第 29 卷第 2 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 29 No. 2
2016 年 4 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Apr. 2016
文章编号:1673-1549(2016)02-0090-05 DOI:10.11863/j.suse.2016.02.18

n 维空间上一类对称区域的 n 重积分性质及其应用研究

沈 澄

(浙江工商职业技术学院,浙江 宁波 315012)

摘 要:n 重积分与定积分的概念在数量关系上的一致性使它们具有诸多类似的性质,单变量奇偶函数在对称区间上定积分的运算性质,能够推广到 n 维空间一类对称区域的 n 重积分。通过讨论空间对称点的坐标轮换,以及对称点从对称区域 Ω_1 到 Ω_2 映射变换的 Jacobian 行列式,性质推广得以严格证明。结论作为基础理论具有实际应用价值:简化 n 维球体的面积公式推导;巧用对称性提高工程计算效率;帮助人们更好地理解和讨论 n 维空间的数学问题,构建良好的数学思想方法与数学解题行为。

关键词:n 维空间;n 重积分;有界闭域;对称

中图分类号:O13 **文献标志码**:A

引 言

单变量奇偶函数的定积分运算是常见的定积分应用,它在对称区间上的运算性质能够推广到 n 维空间上一类对称区域的 n 重积分,文献[1-2]给出了该定积分性质对单变量函数成立的证明与应用,文献[3]的研究将其推广到二维、三维空间的积分运算,文献[3-9]针对二元、三元奇偶函数基于不同类型对称区域上重积分进行了具体的运算与讨论,文献[4]定义了 n 元奇偶函数,文献[4-6]指出该性质对 n 元函数也成立,但没给出严格的数学证明。文献[10]指出,若 n 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在下列不等式确定的 n 维空间有界闭域内连续,

$$\Omega:\begin{cases} a \leqslant x_1 \leqslant b \\ h_2(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi_2(x_1) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ h_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \end{cases}$$

其中,a、b 为常数,$h_i(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1})$ 与 $\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1})$ 均为连续函数($i = 2, 3, \cdots, n$),则对应的 n 重积分计算公式[10]:

$$\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega}}^{n\text{重}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \int_a^b \mathrm{d}x_1 \int_{h_2(x_1)}^{\varphi_2(x_1)} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_{h_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})}^{\varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_n$$

但未涉及空间对称域重积分性质的讨论。因此,本文探究证明这个性质推广的正确性并赋予应用。

1 二维有界对称闭域上定积分的性质定理

引理 1[1-2] 若 $f(x)$ 在闭区间 $[-a, a]$ 上连续,那么 $\forall x \in [0, a]$ 有:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x, & f(-x) = f(x) \\ 0, & f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

定理 1[3] 若函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 内连续,二重积分 $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 满足:

(I)有界闭域 D 可划分为对称的两部分 D_1 和 D_2,对称点 $P(x, y) \in D_1, P' \in D_2$;

(II)被积函数在对称点处的值相等或互为相反数,

收稿日期:2015-12-22

基金项目:浙江省高等教育课堂教学改革研究项目(kg2015718)

作者简介:沈 澄(1963-),女,浙江宁波人,副教授,主要从事高等数学方面的研究,(E-mail)4181649@qq.com

那么对 $\forall P \in D_1$ 有:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy, & f(P') = f(P) \\ 0, & f(P') = -f(P) \end{cases}$$

其中点 P' 的坐标由区域 D 的对称类型确定。如:D 关于原点对称,则 $P(x,y) \in D_1, P'(-x,-y) \in D_2$;$D$ 关于 $y = x$ 对称,则 $P(x,y) \in D_1, P'(y,x) \in D_2$。

2　n 维空间上一类对称区域的 n 重积分性质证明

定理 2　若函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在空间有界闭域 Ω 内连续,n 重积分 $(n \geqslant 3)$ $\overbrace{\int\cdots\int_\Omega}^{n重} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ 满足:

(Ⅰ) 空间有界闭域 Ω 可划分为对称的两个子空间域 Ω_1 和 Ω_2,对称点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega_1, P' \in \Omega_2$;

(Ⅱ) 被积函数在空间对称点处的值相等或互为相反数,那么对 $\forall P \in \Omega_1$ 有:

$$\overbrace{\int\cdots\int_\Omega}^{n重} f(x_1, \cdots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n = \begin{cases} 2\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega_1}}^{n重} f(x_1, \cdots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n, & f(P') = f(P) \\ 0, & f(P') = -f(P) \end{cases}$$

其中对称点 P' 的坐标由空间域 Ω 的对称类型确定。

证明　(1) 有界闭域 Ω 关于 $X_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 单维对称。令

$$x_j = x_i (j = i = 1,2,\cdots,n)$$
$$x_j = -t_i (j \neq i; i,j = 1,2,\cdots,n)$$

则

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \in \Omega_1$$
$$P'(-x_1, -x_2, \cdots, x_j, \cdots, -x_n) \in \Omega_2$$

这个变换的 Jacobian 行列式[11]记为 Δ,因此

$$\Delta = \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \cdots, x_i, \cdots, t_n)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

故对 $\forall P \in \Omega_1$ 有:

$$\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega_2}}^{n重} f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_j \cdots dx_n =$$

$$\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega_1}}^{n重} f(-t_1, \cdots, x_i, \cdots, -t_n)\,|(-1)^{n-1}|\,dt_1 \cdots dx_i \cdots dt_n =$$

$$\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega_1}}^{n重} f(-x_1, \cdots, x_i, \cdots, -x_n)\,dx_1 \cdots dx_i \cdots dx_n =$$

$$\begin{cases} \overbrace{\int\cdots\int_{\Omega_1}}^{n重} f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_i \cdots dx_n, & f(P') = f(P) \\ -\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega_1}}^{n重} f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_i \cdots dx_n, & f(P') = -f(P) \end{cases}$$

所以

$$\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega}}^{n重} f(x_1, \cdots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n =$$

$$\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega_1}}^{n重} f(x_1, \cdots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n +$$

$$\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega_2}}^{n重} f(x_1, \cdots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n =$$

$$\begin{cases} 2\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega_1}}^{n重} f(x_1, \cdots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n, & f(P') = f(P) \\ 0, & f(P') = -f(P) \end{cases} \tag{1}$$

(2) 有界闭域 Ω 关于 X_i 中任意 $(k+1)$ 维对称 $(i = 1,2,\cdots,n-1; k = 1,2,\cdots,n-i)$,不妨取 $X_i, \cdots, X_{i+k}$ $(i = 1,2,\cdots,n-1; k = 1,2,\cdots,n-i)$,令

$$x_{j+k} = x_{i+k} (j = i = 1,2,\cdots,n-1; k = 1,2,\cdots,n-i)$$
$$x_j = -t_i (i = 1,2,\cdots,n-1; k = 1,2,\cdots,n-i;$$
$$j = 1,2,\cdots,i-1,i+k+1,\cdots,n)$$

则

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_{i+k}, \cdots, x_n) \in \Omega_1$$
$$P'(-x_1, -x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_{j+k}, \cdots, -x_n) \in \Omega_2$$

故

$$\Delta = \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_{i+k}, \cdots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \cdots, x_i, \cdots, x_{i+k}, \cdots, t_n)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-(k+1)}$$

因此对 $\forall P \in \Omega_1$ 有:

$$\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega_2}}^{n重} f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_{j+k}, \cdots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_j \cdots dx_{j+k} \cdots dx_n =$$

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n重}_{\Omega_1} f(-t_1,\cdots,x_i,\cdots,x_{i+k},\cdots,-t_n)\,|\Delta|\,dt_1\cdots dx_i\cdots dx_{i+k}\cdots dt_n =$$

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n重}_{\Omega_1} f(-x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_{i+k},\cdots,-x_n)dx_1\cdots dx_i\cdots dx_{i+k}\cdots dx_n =$$

$$\begin{cases} \overbrace{\int\cdots\int}^{n重}_{\Omega_1} f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_i\cdots dx_n, f(P') = f(P) \\ -\overbrace{\int\cdots\int}^{n重}_{\Omega_1} f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_i\cdots dx_n, f(P') = -f(P) \end{cases}$$

同(1)式的的推寻过程,结论成立。

(3)定理 3[12] 设 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在空间域 Ω 上可积,且满足:

(I)空间域 Ω 的边界方程中将 x_i、x_j 对换后 Ω 的边界方程不变;

(II)将积分变量 x_i、x_j 对换后,积分元素不变,则

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n重}_{\Omega} f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n =$$

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n重}_{\Omega} f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

因此,讨论定理 2 中点 $P(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_{i+k},\cdots,x_n)$ 的对称性与 $x_i,\cdots,x_{i+k}$ 的序无关,故定理 2 证毕。

3 n 维球体的面积公式推导

众所周知,在 n 维欧氏空间 R^n 中,以原点为中心,a 为半径的 n 维球体定义为:

$$B_n(a) = \{(x_1,\cdots,x_n): x_1^2+\cdots+x_n^2 \leqslant a^2, a>0\}$$

它的球面 $S_{n-1}(a)$ 的显示方程为:

$$x_n = \pm\sqrt{a^2-(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)}, x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2 \leqslant a^2$$

当 R^n 中任意$(n-1)$维曲面 S 有显示表示 $x_n=f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$时,$S$ 的面积 $\sigma(S)$ 的计算公式[13-14]为:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{(n-1)重}_{\Omega\subset R^{n-1}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)^2}dx_1\cdots dx_{n-1} \quad (2)$$

有界单变量函数 f 在球体 $B_n(a)$ 上的积分[13]为:

$$\int\cdots\int_{B_n(a)} f(r)dx_1\cdots dx_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^a t^{n-1}f(t)dt \quad (3)$$

$$(r^2 = x_1^2+\cdots+x_n^2)$$

因此根据球的对称性,应用本文定理 2 和(2)式,球面 $S_{n-1}(a)$ 的面积作如下推导:

$$\sigma(S_{n-1}(a)) =$$

$$2\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant a^2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)^2}dx_1\cdots dx_{n-1} =$$

$$2a\int\cdots\int_{B_{n-1}(a)} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}dx_1\cdots dx_{n-1} \overset{由(3)式}{=\!=}$$

$$(r^2 = x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)$$

$$\frac{4a\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^a \frac{t^{n-2}}{\sqrt{a^2-t^2}}dt =$$

$$\frac{4\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}a^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin u)^{n-2}du$$

令 $t=a\sin u$,结合 Γ 函数的性质,得到 n 维球体的面积公式:

$$\sigma(S_{n-1}(a)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}a^{n-1}$$

4 工程上的重积分应用

4.1 n 维体的体积

n 重积分定义 n 维空间区域有界点集的体积问题,取被积函数为 1,一个 n 维有界闭域 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 的体积:

$$\mu(V(x_1,\cdots,x_n)) = \overbrace{\int\cdots\int}^{n重}_{V_n} d\mu$$

通常采用变换转化为重数较低的积分完成计算。若分析 V_n 的对称性,此时积分运算将得到简化。文献[15]中:

If $a>0$ and $n>2$, let $V_n(a)$ denote the following set in R^n:

$$V_n(a) = \{(x_1,\ldots,x_n): |x_i|+|x_n| \leqslant a,$$
$$i=1,\ldots,n-1\}$$

Prove that $V_n(a) = \frac{2^n}{n}a^n$

可将这个问题进一步推广:

设

$$a_i > 0 (i=1,2,\ldots,n), n\geqslant 2$$

$$V_n = \{(x_1,\ldots,x_n): \frac{|x_i|}{a_i}+\frac{|x_n|}{a_n} \leqslant 1, i=1,\ldots,n-1\}$$

求 V_n 的体积。

由于 V_n 的全对称性,该 n 维体的整个体积就是 $x_i \geqslant 0\ (i=1,\cdots,n)$的这部分体积的 2^n 倍,从已知条件得知 $0\leqslant x_n\leqslant a_n$,当 x_n 固定时,对于 $i=1,\cdots,n-1$ 一定有 $0\leqslant x_i\leqslant a_i\left(1-\frac{x_n}{a_n}\right)$,利用定理 2 简化其积分运算,得到所求 n 维体的体积为:

$$V_n = \frac{2^n}{n}a_1\cdots a_n$$

4.2 工程积分案例

重积分亦广泛应用于工程中空间曲面面积、物体的

质量、重心、转动惯量和引力等工程问题,积分对称性依然发挥着计算的优势。

将一个质量均匀的圆台物体的下底面圆心放置于坐标原点,中心轴置于 z 轴,如果圆台的高为 h,上、下底面圆的半径分别为 $a,b(b>a>0)$,密度 μ 为常数,那么侧面圆锥面的方程为:

$$z = \frac{h}{b-a}(b-\sqrt{x^2+y^2})$$

工程中求它绕 x 轴的转动惯量,是重积分在工程上的应用。

微元法思想告知,对占有空间区域 Ω 的物体若密度为 $\mu(x,y,z)$,该物体绕 x 轴、z 轴的转动惯量为:

$$I_x = \iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

$$I_Z = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

因为该案例的 Ω 在 z 轴上的投影区间为 $[0,h]$,所以

$$I_Z = \mu\int_0^h \mathrm{d}z\iint_{\Omega_z}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 Ω_z 是平面 $z=z(z\in[0,h])$ 截立体 Ω 的截痕区域,即

$$\Omega_z = \left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2 \leqslant \left(b-\frac{b-a}{h}z\right)^2\right\}$$

于是

$$I_Z = \mu\int_0^h \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{b-\frac{b-a}{h}z}\rho^3\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi\mu h(b^5-a^5)}{10(b-a)} \tag{4}$$

所以

$$I_x = \iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\mu\,\mathrm{d}V = \mu\iiint_{\Omega}y^2\,\mathrm{d}V + \mu\iiint_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}V$$

考虑到积分区域关于 x、y 轮换对称,将 x、y 互换得到

$$\mu\iiint_{\Omega}y^2\,\mathrm{d}V = \mu\iiint_{\Omega}x^2\,\mathrm{d}V = \frac{\mu}{2}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V \overset{(4)}{=} \frac{1}{2}I_Z$$

然而

$$\mu\iiint_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}V = \mu\int_0^h z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}\sigma =$$

$$\mu\int_0^h z^2\left[\pi\left(b-\frac{b-a}{h}z\right)^2\right]\mathrm{d}z =$$

$$\frac{\pi\mu}{30}(6a^2+3ab+b^2)h^3 \tag{5}$$

故该物体绕 x 轴的转动惯量 I_x 即为 $\frac{1}{2}I_z$ 与(5)式的计算结论之和:

$$I_x = \frac{\pi\mu h}{60}(3a^4+3a^3b+3a^2b^2+3ab^3+3b^4+$$

$$12a^2h^2+6abh^2+2b^2h^2)$$

5　结束语

二重积分、三重积分 、n 重积分,尽管它们被积函数的变量个数不同,积分区域不同,但仍存在许多共性,n 重积分是多元函数积分学的重要内容,n 重积分的概念是采用分割取近似、求和取极限的数学思想,建立特定积分和式的极限[16]来定义,因而在数量关系上的一致性,使它们具有诸多类似的性质,如积分区间可加性、换元积分、分部积分等,对一元函数成立的积分运算性质、公式、结论是否都能推广到 n 维空间,这需要建立 n 重积分的理论体系。本文基于单变量奇偶函数在对称区间上定积分运算性质,推广到 n 维空间上一类对称区域 n 重积分,是通过空间对称点坐标轮换的讨论,以及对称点从对称区域 Ω_1 到 Ω_2 映射变换的 Jacobian 行列式计算而实现。论证 n 维空间特殊区域 n 重积分的这个性质作为常规性原理的正确性,由此奠定的理论基础为求解 n 重积分的数学计算,提供了简便的求解方法。巧用积分对称性提高解题效率,从而帮助人们更好地理解和讨论 n 维空间的数学问题,构建良好的数学思想方法与数学解题行为。

参 考 文 献:

[1] 同济大学数学系.高等数学[M].6 版.北京:高等教育出版社,2014.

[2] 边文莉.高等数学应用基础[M].2 版,北京:高等教育出版社,2012.

[3] 沈澄.对称区间上定积分的性质在重积分中的推广[J].宁波大学学报,1999(3):108-109.

[4] 瞿龙余.一类积分区域对称性的应用研究[J].宜春学院学报,2013(9):43-44.

[5] 宋洪雪.对称性在积分运算中的应用[J].高等数学研究,2013(3):53-55.

[6] 徐立峰.对称性在重积分计算中的应用[J].高等数学研究,2013(3):37-39.

[7] 刘瑞香.三元奇偶函数在对称区域上的积分公式及其证明[J].山西师范大学学报:自然科学版,2013(3):28-29.

[8] 李克俊.对称区域上的重积分[J].成都师范大学学报,2013(1):98-100.

[9] 李长江.对称性与积分计算[J].河北民族师范大学学报,2013(5):1-3.

[10] 吉米多维奇.数学分析习题集[M].北京:人民教育出版社,1979.

[11] 袁俊华.n 重积分换元公式的证明[J].大学数学,2013(4):26-30.

[12] 李源.多元数量值函数积分中的轮换对称性[J].云南大学学报:自然科学版,2013(35):433-437.

[13] 常庚哲.数学分析教程(下)[M].北京:高等教育出版社,2004.

[14] 徐森林.数学分析教程(第二册)[M].北京:清华大学出版社,2006.

[15] APOSTOL T M.Mathematical Analysis(Second Edition)[M].Beijing:China Machine Press,2004.

[16] 马知恩.高等数学基础[M].2 版.北京:高等教育出版社,2010.

A Study on n- Degree Integral Properties and Applications of a Class of Symmetric Region on the n- Dimensional Space

SHEN Cheng

(Zhejiang Business Technology Institute, Ningbo 315012, China)

Abstract: The concept of n- degree integral and definite integral has a number of similar properties because of the consistency of quantitative relation. The operation properties of integral for univariate odd and even functions in symmetric domains can be generalized to n- degree integral in symmetric domains of n- dimensional space. By discussing the coordinate transformation of space symmetric points, Jacobian determinant for the projective transformation of the symmetric points projected from symmetric domain Ω_1 to Ω_2, the generalized propevties are strictly proved. The conclusion as a basic theory has meaningful applied value. The derivation of the formula for calculating surface area of n- dimensional sphere can be simplified. Using symmetry to improve the efficiency of engineering computation. All of these have strong positive influences on forming mathematical thinking and problem-solving skills.

Key words: n- dimensional space; n- degreel integral; closed and bounded domain; symmetry