文章编号:1673-1549(2016)02-0085-05 DOI:10.11863/j. suse.2016.02.17

部分信息下股价带跳的套期保值问题研究

张 琳, 刘宣会, 陈 会

(西安工程大学理学院, 西安 710048)

摘 要:在有重大事件出现时,股价会出现不连续的跳跃,这时一般将股票价格考虑为带有 Markov 调制参数的跳 - 扩散模型。为了追求风险最小化或收益最大化,建立了部分信息下的跳 - 扩散模型(考虑到几何布朗运动已经无法准确的刻画股价的波动),在股票价格服从跳 - 扩散过程时,通过运用非线性滤波技术,将部分信息的问题转化为完全信息的问题,并采用随机微分对策的思想,在均值 - 方差的准则下,运用 Itô 公式,得到最优套期保值策略的显示解。

关键词:跳 - 扩散过程;随机微分对策;套期保值;Itô 公式

中图分类号:F830;O211 **文献标志码**:A

引 言

套期保值是数理金融学研究的主要问题之一,套期保值者为了取得在一定风险水平下的最高收益或一定收益水平下的最低风险,决定现货和期货市场的交易头寸,以达到最优套期保值的目的,这就出现了最优套期保值策略问题。随着金融学与随机学等近代数学理论的发展和应用,最优套期保值策略问题已成为金融数学中的热门领域之一。文献[1]最早提出了均值 - 方差的组合投资理论,文献[2 - 3]认为交易者进行套期保值实际上是对现货市场和期货市场的资产进行组合投资。文献[4]研究了在标的资产服从 Levy 过程时,运用局部风险最小方法,得到了最优套期保值策略。文献[5]考虑了标的资产是由布朗运动驱动的金融市场,采用了动态规划原理,给出了套期保值策略。近年来,国内外众学者也对套期保值问题进行了不同层次的研究[6-11],其中利用均值 - 方差准则[12-16]研究已成为热点之一,而利用随机微分对策思想研究套期保值问题较为新颖。本文考虑了部分信息下的股价带跳的套期保值模型,采用了随机微分对策思想,在均值 - 方差的准则下,最终得到最优套期保值策略。

1 套期保值模型的建立

当有重大事件出现时(如经济危机、政治事件等),会对股票价格产生冲击,股价会出现不连续的跳跃,这时一般将股票价格考虑为跳跃 - 扩散模型。这里考虑金融市场只有一种无风险资产与一种风险资产的情形(多维情况与一维情况无本质上的差异)。

设无风险资产 $P_0(t)$ 服从微分方程:

$$\begin{cases} dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt \\ P_0(0) = P_0 > 0 \end{cases}, t \in [0,T]$$

风险资产 $S(t)$ 服从随机微分方程:

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt, P_0(0) = 1 \\ dS(t) = \mu(t,s(t))dt + \sigma(t,s(t))dW(t) + \\ \varphi(t,s(t))dN(t) \quad t \in [0,T] \end{cases}$$

收稿日期:2015-12-27
基金项目:国家自然科学基金青年项目(11501434)
作者简介:张 琳(1990-),女,陕西西安人,硕士生,主要从事金融数学方面的研究,(E-mail)495269402@qq.com;
刘宣会(1964-),男,陕西乾县人,副教授,主要从事随机控制,数理金融,风险管理方面的研究,(E-mail)lxh1112011@163.com

设 (Ω,F,P) 为一完备概率空间，$W(t)$，$N(t)$ 为 (Ω,F,P) 上标准的 Brown 运动与强度为 λ 的 Poisson 过程，$s(t)$ 为其上时间连续平稳 Markov 链，M 是有限状态空间，$M=\{1,2,\ldots m\}$，而且假设 $W(t)$，$N(t)$ 与 $s(t)$ 相互独立，$s(t)$ 具有平稳转移概率，

$$p_{ij}(t)=p\{s(t)=j\mid s(0)=i\},t>0,i,j=1,2,\ldots m$$

$$q_{ij}=\begin{cases}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{p_{ij}(t)}{t},i\neq j\\ \lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{p_{ij}(t)-1}{t},i=j\end{cases},i,j=1,2,\ldots m$$

证券预期收益率 $\mu(t,s(t))$ 已知，金融市场参数 $\sigma(t,s(t))$，$\varphi(t,s(t))$ 均为 F_t 的适应随机过程。

设投资者初始财富为 $X(0)=x_0$，$\pi(t)$ 表示 t 时刻投资者在股票上投资财富的市场价值，此时的财富过程为 $X(t)$，那么

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X(t)&=[r(t)X(t)+b(t,s(t))\pi(t)]\mathrm{d}t+\\&\sigma(t,s(t))\pi(t)\mathrm{d}W(t)+\\&\pi(t)\varphi(t.s(t))\mathrm{d}N(t)\end{aligned}\tag{1}$$

其中，

$$b(t,s(t))=\mu(t,s(t))-r(t)$$

定义 1 $\pi(t)$ 为可容许策略，即 $\pi(t)$ 为使得方程(1)存在唯一解，而且 $\pi(t)\in L^2(T:R)$，记所有可容许策略集合为 $U_{ad}=\{\pi(t)\in L^2(T:R)\mid$方程(1)存在唯一解$\}$。

定义 2 称 ξ 为一未定权益，若 ξ 为 F_t 可测的，而且 $\xi\in L^2(\Omega,R)$。

考虑套期保值问题(P)：

$$\begin{cases}J(X_0:\pi(t))=MinE[X(T)-\xi]^2\\ s,t.\ \pi(t)\in U_{ad}\\ X(t)\ \text{满足(1)式}\end{cases}$$

2 将部分信息转换为完全信息

在部分信息情况，考虑是“测度变换”。首先，可以定义一个新的测度 Q，同时定义过程：$\eta(t,s(t))=\dfrac{\mu(t,s(t))}{\sigma(t,s(t))}$，且满足 $\int_0^T\|\eta_t\|^2\mathrm{d}t<\infty$，任取 T，使得 0≤t≤T，令

$$L_1=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\exp(-\int_0^t\eta(u,s(u)\mathrm{d}W_u-\frac{1}{2}\int_0^t\|\eta(u,s(u))\|^2\mathrm{d}s)$$

$$\Lambda_t=E_Q\left[\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}\middle|F_t\right]$$

且 $E_Q[\Lambda_t\mid F_t]=1$，其中 E_Q 表示相对于测度 Q 的数学期望，同时可知 L_1 是鞅，由哥萨诺夫定理得，定义

$$\tilde W_s=W_s+\int_0^t\eta(u,s(u))\mathrm{d}u$$

所以 $\mathrm{d}S_t=\sigma(t,s(t))\mathrm{d}\tilde W_t+\varphi(t,s(t))\mathrm{d}N_t$，同时定义

$$L_2=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\exp\left\{\int_0^T(1-\lambda_t)\mathrm{d}t+\log\lambda_t\mathrm{d}N_t\right\}$$

定义 3[17] 滤波 G_t 是关于 $(\tilde W,N)$ 扩张的滤波。

部分信息转化为完全信息状态就是将 $\eta(t,s(t))$ 和 λ_t 转化为 G_t 可测，所以设：

$$\tilde\eta(t,s(t))=E[\eta(t,s(t))\mid G_t]$$

$\tilde\lambda_t=E[\lambda_t\mid G_t]$，由 Kallianpur－Striebel 公式，令

$$\tilde\eta(t,s(t))=f(\tilde\mu(t,s(t))=E[f(\mu(t,s(t)))\mid G_t]=$$

$$<\mu(t,s(t)),f>=\frac{<v_t,f>}{<v_t,1>}$$

其中 $<v_t,f>=\tilde E[M_tf(\mu(t,s(t)))\mid G_t]$，这里 $M_t=L_1\otimes L_2$，所以满足

$$\begin{aligned}M_t&=\exp\{\int_0^t\frac{\mu(u,s(u))}{\sigma(u,s(u))}\mathrm{d}W_u-\\&\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{\mu(u,s(u))}{\sigma(u,s(u))}\right)^2\mathrm{d}u+\\&\int_0^t\log(1+\varphi(u,s(u)))(\mathrm{d}M_u+\lambda_u\mathrm{d}u)\}\mathrm{d}P=M_t\mathrm{d}Q\end{aligned}$$

$\tilde E$ 表示在新的概率测 Q 下的期望，f 为一个实值有界可测函数，$\mathrm{d}f(\mu(t,s(t)))=Lf(\mu(t,s(t)))\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_t$，且 v_t 满足 Zakai equation 即

$$\mathrm{d}<v_t,f>=<v_t,Lf>\mathrm{d}t+<v_t,G_tf>\mathrm{d}W_t$$

其中，$G_tf=\dfrac{\mu(t,s(t))}{\sigma(t,s(t))}f$，由

$$<\mu(t,s(t)),f>=\frac{<v_t,f>}{<v_t,1>}$$

运用 Itô 公式得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde\eta(t,s(t))&=\mathrm{d}<\mu,f>=\\&<\mu,Lf>\mathrm{d}t+[<\mu,G_tf>-\\&<\mu,G_t1><\mu,f>]\mathrm{d}\bar W_t\end{aligned}$$

同理求得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde\lambda_t&=\mathrm{d}<\lambda_t,f>=<\lambda_t,Lf>\mathrm{d}t+\\&[<\lambda_t,G_tf>-<\lambda_t,G_t1><\lambda_t,f>]\mathrm{d}\bar M_t\end{aligned}$$

考虑一组新的过程

$$\begin{cases} d\overline{W}_t = d\widetilde{W}_t - \tilde{\eta}(t,s(t))dt \\ d\overline{M}_t = dN_t - \tilde{\lambda}_t dt \end{cases}$$

由滤波理论可知,过程 $\overline{W}_t$, $\overline{M}_t$ 是关于 G_t 可测的,所以

$$dS(t) = \tilde{\mu}(t,s(t))dt + \sigma(t,s(t))d\overline{W}(t) + \varphi(t,s(t))dN(t)d\overline{M}_t = dN_t - \tilde{\lambda}_t dt$$

将部分信息的情况转化为完全信息的情况,所以描述的套期保值问题(P)可以叙述为:$J(X_0:\pi(t)) = MinE[X(T) - \xi]^2$,其约束条件为:

$$\begin{cases} dS(t) = \tilde{\mu}(t,s(t))dt + \sigma(t,s(t))d\overline{W}_t + \\ \qquad \varphi(t,s(t))dN_t \\ d\overline{M}_t = dN_t - \tilde{\lambda}_t dt \\ dX(t) = [X(t)r(t) + \pi(t)(\tilde{\mu}(t,s(t)) - r(t))]dt + \\ \qquad \pi(t)\sigma(t,s(t))d\overline{W}_t + \pi(t)\varphi(t,s(t))dN_t \\ \qquad t \in [0,T] \end{cases}$$

3　最优套期保值策略

假设 1　$E\int_0^T \{p(t,s(t))[X(t) - h(t,s(t))]\pi(t)\varphi(t,s(t))\}^2 dt < \infty$

假设 2　$Ep^2(t,s(t))dt < \infty$

假设 3　$E[\pi(t)\varphi(t,s(t)) - 1]^2 < \infty$

定理 1 在假设 1,2,3 条件下,问题(P)的最优解为:

$$\pi(t) = \frac{[h(t,s(t)) - X(t)]}{\sigma^2(t,s(t))} \cdot [\tilde{\mu}(t,s(t)) - r(t) + \tilde{\lambda}_t\varphi(t,s(t)) + \frac{\sigma(t,s(t))h(t,s(t))}{p(t,s(t))}] \tag{2}$$

证明　引入倒向随机微分方程

$$\begin{cases} dp(t,s(t)) = m(t,s(t))dt + h(t,s(t))dW(t) \\ p(T,s(T)) = 1, p(t,s(t)) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dh(t,s(t)) = \beta(t,s(t))dt + dW(t) \\ h(T,s(T)) = \xi \end{cases}$$

$$d[X(t) - h(t,s(t))] = [r(t)X(t) + \pi(t)(\tilde{\mu}(t,s(t)) - r(t)) - \beta(t,s(t))]dt + [\pi(t)\sigma(t,s(t)) - 1]dW(t) + [\pi(t)\varphi(t,s(t))]dN_t \tag{3}$$

有 $d\overline{M}_t = dN_t - \tilde{\lambda}_t dt$, 则(3)式转化为:

$$d[X(t) - h(t,s(t))] = [r(t)X(t) + \pi(t)(\tilde{\mu}(t,s(t)) - r(t)) - \beta(t,s(t)) + \tilde{\lambda}_t\pi(t)\varphi(t,s(t))]dt + [\pi(t)\sigma(t,s(t)) - 1]d\overline{W}(t) + [\pi(t)\varphi(t,s(t))]d\overline{M}_t$$

运用 Itô 公式可得

$$\begin{aligned} &d\{p(t,s(t))[X(t) - h(t,s(t))]^2\} = \\ &p(t,s(t))d[X(t) - h(t,s(t))]^2 + \\ &[X(t) - h(t,s(t))]^2 dp(t,s(t)) + \\ &d < p(t,s(t))[X(t) - h(t,s(t))]^2 > = \\ &2p(t,s(t))[X(t) - h(t,s(t))][r(t)X(t) + \\ &\pi(t)(\tilde{\mu}(t,s(t)) - r(t)) - \\ &\beta(t,s(t)) + \tilde{\lambda}_t\pi(t)\varphi(t,s(t))]dt + \\ &2p(t,s(t))[X(t) - h(t,s(t))] \cdot \\ &[\pi(t)\sigma(t,s(t)) - 1]d\overline{W}(t) + \\ &2p(t,s(t))[X(t) - h(t,s(t))] \cdot \\ &\pi(t)\varphi(t,s(t))d\overline{M}(t) + \\ &p(t,s(t))[\pi(t)\sigma(t,s(t)) - 1]^2 dt + \\ &\sum_{j=1}^{m} q_{s(t)j}[X(t) - h(t,s(t))]p(t,s(t))dt + \\ &[X(t) - h(t,s(t))]^2 m(t,s(t))dt + \\ &[X(t) - h(t,s(t))]^2 h(t,s(t))d\overline{W}(t) + \\ &2h(t,s(t))[X(t) - h(t,s(t))] \cdot \\ &[\pi(t)\sigma(t,s(t)) - 1]dt \end{aligned} \tag{4}$$

对(4)式从 0 到 T 积分然后求数学期望可知

$$\begin{aligned} &E\{p(t,s(t))[X(T) - h(T,s(T))]^2\} = \\ &p(0,s(0))[X(0) - h(0,s(0))]^2 + \\ &E\int_0^T p(t,s(t))H(t,s(t))dt \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} &H(t,s(t)) = \\ &2[X(t) - h(t,s(t))][r(t)X(t) + \\ &\pi(t)(\tilde{\mu}(t,s(t)) - r(t)) - \beta(t,s(t)) + \\ &\tilde{\lambda}_t\pi(t)\varphi(t,s(t))] + [\pi(t)\sigma(t,s(t)) - 1]^2 + \\ &\sum_{j=1}^{m} q_{s(t)j}[X(t) - h(t,s(t))] + \\ &2[X(t) - h(t,s(t))](\pi(t)\sigma(t,s(t)) - 1) \\ &\frac{h(t,s(t))}{p(t,s(t))} + \\ &[X(t) - h(t,s(t))]^2 \frac{m(t,s(t))}{p(t,s(t))} = \\ &\sigma^2(t,s(t))\pi^2(t) + 2[X(t) - h(t,s(t))] \cdot \end{aligned}$$

$$[\tilde{\mu}(t,s(t))-r(t)+\frac{h(t,s(t))\sigma(t,s(t))}{p(t,s(t))}]\cdot\pi(t)+$$
$$2[X(t)-h(t,s(t))][r(t)X(t)-\beta(t,s(t))-$$
$$\frac{h(t,s(t))}{p(t,s(t))}]+\sum_{j=1}^{m}q_{s(t)j}[X(t)-h(t,s(t))]+$$
$$[X(t)-h(t,s(t))]^2\frac{m(t,s(t))}{p(t,s(t))}+1 \tag{5}$$

在(5)式中取

$$\beta(t,s(t))=$$
$$\frac{[X(t)-h(t,s(t))]^2}{2\sigma^2(t,s(t))}\cdot[\tilde{\mu}(t,s(t))-$$
$$r(t)+\tilde{\lambda}_t\varphi(t,s(t))]^2+$$
$$\frac{[X(t)-h(t,s(t))]}{\sigma(t,s(t))}\cdot[\tilde{\mu}(t,s(t))-r(t)+$$
$$\tilde{\lambda}_t\varphi(t,s(t))]\cdot\frac{h(t,s(t))}{p(t,s(t))}+$$
$$\frac{h^2(t,s(t))[X(t)-h(t,s(t))]}{2p^2(t,s(t))}+$$
$$\frac{2h(t,s(t))p(t,s(t))}{2p^2(t,s(t))}+$$
$$\frac{[X(t)-h(t,s(t))]m(t,s(t))p(t,s(t))}{2p^2(t,s(t))}+$$
$$\frac{+2p^2(t,s(t))r(t)X(t)}{2p^2(t,s(t))}+$$
$$\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{m}q_{s(t)j}+1) \tag{6}$$

$$\mathrm{E}\{p(t,s(t))[X(T)-h(T,s(T))]^2\}=E[X(T)-\xi]^2=$$
$$p(0,s(0))[X(0)-h(0,s(0))]^2+$$
$$\mathrm{E}\int_0^T p(t,s(t))H(t,s(t))\mathrm{d}t$$

当$\beta(t,s(t))$满足(6)式时,$H(t,s(t))$就为$\pi(t)$的完全平方式,这时当$\pi(t)$满足(2)式时,$H(t,s(t))=0$,显然最小,从而得到的最优套期保值策略$\pi(t)$为:

$$\pi(t)=\frac{[h(t,s(t))-X(t)]}{\sigma^2(t,s(t))}[\tilde{\mu}(t,s(t))-r(t)+$$
$$\tilde{\lambda}_t\varphi(t,s(t))+\frac{\sigma(t,s(t))h(t,s(t))}{p(t,s(t))}]$$

4 结束语

文章在具有部分信息条件下,股价服从具有 Markov 调制参数的跳-扩散过程时,研究了均值-方差准则下最优套期保值问题,先用非线性滤波技术,将部分信息转化为完全信息,运用倒向随机微分方程得到最优套期保值策略。

参 考 文 献:

[1] MARKOWITZ H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance,1952,7(1):77-91.

[2] JOHNSON L L.The Theory of Hedging and Speculation in Commodity Futures[J]. Review of Economic Studies,1960,27(7):139-151.

[3] STEIN J L.The Simultanteous Determination of Spot and Futures Prices[J]. American Economic Review, 1961,51(11):1012-1025.

[4] REMIN O.Hedging of defaultable Claims in a structural model using a locally risk-minimizing Approach[J]. Stochastic processes and Their Applications,2014,124(9): 2868-2891.

[5] STEPHANE G.The use of BSDES to characterize the mean-variance hedging problem and the Variance Optimal Martingale measure for defaultable Claims[J]. Stochastic processes and Their Applications,2015,125(4): 1323-1351.

[6] STEIN J D.The theory of hedging and speculation in commodity futures[J].Review of finance,1960,12(2): 139-151.

[7] 王济光.商品期货交易的现货市场基础[M].北京:中国财政经济出版社,1999.

[8] CECCHETTI S G,CUMBY R E,FIGLEWSKI S.Estimation of the optimal Futures hedge[J].Review of Economics and statistics,1998,70(6):623-630.

[9] 刘宣会,胡思建,侯建荣.证券组合优化模型的随机LQ控制框架[J].西安电子科技大学学报:自然科学版,2004(2):304-309.

[10] 刘海龙.证券投资决策的微分对策方法研究[J].系统工程学报,1999,14(1):69-72.

[11] BROWNE S.Stochastic differential Portfolio games[J]. Journal of Applied probability,2000,37(1):126-147.

[12] 刘峰,刘宣会.基于均值-方差准则下的套期保值问题研究[J].哈尔滨商业大学学报,2014,30(1):109-113.

[13] 张海沨.随机利率下的均值-方差最小套期保值[J].

工程数学学报,2007,24(6):972-976.

[14] WONG T W,CHIU M C,WONG H Y.Time-consistent mean-variance Hedging of longevity risk effect of Cointegration[J].Insurance:Mathematics and Economics,2014,56(3):56-67.

[15] MICHAEL M.Revaz Tevazadze and Teimuraz Toronjadze.Mean-variance hedging under partial Information [J].Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008,47(5):2381-2409.

[16] CHEN Zhi Ping.Optimal investment policy in the time consistent mean-variance formulation[J].Insurance:Mathematics and Economics,2013,52(2):145-146.

[17] 刘宣会,张金燕.部分信息下均值-方差准则下的投资组合问题研究[J].数学实践与认识,2013,43(12):124-130.

Researche on Problem of Hedging for Price of Stock with Jump-diffusion Processes Under Partial Information

ZHANG Lin, *LIU Xuan-hui*, *CHEN Hui*

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract: When an important things occurs, the stock price will be discontinuous jumps and generally be considered as jump-diffusion model with Markov modulation Parameter. To minimize risk and maximize revenue, the part of the information under the jump diffusion model to be seted up (Taking into account the geometric Brown movement has been unable to accurately portray the volatility of the stock price). When the stock price follows the jump diffusion process, using nonlinear filtering technique, transforming partial information into complete information, under the mean variance criterion by adopting the idea of stochastic differential game, by using Itô formula, display solution of optimal hedging strategy is obtained.

Key words: jump-diffusion process; stochastic differential games; hedging; Itô formula