第 29 卷第 2 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 29　No. 2
2016 年 4 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Apr. 2016
文章编号:1673-1549(2016)02-0075-05　　DOI:10.11863/j.suse.2016.02.15

严格对角占优 M - 矩阵的逆矩阵的无穷大范数的上界估计

赵仁庆

(楚雄师范学院数学与统计学院,云南 楚雄 675000)

摘　要:M - 矩阵作为特殊矩阵类在高阶稀疏线性方程组的迭代法求解中有重要作用,尤其是 M - 矩阵的逆矩阵的无穷大范数的上界估计在数值代数中具有重要意义。如许多代数方程组问题的收敛性条件、条件数等需要计算 $\|A^{-1}\|_\infty$,但当 M - 矩阵 A 的阶数较大时,其逆矩阵很难求,因此 $\|A^{-1}\|_\infty$ 估计是十分重要的问题。首先引入一组新的记号,给出严格对角占优 M - 矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的元素满足的两个不等式;此外得到了 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界新估计式,这些估计式避免了求逆矩阵 A^{-1} 而直接利用矩阵 A 的元素表示,最后给出矩阵 A 的最小特征值 $q(A)$ 下界的新估计式。理论分析和数值算例表明新估计式改进了相关结果。

关键词:对角占优矩阵;M - 矩阵;无穷大范数;最小特征值

中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A

引　言

M - 矩阵作为特殊矩阵类在高阶稀疏线性方程组的迭代法求解中有重要作用,在迭代法求解线性代数方程组时,需要用 M - 矩阵 A 的逆矩阵的无穷大范数 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界来判断迭代终止、收敛性、误差分析和稳定性等问题。特别当 M - 矩阵 A 的阶数较大时,其逆矩阵很难求,这时用 M - 矩阵 A 的逆矩阵的无穷大范数 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界估计值代替真实值进行计算就显得尤为重要。近年来,对 M - 矩阵及其逆矩阵的无穷大范数的上界估计引起了很多学者的关注和研究,并且取得了一些重要结果[1-15]。本文给出了严格对角占优 M 矩阵的 $\|A^{-1}\|_\infty$ 上界新估计式,这些估计式改进了文献[1-2]中的相关结果。

1　预备知识

为叙述方便,给出本文需要用到的一些记号。用 $C^{n\times n}(R^{n\times n})$ 表示 $n\times n$ 阶复(实)矩阵的集合,记

$N=\{1,2,\cdots n\}, m\leqslant i,j,k\leqslant n$

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 且 $a_{ii}\neq 0$,

$$d_i=\frac{\sum_{j\in\mathbf{N},j\neq i}|a_{ij}|}{a_{ii}}$$

$$J(A)=\{i\in N:|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|\}$$

$$u_i=\frac{\sum_{i+1\leqslant j\leqslant n}|a_{ij}|}{a_{ii}}$$

$$l_m=\max_{m\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{\sum_{m\leqslant j\leqslant n,j\neq i}|a_{ij}|}{|a_{ii}|}\right\}$$

$$l_n=u_n=0$$

收稿日期:2016-01-21

基金项目:楚雄师范学院项目(12YJRC10)

作者简介:赵仁庆(1985-),女,云南腾冲人,讲师,硕士,主要从事矩阵理论及其应用方面的研究,(E-mail)422652443@qq.com

$$r_{ji}^{(m)} = \frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}| - \sum_{k\neq j,i}^{n} |a_{jk}|}, j \neq i$$

$$r_i^{(m)} = \max_{j\neq i}\{r_{ji}^{(m)}\}$$

$$\sigma_{ji}^{(m)} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k\neq j,i} |a_{jk}| r_i^{(m)}}{|a_{jj}|}, j \neq i$$

$$h_i^{(m)} = \max_{j\neq i}\left\{\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|\sigma_{ji}^{(m)} - \sum_{k\neq j,i}^{n} |a_{jk}|\sigma_{ki}^{(m)}}\right\}$$

$$\omega_{ji}^{(m)} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k\neq j,i} |a_{jk}|\sigma_{ki}^{(m)} h_i^{(m)}}{|a_{jj}|}, j \neq i, \omega_{ji}^{(1)} = \omega_{ji}$$

$$\omega_i^{(m)} = \max_{j\neq i}\{\omega_{ji}^{(m)}\}, \omega^{(m)} = \max_{m\leqslant i\leqslant n}\{\omega_i^{(m)}\}$$

$$v_{ji}^{(m)} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k\neq j,i} |a_{jk}|\sigma_{ki}^{(m)}}{|a_{jj}|}, j \neq i$$

$$v^{(m)} = \max_{m\leqslant i\leqslant n}\{v_{ji}^{(m)}, j \neq i\}, m \leqslant j \leqslant n, m \leqslant k \leqslant n$$

定义 1[3] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, 如果对任意的 $i,j \in N$, $i \neq j$, 都有 $a_{ij} \leqslant 0$, 则称 A 为 Z -矩阵,记为 $A \in Z^{n\times n}$, 即 $Z^{n\times n} = \{A = (a_{ij}) \in R^{n\times n} | a_{ij} \leqslant 0, \forall i,j \in N, i \neq j\}$。

定义 2[3] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, 如果 $a_{ij} \geqslant 0$, 对任意 $i,j \in N$, 即 A 的所有元素是非负的,则称 A 为非负矩阵,记为 $A \geqslant 0$。

定义 3[3] 设 A 为 Z -矩阵, A 可逆且 $A^{-1} \geqslant 0$, 则称 A 为非奇异 M -矩阵。

定义 4[4] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, 如果满足条件

(1) $|a_{ii}| \geqslant \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$, $i \in N$;

(2)(2) $J(A) \neq \Phi$;

(3)对于任意 $i \in N, i \notin J(A)$, 存在 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 使 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{k-1}i_k} \neq 0, i_k \in J(A)$;

则称 A 为弱链对角占优矩阵。

定义 5[4] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, 若 $J(A) = N$, 则称 A 为行严格对角占优矩阵。

注 由定义 4 和定义 5 知,若 A 为严格对角占优矩阵,则 A 为弱链对角占优矩阵。

引理 1[4] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M -矩阵,则 $A^{(k,n)}(k = 1, \cdots, n-1)$ 也是弱链对角占优的 M -矩阵。这里 $A^{(n_1,n_2)}$ 表示由 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 的 n_1 至 n_2 行和 n_1 至 n_2 列的元素组成的子矩阵。例如 $A^{(2,n)}$ 表示由 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 的 2 至 n 行和 2 至 n 列的元素组成的子矩阵。

引理 2[4] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M -矩阵, $B = A^{(2,n)}$, $A^{-1} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $B^{-1} = (\beta_{ij})_{i,j=2}^{n}$, 则对任意的 $i,j \in N$ 有

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\Delta}, \alpha_{i1} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1}), \alpha_{1j} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=2}^{n}\beta_{kj}(-a_{1k}), \alpha_{ij} = \beta_{ij} + \alpha_{1j}\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1})$$

其中

$$\Delta = a_{11} - \sum_{k=2}^{n} a_{1k}\left[\sum_{i=2}^{n}\beta_{ki}a_{i1}\right]$$

引理 3[4] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M -矩阵, $A^{-1} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$, 令 $q = q(A)$, 则 $q \leqslant \min_{i\in N}\{a_{ii}\}$, $q \geqslant \max_{i\in N}\{\sum_{j\in N} a_{ij}\}$, $\frac{1}{M} \leqslant q \leqslant \frac{1}{m}$, 其中, $M = \max_{i\in N}\{\sum_{j\in N}\alpha_{ij}\} = \|A^{-1}\|_\infty$; $m = \min_{i\in N}\{\sum_{j\in N}\alpha_{ij}\}$。

文献[1-2]研究了严格对角占优 M -矩阵的逆矩阵的无穷大范数 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界估计,并且得到了如下结果。

定理 1[1] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M -矩阵,则

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{a_{11}(1-u_1l_1)} + \sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}(1-u_il_i)}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{1-u_jl_j}\right] \tag{1}$$

定理 2[2] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M -矩阵,则

$$\|A^{-1}\|_\infty \frac{1}{a_{11} - \sum_{k=2}^{n}|a_{1k}|v_{k1}^{(1)}} + \sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii} - \sum_{i<k\leqslant n}|a_{ik}|v_{ki}^{(i)}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\max\{u_j, 1+u_j(v^{(j)}-l_j)\}}{1-u_jl_j}\right] \tag{2}$$

2 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的无穷大范数的上界估计

引理 4[5] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M -矩阵,则 $A^{-1} = (\alpha_{ij})$ 满足

$$|\alpha_{ji}| \leqslant \frac{|a_{ji}| + \sum_{k\neq i,j}|a_{jk}|\sigma_{ki}^{(1)}h_i^{(1)}}{|a_{jj}|}|\alpha_{ii}| = \omega_{ji}^{(1)}|\alpha_{ii}| \leqslant \omega^{(1)}|\alpha_{ii}| < |\alpha_{ii}|, j \neq i \tag{3}$$

特别当 $i=1$ 时,有

$$|\alpha_{j1}| \leqslant \frac{|a_{j1}| + \sum_{k=2,k\neq j}^{n} |a_{jk}|\sigma_{k1}^{(1)} h_1^{(1)}}{|a_{jj}|} |\alpha_{11}| =$$

$$\omega_{j1}^{(1)} |\alpha_{11}| \leqslant \omega^{(1)} |\alpha_{11}| < |\alpha_{11}|, j \neq 1 \tag{4}$$

引理 5　设 $A=(a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M - 矩阵,则 $A^{-1}=(\alpha_{ij})$ 满足

$$\alpha_{ii} \leqslant \frac{1}{a_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\omega_{ji}^{(1)}} \leqslant \frac{1}{a_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\omega_{ji}^{(m)}} \leqslant \frac{1}{a_{ii}(1-d_i\omega^{(m)})} \tag{5}$$

证明　由引理 4 得

$$1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ji} = a_{ii}\alpha_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\alpha_{ji} \geqslant$$

$$a_{ii}\alpha_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \frac{|a_{ji}| + \sum_{k\neq i,j} |a_{jk}|\sigma_{ki}^{(1)} h_i^{(1)}}{|a_{jj}|}\alpha_{ii} =$$

$$\alpha_{ii}(a_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\omega_{ji}^{(1)}) \geqslant \alpha_{ii}(a_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\omega_{ji}^{(m)}) \geqslant$$

$$\alpha_{ii}(a_{ii} - a_{ii}d_i\omega^{(m)})$$

故

$$\alpha_{ii} \leqslant \frac{1}{a_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\omega_{ji}^{(1)}} \leqslant \frac{1}{a_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\omega_{ji}^{(m)}} \leqslant \frac{1}{a_{ii}(1-d_i\omega^{(m)})}$$

定理 3　设 $A=(a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M - 矩阵 $B=A^{(2,n)}$, $A^{-1}=(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 且 $B^{-1}=(\beta_{ij})_{i,j=2}^{n}$, 则

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{1}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|\omega_{j1}^{(1)}} + \frac{d_1}{1-d_1\omega^{(1)}}M_B, \frac{\omega^{(1)}}{(a_{11} - \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|\omega_{j1}^{(1)})} + \left(\frac{1}{1-d_1\omega^{(1)}}\right)M_B\right\} \tag{6}$$

证明　设 $r_i = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}$, $M_A = \|A^{-1}\|_\infty$, $M_B = \|B^{-1}\|_\infty$, 则 $M_A = \max_{i\in N}\{r_i\}$, $M_B = \max_{2\leqslant i\leqslant n}\{\sum_{j=2}^{n}\beta_{ij}\}$。由引理 2 及引理 5 可得

$$r_1 = \alpha_{11} + \sum_{j=2}^{n}\alpha_{1j} = \alpha_{11} + \frac{1}{\Delta}\sum_{k=2}^{n}(-a_{1k})\sum_{j=2}^{n}\beta_{kj} \leqslant$$

$$\alpha_{11} + \alpha_{11}\sum_{k=2}^{n}(-a_{1k})M_B = \alpha_{11} + \alpha_{11}a_{11}d_1M_B \leqslant$$

$$\frac{1}{a_{11} - \sum_{j=2} |a_{1j}|\omega_j^{(1)}} + \frac{d_1}{1-d_1\omega^{(1)}}M_B$$

当 $2\leqslant i\leqslant n$ 时,由引理 2 和(4)式得

$$\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1}) = \Delta\alpha_{i1} \leqslant \Delta\omega^{(1)}\alpha_{11} =$$

$$\frac{1}{\alpha_{11}}\omega^{(1)}\alpha_{11} = \omega^{(1)} < 1$$

故对 $2\leqslant i\leqslant n$, 由引理 2 知

$$r_i = \alpha_{i1} + \sum_{j=2}^{n}\alpha_{ij} =$$

$$\alpha_{i1} + \sum_{j=2}^{n}(\beta_{ij} + \alpha_{1j}\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1})) \leqslant$$

$$\omega^{(1)}\alpha_{11} + \sum_{j=2}^{n}(\beta_{ij} + \alpha_{1j}\omega^{(1)}) =$$

$$r_1\omega^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}\beta_{ij} \leqslant$$

$$r_1\omega^{(1)} + M_B$$

若 $r_1 \leqslant \omega^{(1)}r_1 + M_B$, 则

$$M_A = \max_{2\leqslant i\leqslant n}|r_i| \leqslant \omega^{(1)}r_1 + M_B \leqslant$$

$$\omega^{(1)}\left(\frac{1}{a_{11} - \sum_{j=2} |a_{1j}|\omega_{j1}^{(1)}} + \frac{d_1}{1-d_1\omega^{(1)}}M_B\right) + M_B =$$

$$\frac{\omega^{(1)}}{a_{11} - \sum_{j=2} |a_{1j}|\omega_{j1}^{(1)}} + \left(\frac{1}{1-d_1\omega^{(1)}}\right)M_B$$

若 $r_1 > \omega^{(1)}r_1 + M_B$, 则

$$M_A = r_1 \leqslant \frac{1}{a_{11} - \sum_{j=2} |a_{1j}|\omega_{j1}^{(1)}} + \frac{d_1}{1-d_1\omega^{(1)}}M_B$$

因此,有

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\{r_1, r_i : 2\leqslant i\leqslant n\} \leqslant$$

$$\max\left\{\frac{1}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|\omega_{j1}^{(1)}} + \frac{d_1}{1-d_1\omega^{(1)}}M_B, \frac{\omega^{(1)}}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|\omega_{j1}^{(1)}} + \left(\frac{1}{1-d_1\omega^{(1)}}\right)M_B\right\}$$

定理得证。

结合引理 1,对定理 3 利用迭代法得如下结论。

定理 4　设 $A=(a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M - 矩阵,则

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{1}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|\omega_{j1}^{(1)}} + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_{ii} - \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\omega_{ji}^{(i)}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{u_j}{1-u_j\omega^{(j)}}, \frac{\omega^{(1)}}{a_{11} - \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|\omega_{j1}^{(1)}} + \right.$$

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{\omega^{(i)}}{a_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\omega_{ji}^{(i)}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{1-u_j\omega^{(j)}}\} \tag{7}$$

由引理 3 和定理 4 得如下推论。

推论 1 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是严格对角占优 $M-$矩阵,则 A 的最小

$$q(A)>$$

$$\left\{\max\left\{\frac{1}{a_{11}-\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}|\omega_{j1}^{(1)}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\omega_{ji}^{(i)}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{u_j}{1-u_j\omega^{(j)}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\omega^{(1)}}{a_{11}-\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}|\omega_{j1}^{(1)}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{\omega^{(i)}}{a_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\omega_{ji}^{(i)}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{1-u_j\omega^{(j)}}\right\}\right\}^{-1} \tag{8}$$

定理 5 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是严格对角占优 $M-$矩阵,则

$$\max\left\{\frac{1}{a_{11}-\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}|\omega_{j1}^{(1)}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\omega_{ji}^{(i)}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{u_j}{1-u_j\omega^{(j)}}\right.$$

$$\left.\frac{\omega^{(1)}}{a_{11}-\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}|\omega_{j1}^{(1)}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{\omega^{(i)}}{a_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\omega_{ji}^{(i)}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{1-u_j\omega^{(j)}}\right\}\leqslant$$

$$\frac{1}{a_{11}-\sum_{k=2}^{n}|a_{1k}|v_{k1}^{(1)}}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}-\sum_{i<k\leqslant n}|a_{ik}|v_{ki}^{(i)}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\max\{u_j,1+u_j(v^{(j)}-l_j)\}}{1-u_jl_j}\right] \tag{9}$$

证明 设 A 是严格对角占优 $M-$矩阵,故 $h_i^{(m)}\leqslant 1$, $\sigma_{ji}^{(m)}<1$。由 $l_m,v_{ji}^{(m)},\omega_{ji}^{(m)},\omega^{(m)},v^{(m)}$ 的表达式知, $1>l_m>v^{(m)}\geqslant v_{ji}^{(m)}\geqslant\omega^{(m)}\geqslant\omega_{ji}^{(m)}$, 故

$$\frac{\omega^{(i)}}{a_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\omega_{ji}^{(i)}}<\frac{1}{a_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\omega_{ji}^{(i)}}\leqslant$$

$$\frac{1}{a_{ii}-\sum_{k=i+1}^{n}|a_{ik}|v_{ki}^{(i)}}$$

且

$$\frac{u_j}{1-u_jl_j}>\frac{u_j}{1-u_j\omega^{(j)}}$$

$$\frac{1+u_j(v^{(j)}-l_j)}{1-u_jl_j}=1+\frac{u_jv^{(j)}}{1-u_jl_j}>1+\frac{u_j\omega^{(j)}}{1-u_j\omega^{(j)}}=$$

$$\frac{1}{1-u_j\omega^{(j)}}$$

故结论成立。

注 由定理 5 可知,本文的结论在一定条件下改进了文献[2]中的结果。

例 1 设

$$A=\begin{bmatrix}1&-0.2&-0.4\\-0.3&1&-0.5\\-0.2&-0.3&1\end{bmatrix}$$

用 matlab7.0 计算得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1.2997&0.4893&0.7645\\0.6116&1.4067&0.9480\\0.4434&0.5199&1.4373\end{bmatrix}$$

应用定理 1[1] 计算得 $\|A^{-1}\|_\infty\leqslant 7.0513$, 应用定理 2[2] 计算得 $\|A^{-1}\|_\infty\leqslant 5.7628$, 应用定理 4 得 $\|A^{-1}\|_\infty=4.0744$。事实上, $\|A^{-1}\|_\infty=2.9664$。表明本文的结果比参考文献[1-2]中的结果更为精确。

参 考 文 献:

[1] WANG P.An upper bound for $\|A^{-1}\|_\infty$ of strictly diagonally dominant M-matrices [J]. Linear Algebra Appl, 2009,431:667-673.

[2] 李艳艳,李耀堂.严格对角占优 M-矩阵的逆矩阵的无穷大范数上界的估计[J].云南民族大学学报:自然科学版,2012,21(1):52-56.

[3] 陈公宁.矩阵理论与应用[M].北京:科学出版社,2007.

[4] SHIVAKUMAR P N,WILLIAMS J J,YE Q,et al.On two-sided bounds related to weakly diagonally dominant M-matrces with application to digita dynamics[J].Matrix Anal.Appl,1996,17(2):298-312.

[5] 王峰.非奇异 M-矩阵的逆矩阵和 M-矩阵的 Hadamard 积的最小特征值下界估计[J].应用数学,2013,26(2):341-345.

[6] 潘淑珍,陈神灿.弱链对角占优矩阵 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界估计[J].福州大学学报:自然科学版,2012,25(3):36-39.

[7] 赵仁庆,熊昌明,李耀堂.块 H-矩阵的判定及其逆底无穷大范数的上界[J].云南大学学报:自然科学版,2011,33(2):125-130.

[8] 刘新,杨晓英.严格对角占优 M-矩阵 A 的 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的新上界[J].北华大学学报:自然科学版,2014,15(2):184-187.

[9] 王永.严格对角占优 M-矩阵的逆矩阵的无穷大范

数上界的估计的新上界[J].工程数学报,2015(5):719-725.

[10] 赵仁庆,刘鹏.弱链对角占优 M-矩阵的逆矩阵的无穷大范数的上界估计[J].楚雄师范学院学报,2014,29(3):5-10.

[11] 赵云平,李朝迁.广义 M-矩阵的逆矩阵范数的估计[J].贵州大学学报:自然科学版,2014,31(4):8-10.

[12] WEN Li.The intinity norm bound for the inverse of nonsingular diagonal dominant matrices[J].Appl.Math. Lett.,2008,21:258-263.

[13] LI Y T,CHEN F B,WANG D F.New lower bounds on eigenvalue of the Hadamard product of an M-matrix and its inverses[J].Linear Algebra Appl,2009,430:1423-1431.

[14] HUANG T Z,ZHU Y.Estimation of $\|A^{-1}\|_\infty$ for weakly chained diagonally dominant M-matrice [J]. Linear Algebra Appl.,2009,432:670-667.

[15] 赵仁庆,钟振华,刘鹏.GS-SDD 矩阵的逆矩阵的无穷范数和最小奇异值的估计[J].楚雄师范学院学报,2014,29(6):1-5.

Estimation on Upper Bounds of the Infinity Norms of Inverses for Strictly Diagonally Dominant M- matrices

ZHAO Renqing

(School of Mathematics and Statistics, Chuxiong Normal University, Chuxiong 675000, China)

Abstract: M- Matrix as a special class of matrices which plays an important role in solving high order sparse linear equations, especially estimation for upper bounds of the infinity norms for matrix inverse of M- Matrices, has important significance in numerical algebra. Usually $\|A^{-1}\|_\infty$ is used to calculate such as the convergence conditions, condition number and so on of many algebraic equations. But when order of the M- matrix A is much larger, the inverse matrix is very difficult to find, so estimation of $\|A^{-1}\|_\infty$ is a very important problem. Firstly, some new marks are introduced, and two inequalities are given, which elements of inverse matrix of strictly diagonally dominant M- matrix A satisfy condition; The new upper bound estimates are obtained in addition, and these estimates, represented by elements of the matrix A directly, avoid calculating the inverse matrix A^{-1}; the bound is applied to obtain a lower bound for the smallest eigenvalue of A. Theoretical analysis and numerical examples show that the new bounds improve related results.

Key words: diagonal dominance matrix; M- matrix; infinity norms; smallest eigenvalue