第 29 卷第 3 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 29 No. 3
2016 年 6 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Jun. 2016
文章编号:1673-1549(2016)03-0085-08 DOI:10.11863/j.suse.2016.03.18

广义菲涅尔积分的积分交换次序计算方法

邢家省[1,2], 杨小远[1,2]

(1. 北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191;2. 数学、信息与行为教育部重点实验室, 北京 100191)

摘 要:考虑两无穷区间上积分交换次序定理的充分条件,经典定理的充分条件要求函数在二重无界区域上绝对可积,这个条件太强,将经典的二重广义积分的绝对可积条件换成积分的内闭一致收敛性条件,得到数学分析中应有的广泛条件下的两积分交换次序结果。利用广泛条件下的两积分交换次序定理,对广义菲涅尔积分计算中的积分可交换次序给出了一般性证明方法,统一了相关广义积分的计算问题,沟通了不同方法之间的内在联系,给出的方法简单直接。

关键词:菲涅尔积分;广义菲涅尔积分;含参变量广义积分;内闭一致收敛性;两无穷区间上的积分交换次序定理

中图分类号:O177.2 **文献标志码**:A

两无穷区间上的积分交换次序定理[1-12]是数学分析中的重要经典结果,文献[1-8,12]给出了两无穷区间上积分可交换积分次序的充分条件和证明过程。然而此经典定理在使用中非常不方便,对许多二元函数实施积分交换次序时不能直接套用,有时只能间接的在两任意内部区间上套用[2,5,7-10],然后再通过对变动区间上的积分取极限[2,5,7-10]。经典定理的充分条件要求二元函数在二重无界区域上绝对可积[1-8],这个条件也相当苛刻,一些常见函数也不满足此条件,也只能间接使用,然后采用其他复杂的解决办法[2,5,7-10]。这就必然导致要对经典的积分交换次序条件进行改进[2,5,7-14],在广泛的充分条件下给出积分交换次序定理的结果,得到数学分析中最好的理论表现形式,并且在导出好的结果的过程中完全是利用数学分析自身已有的理论方法,利用新的表述结果可以更方便于解决一批函数的积分计算问题。以理论先进的形式传播,达到数学分析学中应有的理论高度,构成一般性的处理方法。

1 无穷区间上积分交换次序定理的经典充分条件及其局限性

定理 1[1-7] (无穷区间的积分交换次序)设函数 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续,如果满足下列条件:

(1)对任何 $\beta>\alpha$,积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 关于 u 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛;对任何 $b>a$,积分 $\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上一致收敛;

(2)积分 $\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\,\mathrm{d}x$,$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\,\mathrm{d}u$ 中至少有一个存在,则成立 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$。

定理 1 是标准数学分析中的经典结果,文献[1-7]中对定理 1 的叙述和证明过程都是此条件。定理 1 中充分条件(1)是包含端点的半内闭一致收敛性条件,这

收稿日期:2015-11-22

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61271010);北京航空航天大学校级重大教改项目(201401)

作者简介:邢家省(1964-),男,河南泌阳人,副教授,博士,主要从事偏微分方程、微分几何方面的研究,(E-mail)xjsh@buaa.edu.cn;
杨小远(1964-),女,辽宁沈阳人,教授,博导,主要从事应用调和分析、图像处理方面的研究,(E-mail)xiaoyuanyang@buaa.edu.cn

是不必要的,完全可以改为不含端点的真正内闭一致收敛性条件;定理 1 的条件(2)是二元函数在无界区域上的绝对可积条件,此条件相当苛刻,对许多函数不能直接套用此定理。在内部区间上间接的使用[2,5,7-8],然后采用再取极限的办法,这是相当繁琐的。可以将定理 1 中的条件(1)和条件(2)改进为一般形式,得到好的一般结果形式,新的结果更方便于使用。

2 函数列积分的极限理论结果

定理 2[1-4] 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数列,如果 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。则有:

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

定理 3[1-4] 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列,如果 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。则有:

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

定理 4[1-4] 设 $\{f_n(x)\}$ 是 (a,b) 上的函数列,积分 $\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 存在, $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上收敛于 $f(x)$。

如果满足条件:对任意 $a < A < B < b$, $\{f_n(x)\}$ 在 $[A,B]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 即 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛于 $f(x)$; 积分 $\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 对 n 一致收敛,则积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,而且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

定理 4 的区间 (a,b) 可为有限区间,也可为无限区间。定理 4 常被使用的情形是控制收敛定理。

定理 5[1-4] 控制收敛定理)设 $\{f_n(x)\}$ 是 (a,b) 上的函数列,积分 $\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 存在, $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上收敛于 $f(x)$。

如果满足:

(1)对任意 $b > B > A > a$, $\{f_n(x)\}$ 在 $[A,B]$ 上一致收敛于 $f(x)$;

(2)如果存在 (a,b) 上的非负函数 $F(x)$, 使得 $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$ 收敛,而且对 $x \in (a,b)$ 及所有的 n, 都有 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, 则有:

(1)积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

定理 5 的区间 (a,b) 可为有限区间,也可为无限区间。

定理 6[1-4] (控制收敛定理)设 $\{f_n(x)\}$ 是 $(a, +\infty)$ 上的函数列,积分 $\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $\{f_n(x)\}$ 在 $(a, +\infty)$ 上收敛于 $f(x)$。

如果满足:

(1)对任意 $B > A > a$, $\{f_n(x)\}$ 在 $[A,B]$ 上一致收敛于 $f(x)$;

(2)如果存在 $(a, +\infty)$ 上的非负函数 $F(x)$, 使得 $\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 收敛,而且对 $x \in (a, +\infty)$ 及所有的 n, 都有 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, 则有:

(1)积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$。

定理 4、5、6 虽然是以函数列的极限形式叙述的,但完全可以写出其他极限形式的相应结论[1-4]。

3 无穷区间上积分交换次序的充分条件的改进结果

定理 7[1-7] 设函数 $f(x,u)$ 在 $[a,b] \times (c, +\infty)$ 上连续,如果满足条件:积分 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上一致收敛,则有 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上连续,且 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$。

证明 任取 $D > C > c$, 由于函数 $f(x,u)$ 在 $[a,b] \times [C,D]$ 上连续,所以成立 $\int_C^D \mathrm{d}u\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_C^D f(x,u)\mathrm{d}u$, 由条件,可知 $\lim\limits_{D\to+\infty, C\to c^+}\int_C^D f(x,u)\mathrm{d}u = \int_c^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$, 且在 $x \in [a,b]$ 上一致收敛,利用定理 3 的结果,可得 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上连续,且 $\lim\limits_{D\to+\infty, C\to c^+}\int_C^D \mathrm{d}u\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x = \lim\limits_{D\to+\infty, C\to c^+}\int_a^b \mathrm{d}x\int_C^D f(x,u)\mathrm{d}u =$

$$\int_a^b \left(\lim_{D\to+\infty, C\to c^+}\int_C^D f(x,u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x =$$

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$$

结论得证。

定理 8　设函数 $f(x,u)$ 在 $[a,b]\times(c,+\infty)$ 上连续,如果满足条件:

(1)积分 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$ 关于 x 在 (a,b) 上内闭一致收敛;

(2)对任意 $D > C > c$, 记 $F_{C,D}(x) = \int_C^D f(x,u)\,\mathrm{d}u$, $\int_a^b F_{C,D}(x)\,\mathrm{d}x$ 关于 D,C 是一致收敛的;

则有 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$ 关于 x 在 (a,b) 上连续, 且 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$。

定理 9　设函数 $f(x,u)$ 在 $[a,b]\times(c,+\infty)$ 上连续,如果满足条件:

(1)积分 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$ 关于 x 在 (a,b) 上内闭一致收敛;

(2)存在 (a,b) 上的函数 $F(x)$, 对任意 $D > C > c$, $F_{C,D}(x) = \int_C^D f(x,u)\,\mathrm{d}u$ 成立, $|F_{C,D}(x)\leqslant F(x)$, $x\in(a,b)$ 且 $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

则有 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$ 关于 x 在 (a,b) 上连续, 且 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$。

定理 10　设函数 $f(x,u)$ 在 $[a,b]\times(c,+\infty)$ 上连续,如果满足条件:

(1)积分 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$ 关于 x 在 (a,b) 上内闭一致收敛;

(2) $\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^{+\infty} |f(x,u)|\,\mathrm{d}u$ 存在;

则有 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$ 关于 x 在 (a,b) 上连续,且成立 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$。

定理 11　(无穷区间上的积分交换次序)设函数 $f(x,u)$ 在 $(a,+\infty)\times(c,+\infty)$ 上连续,如果满足下列条件:

(1)对任何 $D > C > c$, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 关于 u 在区间 $[C,D]$ 上一致收敛, 对任何 $B > A > a$, 积分 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[A,B]$ 上一致收敛;

(2)积分 $\int_c^{+\infty} G_{A,B}(u)\,\mathrm{d}u$ 关于 $B > A > a$ 一致收敛, 或者 $\int_a^{+\infty} F_{D,C}(x)\,\mathrm{d}x$ 关于 $D > C > c$ 一致收敛;

则成立 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u = \int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$,

其中, $F_{D,C}(x) = \int_C^D f(x,u)\,\mathrm{d}u$, $G_{A,B}(u) = \int_A^B f(x,u)\,\mathrm{d}x$。

证明　不妨设积分 $\int_c^{+\infty} G_{A,B}(u)\,\mathrm{d}u$ 关于 $B > A > a$ 一致收敛。由于对任何 $B > A > a$, 积分 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[A,B]$ 上一致收敛,所以成立

$$\int_A^B \mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u = \int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_A^B f(x,u)\,\mathrm{d}x = \int_c^{+\infty} G_{A,B}(u)\,\mathrm{d}u$$

记 $G_{A,B}(u) = \int_A^B f(x,u)\,\mathrm{d}x$, $G(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$, 由条件知 $\lim_{B\to+\infty, A\to a^+} G_{A,B}(u) = G(u)$, 且在 $(c,+\infty)$ 的任何内闭子区间 $[C,D]$ 上是一致收敛的, 又积分 $\int_c^{+\infty} G_{A,B}(u)\,\mathrm{d}u$ 关于 $B > A > a$ 一致收敛, 于是有 $\int_c^{+\infty} G(u)\,\mathrm{d}u$ 存在,且

$$\lim_{B\to+\infty, A\to a^+}\int_c^{+\infty} G_{A,B}(u)\,\mathrm{d}u = \int_c^{+\infty}\lim_{B\to+\infty, A\to a^+} G_{A,B}(u)\,\mathrm{d}u = \int_c^{+\infty} G(u)\,\mathrm{d}u = \int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$$

从而

$$\lim_{B\to+\infty, A\to a^+}\int_A^B \mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u = \lim_{B\to+\infty, A\to a^+}\int_c^{+\infty} G_{A,B}(u)\,\mathrm{d}u = \int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$$

故

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u = \int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$$

定理 12[8,12]　(无穷区间上的积分交换次序)设函数 $f(x,u)$ 在 $(a,+\infty)\times(c,+\infty)$ 上连续,如果满足下列条件:

(1)对任何 $D > C > c$, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 关于 u 在区间 $[C,D]$ 上一致收敛, 对任何 $B > A > a$, 积分 $\int_c^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[A,B]$ 上一致收敛;

(2)存在 $(c,+\infty)$ 上的非负函数 $G(u)$, 对任何 $B > A > a$, $u\in(c,+\infty)$, 有 $|G_{A,B}(u)|\leqslant G(u)$, 且积分

$\int_c^{+\infty} G(u)\mathrm{d}u$ 收敛;或者存在 $(a,+\infty)$ 上的非负函数 $F(x)$,对任何 $D > C > c, x \in (a,+\infty)$,有 $|F_{C,D}(x)| \leqslant F(x)$,且积分 $\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

则成立 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u = \int_c^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$,其中,$F_{D,C}(x) = \int_C^D f(x,u)\mathrm{d}u$,$G_{A,B}(u) = \int_A^B f(x,u)\mathrm{d}x$。

显然定理 11 和定理 12 的条件比定理 1 的条件广泛自然,也就是定理 11 和定理 12 的结果优于定理 1 的结果,应该采用定理 11 或者定理 12 去替代定理 1,数学分析中的积分交换次序定理应该以定理 11 或定理 12 的结果为最终形式,此结果完全是利用数学分析自身已有的理论方法,证明过程没有增加任何困难。定理 11 或定理 12 的充分条件,在实际应用中非常方便于验证,减少了解决问题的难度,使用范围广泛。定理 11 或定理 12 的结果,达到了数学分析中应有的理论高度。

一般地,对 $(a,b)\times(c,d)$ 上的积分交换次序定理的充分条件类似的可以给出,这里下限 a,c 可以是有限的或为 $-\infty$,上限 b,d 可以是有限的或为 $+\infty$。

4 Dirichlet 积分的简便计算方法

定理 13[1-8] 成立 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$。

证明 对 $x > 0$,成立 $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{d}y$,于是有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{1}$$

需证明成立:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x \tag{2}$$

在(2)式成立的情况下,可得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}。$$

证明(2)式成立:任取 $b > a > 0$,函数 $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$ 在 $[0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续,显然积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[a,b]$ 是一致收敛的,所以有

$$\int_a^b\left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b e^{-xy}\sin x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-ax}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-bx}\mathrm{d}x \tag{4}$$

在(4)式两端,令 $b\to+\infty$,取极限,则得

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^{+\infty} e^{-xy}\sin x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-ax}\mathrm{d}x \tag{5}$$

在(5)式两端,令 $a\to 0^+$,取极限,则得(2)式成立。

容易看出(5)式是正好对应于引入收敛因子 e^{-yx} 的 $I(y) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-yx}\mathrm{d}x$ 对参数微分后的积分 $I(a) = -\int_a^{+\infty} I'(y)\mathrm{d}y$ 的计算方法,$a > 0$。

5 广义菲涅尔积分计算中的积分交换次序的一般方法

定理 14[2,5-7] 设 $\alpha > 0, 0 < \lambda < 2$,则有 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^\lambda}\mathrm{d}x = \frac{\pi\alpha^{\lambda-1}}{2\Gamma(\lambda)\sin\frac{\lambda\pi}{2}}$。

证明 显然 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^\lambda}\mathrm{d}x = \alpha^{\lambda-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^\lambda}\mathrm{d}y$,只须考虑 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^\lambda}\mathrm{d}y$,将 $\frac{1}{y^\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-yt}\mathrm{d}t,(y>0)$,代入上式,于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^\lambda}\mathrm{d}y = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y \tag{6}$$

可以证明成立[2,5-7]:

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t \tag{7}$$

在(7)式成立的情况下,可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^\lambda}\mathrm{d}y = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\frac{\lambda}{2}-1}}{1+u}\mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\frac{1}{2}B\left(\frac{\lambda}{2},1-\frac{\lambda}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\lambda\pi}{2}}$$

故有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^\lambda}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2\Gamma(\lambda)\sin\frac{\lambda\pi}{2}}$$

其中利用了贝塔函数的性质[1-3]和 Γ 函数的余元公式[1-3]。

证明(7)式成立:

解法 1　记 $f(t,y)=t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y$，显然 $f(t,y)=t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y$ 在 $(0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续,容易知道,对任意 $\delta>0$，积分 $\int_0^{+\infty}f(t,y)\mathrm{d}t$ 关于 y 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛。对任意 $\beta>0$，积分 $\int_0^{+\infty}f(t,y)\mathrm{d}y$ 关于 t 在 $[\beta,+\infty)$ 上一致收敛。对任意 $b>a>0$，由于 $\int_0^{+\infty}f(t,y)\mathrm{d}y$ 在 $t\in[a,b]$ 上一致收敛,或者由

$$\int_0^{+\infty}|f(t,y)|\mathrm{d}y\leqslant\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-yt}\mathrm{d}y=t^{\lambda-1}\frac{1}{t}=\frac{1}{t^{2-\lambda}}$$

得 $\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}|f(t,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t$ 存在，可知 $f(t,y)=t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y$ 在 $[a,b]\times[0,+\infty)$ 上满足交换积分次序的条件,所以,交换积分次序是允许的,于是成立

$$\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y \tag{8}$$

令 $F(a,b,y)=\int_a^b t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}t$，显然 $\lim\limits_{b\to+\infty,a\to0^+}F(a,b,y)=\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}t$，且关于 $y\in[\delta,+\infty)$ 是一致的,

$$F(a,b,y)=\frac{\sin y}{y^\lambda}\int_{ya}^{yb}u^{\lambda-1}e^{-u}\mathrm{d}u$$

记 $g(y)=\dfrac{\sin y}{y^\lambda}$,

$$h(a,b,y)=\int_{ya}^{yb}u^{\lambda-1}e^{-u}\mathrm{d}u=\int_{ya}^{+\infty}u^{\lambda-1}e^{-u}\mathrm{d}u-\int_{yb}^{+\infty}u^{\lambda-1}e^{-u}\mathrm{d}u=H(a,y)-H(b,y)$$

$$F(a,b,y)=g(y)H(a,y)-g(y)H(b,y)$$

由于 $\int_0^{+\infty}g(y)\mathrm{d}y$ 收敛，$H(a,y)$，$H(b,y)$ 关于 $y>0$ 单调递增，且一致有界，根据阿贝尔判别法[1-5]，$\int_0^{+\infty}g(y)H(a,y)\mathrm{d}y$，$\int_0^{+\infty}g(y)H(b,y)\mathrm{d}y$ 关于 $b>a>0$ 是一致收敛的,所以 $\int_0^{+\infty}F(a,b,y)\mathrm{d}y$ 关于 $b>a>0$ 是一致收敛的。

利用黎曼积分下的积分收敛定理,于是有

$$\lim_{b\to+\infty,a\to0^+}\int_0^{+\infty}F(a,b,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\lim_{b\to+\infty,a\to0^+}F(a,b,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y$$

在(8)式两端令 $b\to+\infty$，$a\to0^+$，取极限,得到成立

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y$$

故(7)式得证。

解法 2　记 $f(t,y)=t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y$，显然 $f(t,y)=t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y$ 在 $(0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续,容易知道,对任意 $\delta>0$，积分 $\int_0^{+\infty}f(t,y)\mathrm{d}t$ 关于 y 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛。对任意 $\beta>0$，积分 $\int_0^{+\infty}f(t,y)\mathrm{d}y$ 关于 t 在 $[\beta,+\infty)$ 上一致收敛。对任意 $b>a>0$，由于 $\int_0^{+\infty}f(t,y)\mathrm{d}t$ 在 $y\in[a,b]$ 上一致收敛,于是 $f(t,y)=t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y$ 在 $(0,+\infty)\times[a,b]$ 上满足交换积分次序的条件,所以,交换积分次序是允许的,于是成立

$$\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t \tag{9}$$

令 $F(a,b,t)=\int_a^b t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}y$，显然 $\lim\limits_{b\to+\infty,a\to0^+}F(a,b,t)=\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}y$，且关于 t 在 $(0,+\infty)$ 上是内闭一致收敛的,

$$F(a,b,t)=\int_a^b t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}y=t^{\lambda-1}\int_a^b e^{-yt}\sin y\mathrm{d}y=t^{\lambda-1}\left(\frac{e^{-at}(t\sin a+\cos a)}{1+t^2}-\frac{e^{-bt}(t\sin b+\cos b)}{1+t^2}\right)$$

注意到

$$|\sin a|\leqslant a,0\leqslant xe^{-x}<1,0<e^{-x}<1,(0<x<+\infty)$$

$$|F(a,b,t)|\leqslant t^{\lambda-1}\left(\frac{e^{-at}ta+1}{1+t^2}+\frac{e^{-bt}tb+1}{1+t^2}\right)\leqslant t^{\lambda-1}\frac{4}{1+t^2}(0<t<+\infty)$$

又 $\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}\dfrac{4}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 收敛,利用黎曼积分下的积分控制收敛定理,于是有

$$\lim_{b\to+\infty,a\to0^+}\int_0^{+\infty}F(a,b,t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\lim_{b\to+\infty,a\to0^+}F(a,b,t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t$$

在(9)式两端令 $b\to+\infty$，$a\to0^+$，取极限,得到成立 $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-yt}\sin y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t$ 即(7)式成立得证。

利用定理 14 的结果,可以再次得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

定理 15[2,5-7] 设 $0<\lambda<1$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\Gamma(\lambda)\cos\frac{\lambda\pi}{2}}$$

证明 利用分部积分和定理 14 的结果，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\lambda}}(\sin x)'\mathrm{d}x=\lambda\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\lambda+1}}\mathrm{d}x=$$

$$\lambda\frac{\pi}{2\Gamma(\lambda+1)\sin\frac{(\lambda+1)\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\Gamma(\lambda)\cos\frac{\lambda\pi}{2}}$$

定理 16[2,5-7] 设 $p>1$，则有

(1) $\int_0^{+\infty}\sin x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{1-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}y=\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\sin\frac{\pi}{2p}$

(2) $\int_0^{+\infty}\sin\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{1+\frac{1}{p}}}\mathrm{d}y=\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)\sin\frac{\pi}{2p}$

利用定理 16 的结果，可以得到菲涅尔积分[2,5-7,13-14] $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$，$\int_0^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$。

用类似于证明(7)式的方法，同理可证成立

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-yt}\cos y\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-yt}\cos y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t \tag{10}$$

利用(10)式，可以得到：

定理 17[2,5-7] 设 $\alpha>0,0<\lambda<1$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x=\frac{\pi\alpha^{\lambda-1}}{2\Gamma(\lambda)\cos\frac{\lambda\pi}{2}}$$

定理 18[2,5-7] 设 $p>1$，则有

$$\int_0^{+\infty}\cos x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}$$

利用定理 18 的结果，可以得到菲涅尔积分[2,5-7,13-14] $\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$。

6 一类 Euler 积分公式及其应用

定理 19[2,5,15] 设 $\lambda>0,x>0,-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则有 Euler 公式：

(1) $\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x$

(2) $\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x$

证明 记 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}e^{-i\lambda t\sin\alpha}\mathrm{d}t=$

$$\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda te^{i\alpha}}\mathrm{d}t$$

可以证明，对任意 $0<\delta<\frac{\pi}{2}$，积分 $\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda te^{i\alpha}}\mathrm{d}t$，$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}(t^{x-1}e^{-\lambda te^{i\alpha}})\mathrm{d}t$ 关于 $\alpha\in[-\delta,\delta]$ 是一致收敛的[2]。从而

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}(t^{x-1}e^{-\lambda te^{i\alpha}})\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda te^{i\alpha}}(-\lambda te^{i\alpha}i)\mathrm{d}t=i\int_0^{+\infty}t^x\frac{\partial}{\partial t}(e^{-\lambda te^{i\alpha}})\mathrm{d}t=$$

$$-ix\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda te^{i\alpha}}\mathrm{d}t=-ixI(\alpha)$$

于是 $I(\alpha)=I(0)e^{-i\alpha x}$，显然 $I(0)=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}$，于是 $I(\alpha)=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}e^{-i\alpha x}$，两边分别取实部，取虚部，得定理 19 的结果。

定理 20 设 $\lambda>0,-1<z<0,-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则有 Euler 公式

$$\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t=\frac{1}{z}\frac{\Gamma(z+1)}{\lambda^z}\sin\alpha z$$

证明 设 $\lambda>0,-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，显然积分 $\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t$ 关于 $x\in[0,1]$ 一致收敛，从而积分关于 x 在 $[0,1]$ 上连续，且成立

$$\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t=\frac{\sin\alpha x}{x}\frac{\Gamma(x+1)}{\lambda^x}$$

$x\in[0,1]$

对 $-1<z<0$，经过分部积分计算，并利用定理 19 的结果，可得

$$\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{z}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t^z=$$

$$-\frac{1}{z}\int_0^{+\infty}t^{(z+1)-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}[-\lambda\cos\alpha\sin(\lambda t\sin\alpha)+$$

$$\lambda\cos(\lambda t\sin\alpha)\sin\alpha]\mathrm{d}t=$$

$$-\frac{1}{z}\lambda\left[-\cos\alpha\frac{\Gamma(z+1)}{\lambda^{z+1}}\sin\alpha(z+1)+\right.$$

$$\left.\sin\alpha\frac{\Gamma(z+1)}{\lambda^{z+1}}\cos\alpha(z+1)\right]=\frac{1}{z}\frac{\Gamma(z+1)}{\lambda^z}\sin\alpha z$$

定理 20 的结果得证。

定理 21 设 $z>-1,\lambda>0,-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则有

Euler 公式:

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-\lambda t\cos\alpha} \sin(\lambda t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z}\frac{\Gamma(z+1)}{\lambda^z}\sin\alpha z$$

定理 22[2,15]　设 $k>0$, $-1<\lambda<1$, 则有

$$\int_0^{+\infty} e^{-ky} y^{\lambda-1}\sin y\mathrm{d}y = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\int_0^{+\infty} t^{-\lambda}\frac{1}{1+(t+k)^2}\mathrm{d}t \tag{11}$$

证明　考查积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ky} y^{\lambda-1}\sin y\mathrm{d}y$, 将 $y^{\lambda-1} = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\int_0^{+\infty} t^{-\lambda} e^{-yt}\mathrm{d}t$, $(y>0)$, 代入(11)式,于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-ky} y^{\lambda-1}\sin y\mathrm{d}y = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{-\lambda} e^{-y(t+k)}\sin y\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y \tag{12}$$

用类似于证明(7)式的方法,可以证明成立:

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{-\lambda} e^{-y(t+k)}\sin y\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{-\lambda} e^{-y(t+k)}\sin y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t \tag{13}$$

于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-ky} y^{\lambda-1}\sin y\mathrm{d}y = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{-\lambda} e^{-y(t+k)}\sin y\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{-\lambda} e^{-y(t+k)}\sin y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\int_0^{+\infty} t^{-\lambda}\frac{1}{1+(t+k)^2}\mathrm{d}t$$

在

$$\int_0^{+\infty} t^{-\lambda}\frac{1}{1+(t+k)^2}\mathrm{d}t = \Gamma(1-\lambda)\int_0^{+\infty} e^{-ky} y^{\lambda-1}\sin y\mathrm{d}y$$

中,令 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$, $\cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$, $y = t\sin\alpha$, 并利用 Euler 公式,得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-ky} y^{\lambda-1}\sin y\mathrm{d}y = (\sin\alpha)^\lambda\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1} e^{-t\cos\alpha}\sin(t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t = (\sin\alpha)^\lambda\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\lambda}\sin\lambda\alpha$$

于是

$$\int_0^{+\infty} t^{-\lambda}\frac{1}{1+(t+k)^2}\mathrm{d}t = \Gamma(1-\lambda)\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\lambda}(\sin\alpha)^\lambda\sin\lambda\alpha = \frac{\pi}{\sin\pi\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)^\lambda\sin\lambda\alpha$$

其中, $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$。

定理 23[2,15]　设 $k>0$, $0<\lambda<1$, 则有

$$\int_0^{+\infty} e^{-ky} y^{\lambda-1}\cos y\mathrm{d}y = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\int_0^{+\infty} t^{-\lambda}\frac{t+k}{1+(t+k)^2}\mathrm{d}t \tag{14}$$

利用(14)式,可得

$$\int_0^{+\infty} t^{-\lambda}\frac{t+k}{1+(t+k)^2}\mathrm{d}t = \Gamma(1-\lambda)\int_0^{+\infty} e^{-ky} y^{\lambda-1}\cos y\mathrm{d}y$$

令

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}},\ \cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}},\ y = t\sin\alpha$$

并利用 Euler 公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-ky} y^{\lambda-1}\cos y\mathrm{d}y = (\sin\alpha)^\lambda\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1} e^{-t\cos\alpha}\cos(t\sin\alpha)\,\mathrm{d}t = (\sin\alpha)^\lambda\Gamma(\lambda)\cos\lambda\alpha$$

于是,

$$\int_0^{+\infty} t^{-\lambda}\frac{t+k}{1+(t+k)^2}\mathrm{d}t = \Gamma(1-\lambda)\Gamma(\lambda)(\sin\alpha)^\lambda\cos\lambda\alpha = \frac{\pi}{\sin\pi\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)^\lambda\cos\lambda\alpha$$

其中, $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$。

定理 24[1,6]　对任意实数 u, $\int_0^{2\pi} e^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\pi$。

证明　记 $F(u) = \int_0^{2\pi} e^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x$, 显然

$$F(0) = 2\pi$$

$$F'(u) = \int_0^{2\pi} e^{u\cos x}[\cos x\cos(u\sin x) - \sin(u\sin x)\sin x]\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\frac{1}{u}\frac{d}{dx}[e^{u\cos x}\sin(u\sin x)]\,\mathrm{d}x = 0,\ (u\neq 0)$$

于是有 $F'(u) = 0$, 故 $F(u) = 2\pi$, 即成立 $\int_0^{2\pi} e^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\pi$。

参 考 文 献:

[1] 常庚哲,史济怀.数学分析教程(下册)[M].北京:高等教育出版社,2003.

[2] 黄玉民,李成章.数学分析(下册)[M].2 版.北京:科学出版社,2007.

[3] 华罗庚,著.王元,校.高等数学引论(第二册)[M].北京:科学出版社,2009.
[4] 张筑生.数学分析新讲(第三册)[M].北京:北京大学出版社,1990.
[5] 费定晖,周学圣.吉米多维奇数学分析习题集题解(五)[M].济南:山东科学技术出版社,1980.
[6] 裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].北京:高等教育出版社,2002.
[7] 匡继昌.实分析与泛函分析续论(上册)[M].北京:高等教育出版社,2015.
[8] 白玉兰,陈述涛.一个二次广义积分的顺序交换问题[J].哈尔滨师范大学学报:自然科学版,1987,3(3):13-18.
[9] 姜赞臣.含参变量无穷积分在积分号下可积分定理的推广[J].淄博师专学报,1995(2):15-17.
[10] 匡继昌.Dirichlet 积分九种解法的思路分析[J].高等数学研究,2012,15(4):61-64.
[11] 许宁.Dirichlet 积分及其应用[J].高等数学研究,2014,17(3):15-19.
[12] 邢家省,杨小远,白璐.两无穷区间上积分交换次序充分条件的改进及其应用[J].四川理工学院学报:自然科学版,2016,29(1):87-92.
[13] FLANDERS H. On the Fresnel Integrals [J]. The American Math.Monthly,1982,89(4):264-266.
[14] LEONARD I E. More on Fresnel Integrals [J]. The American Math.Monthly,1988,95(5):431-433.
[15] 华罗庚,著.王元,校.高等数学引论(第三册)[M].北京:科学出版社,2009.

Calculation of Integrals Exchange of Generalized Fresnel Integrals

XING Jiasheng, *YANG Xiaoyuan*

(1. School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing 200191, China;
2. LMIB of the Ministry of Education, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: Considered the sufficient condition of exchange theorem of integral sequence within two infinite interval, sufficient condition of classical theory is very strong which require function absolutely integrable in twice unbounded intervals. If the absolutely integrable condition of classic twice integral into internal uniform convergence of integral is changed, the result of twice integral exchanging sequence within reasonable generalized condition of mathematical analysis is gained. Used the exchange theorem of integral sequence within the generalized condition, the general proof of integrals exchange of the generalized Fresnel integral which unify the calculation of generalized integrals is given. Furthermore, this method can improve the efficiency of calculation.

Key words: Fresnel integrals; generalized Fresnel integrals; generalized integral contained parameters; inner close uniformly convergence; integrals exchange theorem on infinite interval