^\beta}{a_k^p} \geq n \left(\frac{n}{A}\right)^p B^{\frac{\beta}{p}}$ ; 若  $\beta > p \geq 1$ , 则  $\sum \frac{b_k^\beta}{a_k^p} \geq n^{1+p-\beta} \frac{B^\beta}{A^p}$ , 仅当  $a_1 = \dots = a_n, b_1 = \dots = b_n$  时等号成立。

第一个不等式不真(如取  $a_k = b_k = 1, p = \beta = 1$  时, 不等式不成立), 第二个不等式条件过强。此命题可改进为: 设正数  $a_k, b_k (1 \leq k \leq n)$  满足  $\sum a_k = A, \sum b_k = B, p > 0$ , 则当  $q \leq 0$ , 或  $q - p \geq 1$  时有  $\sum \frac{b_k^q}{a_k^p} \geq n \left(\frac{n}{A}\right)^p \left(\frac{B}{n}\right)^q$ , 仅当  $a_1 = \dots = a_n$ , 且  $b_1 = \dots = b_n$  时等号成立。

**证明** 在定理 4 中取  $r = 1, \alpha = q \leq 0, \beta = p > 0$ , 设  $x_k = b_k, y_k = a_k$ , (或在定理 2 中取  $r = 1, \alpha = q, \beta = p > 0$  使  $q - p \geq 1$ , 设  $x_k = b_k, y_k = a_k$ ), 则有

$$\sum \frac{b_k^q}{a_k^p} \geq n^{1+p-q} \frac{(\sum b_k)^q}{(\sum a_k)^p} = n^{1+p-q} \frac{B^q}{A^p} = n \left(\frac{n}{A}\right)^p \left(\frac{B}{n}\right)^q$$

所以不等式成立。

**例 2** 设  $a_k \in R, Ab_k^t + Bc_k^\beta > 0 (k = 1, 2, \dots, n), A, B, t, \beta \in R$ , 设  $S_n = \sum a_k, T_n = \sum b_k^t, G_n = \sum c_k^\beta$ 。则当  $p \geq 1$ , 或  $p \leq 0$  时成立

$$\sum \frac{a_k^{2p}}{Ab_k^t + Bc_k^\beta} \geq \frac{S_n^{2p}}{n^{2p-2}(AT_n + BG_n)}$$

**证明** 在定理 2, 定理 4 中取  $\alpha = 2p (p \geq 1, \text{或 } p \leq 0), \beta = r = 1$ , 则有:

$$\sum \frac{x_k^{2p}}{y_k} \geq n^{2-2p} \frac{(\sum x_k)^{2p}}{\sum y_k}$$

设  $x_k = |a_k|, y_k = Ab_k^t + Bc_k^\beta (A, B, t, \beta \in R)$ , 则

$$\sum \frac{a_k^{2p}}{Ab_k^t + Bc_k^\beta} \geq n^{2-2p} \frac{(\sum a_k)^{2p}}{\sum (Ab_k^t + Bc_k^\beta)}$$

$$n^{2-2p} \frac{|\sum a_k|^{2p}}{AT_n + BG_n} =$$

$$\frac{S_n^{2p}}{n^{2p-2}(AT_n + BG_n)}$$

证毕。

特别, 在此命题中, 设  $A = t = \beta = 1, B = -1, b_k = x_k, c_k = x_{k+1}$ , 则得文献[9]中的不等式:

$$\sum \frac{a_k^{2p}}{x_k - x_{k+1}} \geq \frac{S_n^{2p}}{n^{2p-2}(x_1 - x_{n+1})}$$

若再取  $p = 1$ , 则得文献[10]中的不等式:

$$\sum \frac{a_k^2}{x_k - x_{k+1}} + \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})^2}{x_n - x_1} \geq 0$$

**例 3**<sup>[11]</sup> 设  $a_k \geq 0, M > a_k, 1 \leq k \leq n, S_n = \sum a_k, p \in R$ , 则  $\sum \frac{a_k^p}{M - a_k} \geq \frac{n^{2-p} S_n^p}{nM - S_n}$ 。

**证明** (i) 当  $p > 0$  时, 文献[11]已证不等式成立。

(ii) 当  $p \leq 0$  时, 在定理 4 中, 取  $\alpha = p \leq 0, r = \beta = 1$ , 则

$$\sum \& \frac{x_k^p}{y_k} \geq n^{1+p-p} \frac{(\sum x_k)^p}{\sum y_k}$$

设  $x_k = a_k, y_k = M - a_k$ , 得

$$\sum \frac{a_k^p}{M - a_k} \geq n^{2-p} \frac{(\sum a_k)^p}{\sum (M - a_k)} = \frac{n^{2-p} S_n^p}{nM - S_n}$$

综合 (i) 与 (ii), 对  $\forall p \in R$ , 不等式成立。

特别, 若取  $p = M = 1$ , 则为 Shapiro 不等式。

**例 4** 设  $a_k, b_k > 0 (1 \leq k \leq n), p > 1, s_n(a, p) = \sum a_k^p, s_n(a + b, p) = \sum (a_k + b_k)^p$ , 则成立

$$\frac{s_n(a + b, p + 1)}{s_n(a + b, 1)} \geq n^{1-2p} \left\{ \left[ s_n\left(a, \frac{1}{p}\right) \right]^p + \left[ s_n\left(b, \frac{1}{p}\right) \right]^p \right\}$$

**证明** 当  $p > 1, q < 0$ , 且  $p + q \geq 1$  时, 根据推论 4 得:

$$\sum x_k^p y_k^q \geq n^{1-p-q} (\sum x_k)^p (\sum y_k)^q$$

设  $x_k = \frac{1}{a_k^p}, y_k = (a_k + b_k)^{\frac{p}{q}}$ , 则

$$\sum a_k (a_k + b_k)^p \geq n^{1-p-q} (\sum a_k^{\frac{1}{p}})^p \left[ \sum (a_k + b_k)^{\frac{p}{q}} \right]^q$$

同理,

$$\sum b_k (a_k + b_k)^p \geq$$

$$n^{1-p-q} (\sum b_k^{\frac{1}{p}})^p [\sum (a_k + b_k)^{\frac{p}{q}}]^q$$

两式相加:

$$\begin{aligned} & \sum (a_k + b_k)^{p+1} \geq \\ & n^{1-p-q} [\sum (a_k + b_k)^{\frac{p}{q}}]^q [(\sum a_k^{\frac{1}{p}})^p + (\sum b_k^{\frac{1}{p}})^p] \geq \\ & n^{1-p-q} \{n^{1-\frac{p}{q}} [\sum (a_k + b_k)^{\frac{p}{q}}]^q\}^q [(\sum a_k^{\frac{1}{p}})^p + \\ & (\sum b_k^{\frac{1}{p}})^p] = \\ & n^{1-2p} [\sum (a_k + b_k)]^p [(\sum a_k^{\frac{1}{p}})^p + (\sum b_k^{\frac{1}{p}})^p] \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} & \frac{\sum (a_k + b_k)^{p+1}}{[\sum (a_k + b_k)]^p} \geq \\ & n^{1-2p} [(\sum a_k^{\frac{1}{p}})^p + (\sum b_k^{\frac{1}{p}})^p] \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{s_n(a+b, p+1)}{[s_n(a+b, 1)]^p} \geq \\ & n^{1-2p} \left\{ \left[ s_n\left(a, \frac{1}{p}\right) \right]^p + \left[ s_n\left(b, \frac{1}{p}\right) \right]^p \right\} \end{aligned}$$

例5 (Mikolas 不等式) 设  $a_{jk} > 0$ , 若  $\beta \geq 1$  且  $\alpha\beta \geq 1$ , 则

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{jk}^\beta)^\alpha \geq \\ & m^{1-\alpha\beta} \left[ \sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{jk}^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \right]^{\alpha\beta} \geq \\ & m^{1-\alpha\beta} \left[ \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^m a_{jk}^\beta)^\beta \right]^\alpha \end{aligned}$$

当  $\beta \leq 1$  且  $\alpha\beta \leq 1$  时, 不等式反向。

证明 若  $\beta \geq 1$  且  $\alpha\beta \geq 1$ , 则  $\alpha \geq \frac{1}{\beta}$ 。根据推论 1 得

$$\left(\sum_{j=1}^m x_j^\alpha\right)^{\frac{1}{\beta}} \geq m^{\frac{1}{\beta}-\alpha} \left(\sum_{j=1}^m x_j^{\frac{1}{\beta}}\right)^\alpha$$

设  $x_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}^\beta$ , 则

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{jk}^\beta)^\alpha \right]^{\frac{1}{\beta}} \geq \\ & m^{\frac{1}{\beta}-\alpha} \left[ \sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{jk}^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \right]^\alpha \end{aligned}$$

两边  $\beta$  方,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{jk}^\beta)^\alpha \geq \\ & m^{1-\alpha\beta} \left[ \sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{jk}^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \right]^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{11}$$

所以待证不等式左式成立。又根据推论 8, 当  $\beta \geq 1$

时,

$$\sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{jk}^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \geq \left[ \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^m a_{jk}^\beta)^\beta \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

所以,

$$\left[ \sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{jk}^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \right]^{\alpha\beta} \geq \left[ \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^m a_{jk}^\beta)^\beta \right]^\alpha$$

所以,

$$\begin{aligned} & m^{1-\alpha\beta} \left[ \sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{jk}^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \right]^{\alpha\beta} \geq \\ & m^{1-\alpha\beta} \left[ \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^m a_{jk}^\beta)^\beta \right]^\alpha \end{aligned} \tag{12}$$

即待证不等式右式成立。综合(11)式与(12)式, 命题获证。

同理可证  $\beta \leq 1$  且  $\alpha\beta \leq 1$  的情况。

### 4 结束语

本文定理所述不等式结构特征具有简单性和普适性<sup>[12]</sup>, 如果继续对其中各量取适当的值式, 不仅可以涵盖、推广或改进相关文献的相应结果<sup>[13-15]</sup>, 更可得出一大批级数部分和不等式。

### 参考文献:

[1] 陈纪修. 数学分析[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2009.

[2] 胡克. 解析不等式的若干问题[M]. 湖北: 武汉大学出版社, 2007.

[3] 隆建军. Shapiro 不等式的指数推广[J]. 佳木斯大学学报: 自然科学版, 2012, 30(1): 121-123, 131.

[4] 隆建军. 关于推广的 Shapiro 不等式及其应[J]. 宜宾学院学报: 自然科学版, 2013, 13(6): 8-11.

[5] 曾庆黎. Minkowshi 不等式的一个证明[J]. 北京联合大学学报: 综合版, 1994(3): 70-73.

[6] 魏巍, 乔建斌. Minkowshi 不等式两种形式的推广[J]. 中北大学学报: 自然科学版, 2013(2): 109-111.

[7] 阳凌云. 离散型 H.Minkowshi 不等式的推广[J]. 株洲工学院学报, 2005(1): 35-36.

[8] 吴树宠. Holder 不等式和 Minkowshi 不等式的推广[J]. 数学学报, 2006(6): 1267-1274.

[9] 罗静. 用  $E\xi^2 \geq (E\xi)^2$  证明一类级数部分和不等式[J].

- 四川理工学院学报:自然科学版,2012,25(6):65-68.
- [10] 吴振奎.数学的创造[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.
- [11] 匡继昌.常用不等式[M].济南:山东科学技术出版社,2014.
- [12] 匡继昌.Hilbert 不等式研究的新进展[J].北京联合大学学报:自然科学版,2010(1):51-53.
- [13] 沈艳.Shapiro 不等式的改进[J].湖南科技学院学报,2006(5):28-30.
- [14] 季明银.一类不等式的推广[J].北京:数学通报,2008(1):60-61.
- [15] 文开庭.Shapiro 不等式及其变形的推广与应用[J].贵州教育学院学报:自然科学版,2006(2):4-6.

## A Kind of Series Part and Inequality and Its Application

*LUO Jing*

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

**Abstract:** Series part and inequality is the foundation of inequality research and the development of modern mathematics. Based on the study of classical inequalities, series part and inequality with multiple parameters and simple structure form is established. In the application of some basic inequalities, the inequality is strictly proved by elementary transformation. Based on the analysis of the structure characteristic of the inequality and the given specific parameters value, a series of important corollaries are presented. Through several notable examples, the test theorem and its corollary are universal in constructing or proving a large number of series and inequalities. At the same time, the results not only include a large number of well-known inequalities, but also are the promotion, improvement and enhancement of these inequalities and the recent literature.

**Key words:** basic inequality; series part and inequality; generalization