

# 分担值与正规族

吕凤姣, 蒋红敬

(黄河科技学院信息工程学院, 郑州 450063)

**摘要:**研究了与分担值有关的亚纯函数的正规性,并得到了相关的正规定则。正规族的理论是与函数取值的问题紧密地联系在一起,把亚纯函数正规族与分担值或分担函数结合起来考虑是亚纯函数正规族理论研究的一个重要课题。目前正规族理论在亚纯函数的唯一性、复解析动力系统和复微分方程等方面有着许多应用。利用 Nevanlinna 理论研究一类涉及分担值的亚纯函数族的正规性,应用 Zalcman-Pang 方法得到一个与分担值相关的正规定则。主要结果为:设  $F$  是单位圆盘  $\Delta$  上的一族亚纯函数,  $a$  和  $b$  是任意两个非零有穷复数,  $k$  为正整数,若对任一  $f(z) \in F$ , 有  $f(z)$  的零点重级至少为  $k+1$ , 极点重级至少为 2, 且  $f^{(k)}(z) = a \Rightarrow |f(z)| \geq b$ , 则  $F$  在  $\Delta$  上正规。

**关键词:**亚纯函数;分担值;正规族

**中图分类号:**O174.52

**文献标志码:**A

## 1 引言及主要结果

设  $f(z)$  为开平面上非常数亚纯函数,采用值分布论中相关记号<sup>[1-2]</sup>,在此给出相关的定义。

**定义 1** 设  $D$  是  $C$  上的区域,  $f, g$  为区域  $D$  上的两个亚纯函数,若对复数  $a \in C, \bar{E}_f(a) = \bar{E}_g(a)$ , 则称  $f$  与  $g$  在  $D$  上分担  $a$ , 或称  $IM$  分担  $a$ 。其中  $\bar{E}_f(a) = f^{-1}(\{a\}) \cap D = \{z \in D; f(z) = a\}$ 。

**定义 2** 设  $f(z), g(z)$  为区域  $D$  上的两个亚纯函数,对复数  $a \in C$ , 若  $f(z) - a$  的零点为  $z_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 如果  $z_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  也是  $g(z) - a$  的零点(不计重数), 则称单向分担  $a$ , 记为  $f(z) = a \Rightarrow g(z) = a$ 。

**定义 3** 设  $F$  为复平面一区域  $D$  上的一族亚纯函数,如果从  $F$  中任取一函数序列  $\{f_n(z)\}$  均可选出一子序列  $\{f_{n_i}(z)\}$  在区域  $D$  上按球距内闭一致收敛于一亚纯函数或  $\infty$ , 则称  $F$  在区域  $D$  上正规。

**定理 1**<sup>[3]</sup> 设  $f(z)$  是一个非常数亚纯函数, 如果  $f(z)$  和  $f'(z)$   $IM$  分担三个不同的复数  $a_1, a_2, a_3$ , 则  $f = f'$ 。

**定理 2**<sup>[4]</sup> 设  $F = \{f(z)\}$  是单位圆盘  $\Delta$  上的亚纯函数族,  $a_1, a_2, a_3$  是三个不同的复数, 如果对每个  $f \in F, f$  与  $f'$  同时分担值  $a_1, a_2, a_3$ , 则  $F$  在  $\Delta$  上正规。

**定理 3**<sup>[5]</sup> 设  $F$  是  $D$  上的一亚纯函数族,  $a$  和  $b$  是两个不同的复数, 如果对任一  $f \in F, f(z)$  与  $f'(z)$  在  $D$  内  $IM$  分担  $a, b$ , 则  $F$  在  $D$  内正规。

**定理 4**<sup>[6]</sup> 设  $F$  是单位圆盘  $\Delta$  上的一亚纯函数族,  $a$  是一个非零的有穷复数, 如果对任一  $f \in F, f(z)$  与  $f'(z)$  在  $\Delta$  内  $IM$  分担  $a$ , 且  $f(z)$  的零点是重级的, 则  $F$  在  $\Delta$  内正规。

**定理 5**<sup>[7]</sup> 设  $F$  是单位圆盘  $\Delta$  上的一亚纯函数族,  $a$  和  $b$  是任意两个非零有穷复数,  $k$  为正整数。如果对任一  $f \in F, f(z)$  的零点重级至少是  $k+1$ , 且  $f(z) = a \Leftrightarrow f^{(k)}(z) = b$ , 则  $F$  在  $\Delta$  上正规。

这时,自然地就会考虑定理中的条件能否进一步减弱为单向分担,本文证明了如下定理:

**定理 6** 设  $F$  是单位圆盘  $\Delta$  上的一亚纯函数族,  $a$  和  $b$  是任意两个非零有穷复数,  $k$  为正整数。如果对任一  $f(z) \in F, f(z)$  的零点重级至少为  $k+1$ , 极点重级至

少为 2 且  $f^{(k)}(z) = a \Rightarrow |f(z)| \geq b$ , 则  $F$  在  $\Delta$  上正规。

文献[8-9]举例说明“每个函数的零点重级至少为  $k+1$ , 极点重级至少为 2”是必须的, 这两个例子也说明定理 6 中条件“每个函数的零点重级至少为  $k+1$ , 极点重级至少为 2”是必须的。文献[10]举例说明条件“ $f^{(k)}(z) = a \Rightarrow |f(z)| \geq b$ ”是必要的, 该例子也适用于定理 6。

## 2 相关引理

**引理 1**<sup>[11]</sup> (Zalcman 引理) 设  $k$  为正整数,  $F$  是单位圆盘  $\Delta$  上的亚纯函数族,  $f$  的零点重级均  $\geq k$ , 极点重级均  $\geq j$ , 那么  $F$  在  $\Delta$  上不正规的充要条件是: 对  $\forall \alpha \in (-j, k)$ , 存在函数列  $f_n \in F$ , 点列  $z_n \in \Delta$ , 正数列  $\rho_n \rightarrow 0$ , 使得函数列  $g_n(\zeta) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^\alpha} \rightarrow g(\zeta)$  在复平面上按球距内闭一致地成立。

这里  $g(\zeta)$  为复平面上的一个亚纯函数, 其零点(极点)重级均  $\geq k(j)$ , 且  $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = 1$ 。

**注** 这是 Zalcman 引理的推广, 亦称为 Zalcman 引理, 其中当  $k=1, j=1, \alpha=0$  时是 Zalcman 最早的结果。该形式是文献[12-14]推广而得到的。

**引理 2**<sup>[15]</sup> (Pang-Zalcman 引理) 设  $k$  为正整数,  $F$  是单位圆盘  $\Delta$  上的亚纯函数族,  $f$  的零点重级至少为  $k$ , 假设存在  $A \geq 1$ , 使得当  $f(z) = 0$  时, 有  $|f^{(k)}(z)| \leq A$  对  $\forall f \in F$  都成立。如果  $F$  在单位圆内不正规, 则对  $0 \leq \alpha \leq k$ , 存在正数  $r, 0 < r < 1$ , 复数列  $z_n, |z_n| < r$ , 函数列  $f_n \in F$ , 正数列  $\rho_n \rightarrow 0$ , 使得  $g_n(\zeta) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^\alpha} \rightarrow g(\zeta)$  在复平面上按球距内闭一致地成立。

这里  $g(\zeta)$  为复平面上的一个非常数亚纯函数, 其零点重级至少为  $k$ , 且  $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = kA + 1$ 。特别地,  $g(\zeta)$  的级至多为 2。

**引理 3**<sup>[16]</sup> (Hurwitz 定理) 设函数序列  $\{f_n(z)\}$  在区域  $D$  内解析, 并且在  $D$  内闭一致收敛到一个不恒为零的函数,  $\gamma$  是  $D$  内可求长的闭曲线, 其内部属于  $D$ , 且不经过  $f(z)$  的零点, 则存在正整数  $N$ , 使得当  $n \geq N$  时, 在  $\gamma$  内部,  $f_n(z)$  和  $f(z)$  的零点个数是相同的。

**引理 4**<sup>[17-18]</sup> 设  $f(z)$  为复平面上的有穷级亚纯函数,  $b$  为非零复数,  $k$  为正整数。若  $f(z)$  的零点重级至少为  $k+1$ , 极点重级至少为 2, 且  $f^{(k)}(z) \neq b$ , 则  $f(z)$  为一常数。

## 3 定理 6 的证明

**证明** 假设  $F$  在  $z_0 \in \Delta$  处不正规, 由引理 2 得: 存在

正数  $r, 0 < r < 1$ , 复数列  $z_n, |z_n| < r$ , 函数列  $f_n \in F$ , 正数列  $\rho_n \rightarrow 0$ , 使得  $g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^k} \rightarrow g(\xi)$  在复平面上按球距内闭一致地成立, 其中  $g(\xi)$  为在  $C$  上的级不超过 2 的非常数亚纯函数, 其零点重级至少为  $k+1$ , 极点重级至少为 2。

证  $g^{(k)}(\xi) \neq a$ 。事实上, 假设存在  $\xi_0 \in C$  使得  $g^{(k)}(\xi_0) = a$ , 显然  $g^{(k)}(\xi)$  不恒等于  $a$ , 否则  $g(\xi)$  为一个  $k$  次多项式, 这与  $g(\xi)$  的零点重级至少为  $k+1$  矛盾。故  $g^{(k)}(\xi)$  不恒等于  $a$ 。由 Hurwitz 定理可得: 存在  $g_n(\xi)$  和点列  $\xi_n \rightarrow \xi_0$ , 使得当  $n$  充分大时, 有  $g_n^{(k)}(\xi_n) = a$ , 由  $g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^k}$  可得  $g_n^{(k)}(\xi_n) = f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n)$ 。所以  $f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n) = a$ 。根据定理条件  $f^{(k)}(z) = a \Rightarrow |f(z)| \geq b$ , 所以  $|f(z_n + \rho_n \xi_n)| \geq b$ 。又  $|g_n(\xi_n)| = \left| \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi_n)}{\rho_n^k} \right|$ , 所以  $|g_n(\xi_n)| \geq b \rho_n^{-k} \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ , 故, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $g_n(\xi_n) \rightarrow \infty$ 。而  $g(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi_n) = \infty$ , 这与  $g^{(k)}(\xi_0) = a$  矛盾。因此  $g^{(k)}(\xi) \neq a$  得证。

又  $g(\xi)$  的零点重级至少为  $k+1$ , 极点重级至少为 2, 由引理 4 知:  $g(\xi)$  为一常数, 这与  $g(\xi)$  是非常数亚纯函数矛盾。从而定理 6 得证。

## 4 结束语

目前, 将正规族理论应用到亚纯函数唯一性的研究中, 已取得了一些很好的结果。另外, 正规族的基础理论在复动力系统的 Julia 集分形和拟共形映照理论等方面有着广泛的应用。

### 参考文献:

- [1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [2] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [3] MUES E, STEINMETZ N. Meromorphe funktionen, die mit ihrer ableitung werte teilen[J]. Manuscripta Math., 1969, 29: 195-206.
- [4] SCHWICK W. Sharing values and normality[J]. Arch Math, 1992, 59: 50-54.
- [5] PANG X, LAWRENCE Z. Normality and shared values[J]. Arkiv for Matematik, 2000, 38: 171-182.
- [6] 章文华. 分担值和正规族[J]. 数学研究与评论, 2005,

- 25(2):307-310.
- [7] FANG M L,ZALCMAN L.Normal families and shared values of meromorphic functions [J]. Annals Polonici Mathematici,2003,80:133-141.
- [8] ZHANG G M,PANG X C,ZALCMAN L.Normal families and omitted functions II[J].Bull London Math Soc, 2009,41:63-71.
- [9] 王雪琴.亚纯函数的分担值与正规族[J].数学物理学报,2014,34A(4):1008-1013.
- [10] 李三华,刘忠东,吴高翔.与分担值相关的正规族[J].华东师范大学学报:自然科学版,2013(1):54-60.
- [11] ZALCMAN L.A heuristic principle in complex function theory[J].Ame Math Mont,1975(82):813-817.
- [12] PANG X.Blochs principle and normal criterion[J].Sci China Ser A,1989(32):782-791.
- [13] SCHWICK W.Normality Crietion for families of mero-morphic functions[J].Anal Math,1989(52):241-289.
- [14] 陈怀惠,顾永兴.Marty 定则的改进及应用[J].中国科学 A 辑,1993,23(2):123-129.
- [15] PANG X C,ZALCMAN L.Normality families and shared values[J].Bull London Math Soc,2000,32:325-331.
- [16] 方企勤.复变函数教程[M].北京:北京大学出版社, 1996.
- [17] HAYMAN W K.Picard Value of Meromorphe functions And Their Derivatives[J].Annals of Mathematics, 1959,70:9-42.
- [18] LI S,GAO Z.Results on a question of Zhangand Yang [J].Acta Math.Sci.Ser.B Engl.Ed.,2012,32(2):717-723.

## Shared Values and Normal Families

*LV Fengjiao, JIANG Hongjing*

(College of Information Engineering, Huanghe Science and Technology College, Zhengzhou 450063, China)

**Abstract:** The meromorphic functions related to shared values of normality are studied, and the formal rule is obtained. The theories of normal family and function values are closely linked together. The normal family of meromorphic functions with shared values or shared functions is an important hot topic in the field of theory of normal family. The shared values of meromorphic function families are researched by using Nevanlinna theory and a regular rule related to shared values is researched by using the method of Zalzman-Pang. Let  $F$  be a family of meromorphic functions on the unit disc  $\Delta$ , and let  $a, b$  be a nonzero finite values,  $k$  be a positive integer. If for every  $f(z) \in F$ , the multiplicity of zero point is at least  $k + 1$ , the multiplicity of pole point is at least 2, and  $f^{(k)}(z) = a \Rightarrow |f(z)| \geq b$ , then  $F$  is normal on  $\Delta$ . The theory of normal families has many applications in the uniqueness of the sub pure function, complex analytic dynamical systems and complex differential equations.

**Key words:** meromorphic functions; shared values; normal family