

# 一种用于结构拓扑优化的改进遗传演化算法

肖雨果<sup>1</sup>, 盛 鹰<sup>1</sup>, ZENG Lingxi<sup>2</sup>

(1. 四川大学建筑与环境学院, 成都 610065; 2. Risk Management Institute, National University of Singapore, Singapore 119077)

**摘 要:**拓扑优化是结构优化设计领域中的重点和热点课题。结构渐进优化法(ESO)和遗传演化算法(GESO)是近年来提出的拓扑优化方法,可用于寻找结构最优的拓扑形状,指导结构概念设计。但这两种方法均存在诸多缺点,在工程应用中具有局限性。针对 ESO 和 GESO 方法的缺陷,发展了适用于拓扑优化的一种基于并行小生境比对法的改进遗传算法,并将改进遗传算法与 ESO 方法相结合,提出了灵敏度过滤技术和单元删除的修正判据,建立了引导式单元删除策略和孤立单元判断机制,形成了一种新的改进遗传演化算法(Improved Genetic Evolutionary Algorithm, IGEA),并以 VC++ 作为编程平台,编写了集改进遗传算法、有限元、IGEA 方法于一体的拓扑优化程序,有效实现了结构拓扑优化设计。算例表明,提出的 IGEA 方法优于 ESO 和 GESO 方法。

**关键词:**拓扑优化;改进遗传演化算法;灵敏度过滤;引导式单元删除;孤立单元判断

**中图分类号:**TU311

**文献标志码:**A

## 引 言

结构拓扑优化是一种根据设计区域、优化目标、设计载荷、边界约束和制造工艺约束而寻求结构材料最佳分布的优化方法,其优化结果可改善结构性能或节省材料,在建筑、机械、航空航天、海洋工程、船舶制造等领域具有广泛的应用价值<sup>[1]</sup>。

结构拓扑优化包括离散结构拓扑优化和连续体结构拓扑优化。其中,连续体结构拓扑优化在工程中的应用更广,其早期的方法主要为均匀化方法<sup>[2]</sup>、变厚度法<sup>[3]</sup>、变密度法<sup>[4]</sup>,但它们的通用性与计算效率不理想。基于此,Xie 等人<sup>[5]</sup>于 1993 年首次提出了结构渐进优化法(Evolutionary Structural Optimization, ESO),其基本思想是基于某种优化准则逐步删去无效的材料单元使剩余结构趋于优化。该方法可用于实现结构的尺寸优化、形状优化和拓扑优化,对约束条件为应力、刚度、振动频

率、响应等问题都具有普适性<sup>[6]</sup>,在国际上引起了很大反响。但 ESO 方法存在诸多缺点:(1)该方法实质是最速下降法<sup>[7]</sup>,由灵敏度系数确定下降方向,如同所有梯度类算法一样,当目标函数存在多个局部极值时,该算法难以获得全局最优解;(2)进化速度慢,参数不易选取;(3)单元删除后不能恢复,使得优化结果易出现棋盘格现象,在工程上可制造性很差。因此,ESO 方法的应用范围受到了限制。

为克服 ESO 方法的缺陷,不少学者在其基础上提出了新的改进方法。Yang<sup>[8]</sup>提出了结构双向渐进优化法(Bi-directional Evolutionary Structural Optimization, BE-SO),它克服了 ESO 方法不能对已删除单元进行恢复的缺陷,可在材料“高效能”区域(如材料应力较高区域)周围添加单元,能获得应力分布较均匀、且最大应力却较小的优化结构,但 BE-SO 方法仅能恢复现有单元周边的单元,不能将大面积(或体积)范围内的单元联系起

收稿日期:2016-03-21

基金项目:国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金资助(U1430119)

作者简介:肖雨果(1984-),女,江西南昌人,硕士生,主要从事结构工程方面的研究,(E-mail)34097847@qq.com;

盛 鹰(1982-),男,四川成都人,博士生,主要从事计算固体力学方面的研究,(E-mail)shengying\_2008@163.com

来<sup>[9]</sup>。龙凯等人<sup>[10]</sup>提出了基于物质点描述的 BESO 法,克服了连续体结构拓扑优化中的数值不稳定现象。易伟建等<sup>[11]</sup>提出了遗传演化算法(Genetic Evolutionary Structural Optimization, GESO),将基本遗传算法与 ESO 方法相结合用于结构拓扑优化,解决了 ESO 方法易陷入局部最优解的问题,能以较大的概率实现结构的全局最优拓扑优化。但本文研究发现,GESO 方法仍有一定的不足,比如:该方法多采用有限元模型下的灵敏度作为单元适应值的度量,但没有对灵敏度值作任何修正处理,优化结果易产生棋盘格现象;GESO 采用变厚度法间接“删除”单元,不适用于三维连续体结构拓扑优化,且会对周围单元的灵敏度计算和结构整体的应力分析造成误差;在进化过程中会产生孤立单元或单元群,通过进化方式陆续“删除”孤立单元的做法效率不高

本文针对 ESO 和 GESO 方法的缺陷,发展了适用于拓扑优化的一种基于并行小生境比对法的改进遗传算法,并将改进遗传算法与 ESO 方法相结合,提出了灵敏度过滤技术和单元删除的修正判据,建立了引导式单元删除策略和孤立单元判断机制,形成了一种新的改进遗传演化算法(Improved Genetic Evolutionary Algorithm, IGEA),并以 VC++ 作为编程平台,编写了集改进遗传算法、有限元、IGEA 方法于一体的拓扑优化程序,有效实现了结构拓扑优化设计。算例表明,IGEA 方法优于 ESO 和 GESO 方法。

## 1 拓扑优化数学模型及 ESO/GESO 方法

### 1.1 结构拓扑优化数学模型

结构拓扑优化问题就是确定某部分材料在设计空间中存在与否的问题。其数学模型可表示为:

$$\begin{cases} \text{obj: } W_{opt} = \min \{f(u)\} \\ \text{s. t. } g_i(u) \leq 0 \\ u|_r = u_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $f(u)$  表示目标函数,常用的有结构重量、体积、刚度、造价、变形、承载能力、自振频率、振幅等。

拓扑优化的基本流程可以描述为<sup>[12]</sup>:

(1) 确定设计区域,选择足够大的设计空间,保证优化结果涵盖其中,选择合适的设计变量、目标函数以及约束函数等其它边界条件。

(2) 结构离散化,进行有限元分析,获取目标函数、约束函数及设计变量对目标函数变化的敏感度信息。

(3) 根据得到的信息,用合适的优化方法计算,计算出当前的设计变量的新值。

(4) 根据终止准则收敛。如果不收敛则重复前两

步;如果收敛则终止迭代。

(5) 进行拓扑优化后处理,得到最优拓扑的形式。

### 1.2 ESO 方法及基本步骤

ESO 方法的基本思想是基于某种优化准则逐步删去无效的材料单元使剩余结构趋于优化。常用的优化准则包括:应力准则、刚度准则、位移灵敏度准则。其关键步骤是:在给定的优化准则下,针对不同的目标函数和约束条件确定单元敏感度系数。当确定了各单元敏感度系数表达式后,按照以下步骤进行拓扑优化分析<sup>[13]</sup>:

(1) 在给定的荷载和边界条件下,给定初始设计模型,用有限元网格离散该区域。

(2) 对离散结构进行力学分析。

(3) 求出各单元的敏感度系数。

(4) 根据预先设定的单元删除率  $RR_i$  确定可删除的单元。在拓扑优化中删除满足式(2)的所有单元:

$$\alpha_e / \alpha_{\max} \leq RR_i \quad (2)$$

其中, $\alpha_e$  为单元敏感度系数, $\alpha_{\max}$  为单元敏感度系数最大值。若某单元敏感度系数满足式(2),则说明该单元的敏感度水平较低,故可删除。

(5) 重复步骤(2)~(4),直到不再有满足式(2)的单元为止,即对应于当前单元删除率  $RR_i$ ,结构已达到稳定状态。为使迭代继续进行,引入参数进化率  $ER$ ,下一迭代过程的单元删除率变为:

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad (3)$$

根据数值经验,迭代过程中初始删除率  $RR_0$  和进化率  $ER$  通常取为 1%~2%。

(6) 重复第(2)~(5)步,直到结构达到收敛准则。

但 ESO 方法存在诸多缺点,主要表现在:

(1) ESO 方法以灵敏度为寻优向导有利有弊:一方面灵敏度概念清晰,计算相对简便,大多数情况下是寻优的有益帮手,能帮助算法较快地找到优化解;另一方面灵敏度可能不能正确地指导程序取舍单元,因为某一进化代中灵敏度低的单元未必是最终优化结构的多余部分,单纯依靠某一进化代的灵敏度值决定单元取舍有可能使程序错误地删除单元。

(2) 单元删除后不能重新找回。若某一代错误地删除了不应删除的单元,则会影响结构的最终优化结果,或形成棋盘格现象,即优化形成的区域中,有材料单元和无材料单元(即孔洞)交替出现,表现形式类似于棋盘,导致在工程上的可制造性很差。

(3) 计算量大。每进化一次都要作一次结构有限元分析,一次寻优过程需要进化很多代。当待优化结构的

单元数太多时,作一次结构分析需要的时间很长,那么一次寻优需要的时间则成倍增长。

(4)当目标函数存在多个局部极值时,ESO方法不能保证所得到的解是全局最优解。

### 1.3 GESO方法及基本步骤

GESO方法是将基本遗传算法与ESO方法相结合的有益尝试,它既保留了ESO方法的优点,又解决了其常收敛于局部最优解的先天缺陷。算例结果表明,GESO方法的计算结果优于ESO方法,且计算时间更省。其原因在于:GESO方法采用概率的方法取舍单元,即每一进化代中达到舍去标准的单元只是有较大的概率被舍去而已,而不像ESO方法中一定要舍去;同理,每一进化代中未达到舍去标准的单元也不一定就能留在设计域中继续存活,只是有较大的存活概率而已。因此,程序运行几次就能有很高的获得全局最优解的概率,在一定程度上避免了错误的单元取舍。而在计算时间上,ESO方法为了保证解的优化质量,每代舍去的单元数必须控制在较小范围内,而GESO方法每代舍去的单元数由概率决定,不必限于较小的范围,所以搜索效率提高,计算时间更省。

GESO方法中,把ESO中的初始设计模型看成是遗传算法中的群体,其有限元网格划分的每个单元就是群体中的各个个体。演化开始前,赋予每个单元一个 $n$ 位的二进制码作为代表该个体的染色体,染色体中的每一位都为1。以单元敏感度系数作为个体适应度值,作用变异、交叉算子,当代表个体染色体的所有基因都为0时,则“删除”相应的单元。

但值得一提的是,该GESO方法在拓扑优化过程中并不是真正将单元从结构中去掉。本文研究发现,由于GESO方法舍去单元并不是从最差单元开始,这就很可能在进化过程中产生孤立单元(即与周围单元均不相连的单元或单元群),导致有限元计算无法进行。因此,使用GESO方法时一般采用变厚度法进行单元的间接“删除”,即将该单元的厚度降为 $10^{-3}$ 或更低的值。

GESO方法的具体实现步骤为:

(1)考虑所有边界条件和载荷条件,建立初始结构的有限元模型。

(2)根据划分的有限元网格,赋予每个单元串长为 $n$ 的染色体,并对染色体的每一位赋初值为1。

(3)对结构进行有限元分析,获得结构响应(如静力问题中的位移、特征值问题中的特征值和特征向量等)。

(4)计算各单元的敏感度系数。

(5)将各单元敏感度系数按大小顺序排列,对排在

后 $m$ 位的个体以一定的概率作用变异算子。变异算子与基本遗传算法不同,只选择染色体中一个不为0的基因,将之变为0。

(6)对群体作用单点交叉算子。

(7)如果代表某个单元的染色体中的基因全为0,则将该单元的厚度降为 $10^{-3}$ 或更低的值,这就间接“删除”了这个单元。

(8)重复第(3)~(7)步,直到结构达到预定的收敛条件时停止。

GESO方法是对ESO方法的有效改进。但本文研究发现,该方法仍有一定的不足,主要表现在:

(1)GESO方法多采用有限元模型下的灵敏度作为单元适应度的度量,但没有对灵敏度值作任何修正处理,优化结果易产生棋盘格现象。

(2)GESO采用变厚度法间接“删除”单元,不适用于三维连续体结构拓扑优化,且会对周围单元的灵敏度计算和结构整体的应力分析造成误差。

(3)在进化过程中会产生孤立单元或单元群,通过进化方式陆续“删除”孤立单元的做法效率不高。

(4)GESO方法中的进化原理为基本遗传算法,而基本遗传算法在解决多峰值优化问题时存在易产生早熟现象、局部寻优能力较差等缺陷,不能确保优化结构一定收敛于全局最优解。

因此,本文在GESO方法的基础上,发展了适用于拓扑优化的一种基于并行小生境比对的改进遗传算法,并将改进遗传算法与ESO方法相结合,提出了灵敏度过滤技术和单元删除的修正判据,建立了引导式单元删除策略和孤立单元判断机制,形成了一种新的改进遗传演化算法(IGEA)。

## 2 改进遗传演化算法(IGEA)

### 2.1 优化准则

本文采用刚度准则作为优化准则。

在有限元分析中,结构的静态特性由方程(4)描述:

$$Ku = P \quad (4)$$

其中, $K$ 是总刚度矩阵, $u$ 是全局节点位移向量, $P$ 是节点载荷向量。

结构的整体刚度可由结构应变能间接计算。结构应变能的定义为:

$$C = \frac{1}{2}P^T u = \frac{1}{2}u^T K u = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2}u_i^T K_i u_i \right) = \sum_{i=1}^n E_i \quad (5)$$

其中, $K_i$ 和 $u_i$ 分别为第 $i$ 个单元的刚度矩阵和位移向量, $E_i$ 为单元应变能。

同时注意到:

$$C = \frac{1}{2}P^T u = \frac{1}{2}P^T K^{-1}P \quad (6)$$

因此,在载荷向量不变的条件下,对整体结构刚度的最大化也就等效于结构应变能  $C$  的最小化<sup>[14]</sup>。如果在演化过程中不断舍去应变能小的单元,在给定重量限定下,剩余的单元将趋向于刚度最大。

方程(4)对第  $i$  个设计变量求导得:

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} u + K \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (7)$$

假设载荷不随设计变量改变,则得到:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x_i} u \quad (8)$$

代入式(6),则结构应变能的导数为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x_i} &= \frac{1}{2}P^T \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{1}{2}P^T K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x_i} u = \\ &= -\frac{1}{2}u^T \frac{\partial K}{\partial x_i} u \end{aligned} \quad (9)$$

假定设计变量发生微小变化,由  $x_i$  变为  $x_i^*$ , 利用一阶泰勒展开,结构应变能的改变量为:

$$\begin{aligned} \Delta C &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} (x_i^* - x_i) = \\ &= -\frac{1}{2}u^T \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial K}{\partial x_i} (x_i^* - x_i) \right) u \end{aligned} \quad (10)$$

根据 Chu 等人<sup>[15]</sup>的分析,对于平面应力条件下的桁架和二维连续体结构,可假设刚度矩阵是设计变量的一阶线性方程,即:

$$K(cx) = cK(x) \quad (11)$$

其中,  $c$  为任意常数。

如果从结构中删除第  $i$  个单元,利用式(10)和式(11)可以得到该单元舍去引起的结构应变能的改变为:

$$\Delta C = -\frac{1}{2}u_i^T \frac{\partial K_i}{\partial x_i} u_i (0 - 1) = \frac{1}{2}u_i^T K_i u_i = C_i \quad (12)$$

因此,定义单元敏感度系数为:

$$\alpha_i = \frac{1}{2}u_i^T K_i u_i \quad (13)$$

式(13)表示的是当删除第  $i$  个单元时结构应变能的改变量。一般地,当删除一个单元时,结构总刚度减小,其应变能  $C$  会相应增加。因此,在拓扑优化中,为使结构应变能尽可能小,最有效的方法显然是去掉具有最小  $\alpha_i$  值的单元以使  $C$  的增加量最小。

### 2.2 单元灵敏度过滤方法

为解决棋盘格现象,一种有效的方法是对单元灵敏度过滤。Bendsoe 等人<sup>[16]</sup>提出了滤波法,经过滤波法修正后,每个单元的灵敏度都取决于它自身及其周围所有

单元的加权平均值。因此,滤波法的实质是使相邻单元的灵敏度变得光滑。

本文提出的单元灵敏度过滤方法为:

(1)首先按式(13)求出每个单元的灵敏度值。

(2)定义节点灵敏度为:与该节点相连的所有单元灵敏度的算术平均值。计算出每个节点的灵敏度。

(3)定义单元修正灵敏度为:与该单元相连的所有节点灵敏度的算术平均值。

以图 1 所示的四边形 4 节点单元网格划分图为例,设  $E_i$  表示单元  $i$  的灵敏度,  $N_j$  表示节点  $j$  的灵敏度,则单元①的修正灵敏度为:

$$E_1^* = \frac{1}{4}(N_1 + N_2 + N_3 + N_4) \quad (14)$$

其中:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(E_1 + E_3 + E_4 + E_5) \\ N_2 = \frac{1}{4}(E_1 + E_5 + E_6 + E_7) \\ N_3 = \frac{1}{4}(E_1 + E_7 + E_8 + E_9) \\ N_4 = \frac{1}{4}(E_1 + E_2 + E_3 + E_9) \end{cases} \quad (15)$$

将式(15)代入式(14)可得:

$$\begin{aligned} E_1^* &= \frac{1}{4}E_1 + \frac{1}{4}(E_3 + E_5 + E_7 + E_9) + \\ &= \frac{1}{16}(E_2 + E_4 + E_6 + E_8) \end{aligned} \quad (16)$$

其余单元修正灵敏度的计算方法以此类推。

算例结果表明,该方法有效改进了低阶单元的作用,对消除拓扑优化结构中的棋盘格现象是有益的。

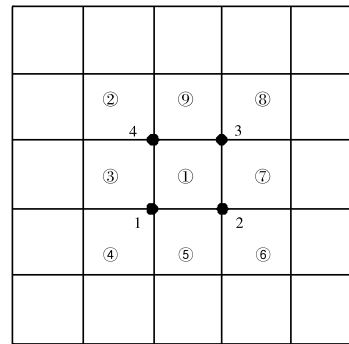


图 1 四边形 4 节点单元网格划分示意图

### 2.3 引导式单元删除策略

引导式单元删除策略在保留 GESO 方法全局概率搜索优势的基础上能引导遗传算法正确删除单元。本文研究发现,前几代删除的单元对整个结构的拓扑优化起着重要的作用。每一个删除的单元都会对其周围单

元的灵敏度造成影响,若前几代中错误地删去了某个单元,该单元附近的单元可能会在后面的进化中被牵连删除,或在最终的优化结构中形成棋盘格现象。虽然遗传算法能朝着全局最优的方向进化,但它并不能精确地保证在中间的每一代进化中都能公平地做到“优胜劣汰”。在拓扑优化中,即使有一个单元被错误地删除,都会对整个结构的拓扑优化结果造成影响。因此,本文认为,如果不对 GESO 方法的单元取舍进行适当引导,而任由遗传算法决定单元的取舍,最终得到的优化结果未必是全局最优解。

设结构的单元总数为  $NE$ 。首先定义四个参数:  $RR$ 、 $ER$ 、 $TRR$ 、 $EDControl$ ;

(1)  $RR$ : 当前代的单元删除率。第一代进化前,  $RR$  应取为一个较小的数,可取为 1%,表示单元初始删除率。

(2)  $ER$ : 进化率。  $ER$  可取为一个相对较大的数,可取为 10%。

(3)  $TRR$ : 单元总删除率,即进化完毕后单元的最大删除率。

(4)  $EDControl$ : 单元删除率的控制参数,用于决定单元删除率是否继续增加。取  $EDControl = NE \times \alpha$ ,  $\alpha$  可取为 3%。

算法执行步骤为:

(1) 每一代进化时都按单元灵敏度由大到小的顺序排列,将被删除单元的灵敏度设置为 0,并一同参与排序。第一代进化时,直接删除排名在最后的  $NE \times RR$  个单元。

(2) 第二代进化开始时,将当前代的单元删除率  $RR$  的值增加为  $RR + ER$ 。

(3) 对排名在最后的  $NE \times RR$  个单元个体作用变异、交叉算子。当代表某个单元的染色体中的基因全为 0 时,则去掉这个单元。设截至当前代共删除的单元总数为  $EDNumber$ 。

(4) 若同时满足式(17)的两个条件,则将当前代的单元删除率  $RR$  的值更改为  $RR + ER$ ; 否则继续进行第(3)步的进化操作:

$$\begin{cases} \Delta(EDNumber) = 0 & (17-a) \\ EDNumber \geq NE \times RR - EDControl & (17-b) \end{cases}$$

式(17-a)表示当前代已没有新的单元被删除;式(17-b)为引导式单元删除判别式。在当前代的单元删除率条件下,共能删除  $NE \times RR$  个单元。在标准 ESO 方法中,只有当单元删除数目达到  $NE \times RR$  时才会继续增加单元删除率进入下一代进化,而在 IGEA 方法中,只要删

除单元数达到  $NE \times RR - EDControl$  就提前增加单元删除率,扩大单元删除区域。因此将  $EDControl$  称为单元删除率的控制参数。

(5) 若  $RR < TRR$ , 则重复进行步骤(3)和(4); 若  $RR \geq TRR$ , 则令  $RR = TRR$ , 重复进行步骤(3)和(4), 当下一次  $RR > TRR$  时则进化结束。

以图 2 所示的简支板拓扑优化模型为例说明引导式单元删除策略的执行过程。

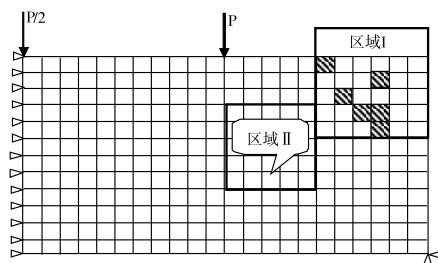


图 2 简支板拓扑优化模型

设区域 I 为当前单元删除率下排在最后的  $NE \times RR$  个单元的集合。标准 ESO 方法会将区域 I 中的单元全部删除完毕后才增加单元删除率以进入新一代进化。而 IGEA 方法则不同,设  $EDControl = 6$ , 则当区域 I 中只剩下 6 个单元未被删除时(如阴影单元所示),程序就会增加单元删除率直接进入新一代进化。设此时排名在最后的  $NE \times RR$  个单元集中在区域 I 或区域 II, 则区域 I 中未被删除的单元将与区域 II 中的单元一同参与进化。若区域 I 中的所有单元确实为结构的多余单元,则区域 I 中暂未删除的阴影单元必将在后面的进化操作中陆续被删除。这种做法能在保证优化结果可靠性的前提下提高优化效率。

需要说明的是,在单元删除率增加以前,每代的单元删除区域 I 不会是一成不变的。区域 I 中任一个多余单元的删除都会使其周围的多余单元灵敏度降低、有用单元灵敏度升高。当有用单元灵敏度升高后,下一代进化时单元灵敏度排序就会改变,排名在最后的  $NE \times RR$  个单元的集合就不再是区域 I 了。

GESO 方法设置的初始单元删除率即为  $TRR$ , 没有采用进化删除步骤,这种完全依赖遗传算法进行单元取舍的做法可能会带来个别单元的误删除,是不妥的。而 IGEA 方法引入了进化率  $ER$ , 采用逐步增大单元删除率的做法扩大单元删除范围,同时采用单元删除率控制参数  $EDControl$  引导遗传算法向着结构拓扑更优的方向进化,故称为引导式单元删除策略。

## 2.4 孤立单元(群)判断方法

IGEA 方法是直接将单元去掉,而不是采用降低单

元厚度的做法。由于 GESO 方法在进化过程中会产生孤立单元或单元群,因此必须在每代进化完毕后直接将孤立单元或单元群从结构中去掉,否则有限元计算将无法继续进行。

结构中尚保留的单元群可分为两类:有效单元群和孤立单元群。在介绍孤立单元群判断方法以前,本文首先对下面四个术语进行定义:

(1) 单元相连:若两个单元至少存在一个公共节点,则称这两个单元相连。

(2) 有效单元:当前优化结构中不可缺少的单元。

(3) 有效节点:有效单元所包含的节点为有效节点。

(4) 孤立单元:不与任何一个有效单元相连的单元称为孤立单元。

拓扑优化结构中的有效单元群和孤立单元群如图 3 所示。

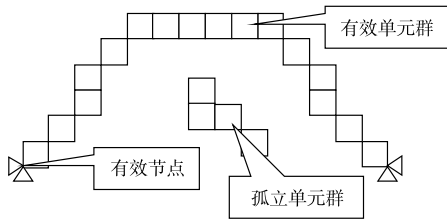


图 3 拓扑优化结构示例

根据上述定义,在结构拓扑优化中,下面五个结论是显然成立的:

(1) 所有尚存在的节点中,被施加了载荷或位移约束的节点必为有效节点。

(2) 所有尚存在的单元中,包含有效节点的单元必为有效单元。

(3) 与有效单元相连的单元仍为有效单元,所有有效单元的集合构成有效单元群。

(4) 有效单元群是一个由若干相连单元连接形成的统一整体,从一个有效单元出发可找完有效单元群内的所有有效单元。

(5) 所有不包含于有效单元群中的单元均为孤立单元。

根据上述五个结论,本文建立了孤立单元群的判断方法,其步骤如下:

(1) 在所有尚存在的节点中找到一个被施加了载荷或位移约束的有效节点。

(2) 找到一个包含了该有效节点的有效单元。

(3) 从该有效单元出发,建立一个“无序树”结构,找遍所有与有效单元相连的有效单元。

(4) 在所有尚存在的单元中找到所有不在“无序

树”中的单元,将其从结构中去掉。

在搜索有效单元群时有一个技巧:以二维平面应力问题为例。首先创建一个二维数组  $Connect[NE+1][9]$ ,  $NE$  为单元总数,  $Connect[i][0]$  为单元  $i$  是否存在的标志符,存在时为 1,不存在则为 0,  $Connect[i][1]$  到  $Connect[i][8]$  存储与单元  $i$  直接连接的所有单元,最多为 8 个,不足 8 个则用 0 填充。有限元模型一旦确定,就应立即确定  $Connect$  数组中与各个单元直接相连的所有单元。每次搜索有效单元群时只需以  $Connect$  数组为依据即可。

## 2.5 采用改进遗传算法对单元进行筛选

GESO 方法采用基本遗传算法进行进化操作,而本文将采用改进遗传算法对这一过程进行改进。

### 2.5.1 采用并行小生境算法确定待删除单元

设置  $n$  个小生境对同一拓扑模型进行独立并行优化。各自进化完毕后,选取所有小生境共同删除的单元作为结构确定删除的单元,其余单元待定。这样能避免单元被错误删除,提高优化结果的质量。本文设置  $n=2$ 。

### 2.5.2 进化结束后采用局部搜索方法微调优化结构

各小生境进化结束后,结构确定的单元实际删除率是小于预设的单元总删除率  $TRR$  的,这时将根据预设的单元总删除率  $TRR$  和结构最大应力的容许突变率  $\alpha$  两个指标进行优化结构的微调,其微调步骤如下:

(1) 计算结构中尚存在的各单元的修正灵敏度,删除灵敏度最小的一个单元,统计截至当前代共删除的单元总数  $EDNumber$ ,并计算此时结构的最大应力,记作  $\sigma_{max}$ 。

(2) 判断式(18)是否成立,若成立,则继续进行第(1)步的步骤,若不成立则终止进化,并以上一代的优化结果作为最终优化结果:

$$\begin{cases} EDNumber \leq NE \times TRR & (18-a) \\ \frac{\Delta\sigma_{max}}{\sigma_{0max}} \leq \alpha & (18-b) \end{cases}$$

其中,  $NE$  为初始结构的单元总数,  $\sigma_{0max}$  为初始结构的最大应力。式(18-a)表示单元的实际总删除率不能超过预设的最大删除率;式(18-b)表示结构的最大应力突变率不能超过容许值。文献[17]研究发现,在拓扑优化过程中,结构的最大应力是缓慢上升的,且上升幅度很小,但是在当单元删除率突破某个值时,结构的最大应力会有突然的增加,这就意味着结构中已删去了不应删去的材料,所以式(18-b)就是为了确保结构删除的都是多余单元。

### 2.6 IGEA 方法程序实现步骤

本文以 VC++ 作为编程平台,实现了集改进遗传算法、有限元、IGEA 方法于一体的拓扑优化程序设计。

本文采用 IGEA 方法实现拓扑优化的总体步骤为:

(1) 设置  $n$  个小生境对同一拓扑模型进行独立并行优化。各自进化完毕后,仅删除所有小生境共同删除的单元。

(2) 计算结构中尚存在的各单元的修正灵敏度,删除灵敏度最小的一个单元。统计截至当前代共删除的单元总数,并计算此时结构的最大应力。

(3) 判断式(18)是否成立,若成立则回到第(2)步;反之则终止进化,并以上一代的优化结果作为最终优化结果。

单个小生境执行 IGEA 方法的具体实现步骤为:

(1) 确定所有进化参数,建立有限元模型,并将各单元的各位二进制编码初始化为 1。

(2) 对结构进行有限元分析,计算各个单元的修正灵敏度,并按单元修正灵敏度大小顺序排序。被删除单元的灵敏度一律设置为 0,并一同参与排序。

(3) 若为第一代进化,则直接删除排在最后的  $NE \times RR$  个单元;否则就对排在最后的  $NE \times RR$  个单元作用变异、交叉算子。作用变异算子时,只将染色体中不为 0 的基因变为 0。

(4) 如果代表某个单元的染色体中的基因全为 0,则去掉这个单元。

(5) 判断并删除结构中的孤立单元群,并统计截至该代进化一共删除的单元总数。

(6) 判断式(17)是否满足,若满足则将当前代的单元删除率  $RR$  的值更改为  $RR + ER$ ;否则继续进行第(2)~(5)步的进化操作。

(7) 若  $RR < TRR$ ,则重复进行步骤(2)~(5);若  $RR \geq TRR$ ,则令  $RR = TRR$ ,重复进行步骤(2)~(5),当下一次  $RR > TRR$  时则进化结束。

单个小生境的 IGEA 方法流程图如图 4 所示。

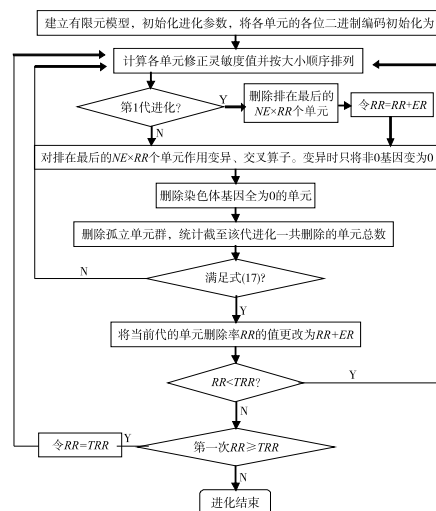


图 4 单个小生境的 IGEA 方法程序流程图

最终区域)。设计区域分为  $60 \times 25$  的 4 节点平面应力单元。假设材料弹性模量  $E = 206 \text{ GPa}$ ,泊松比  $\nu = 0.283$ ,板的厚度为  $100 \text{ mm}$ ,垂直载荷  $F = 10 \text{ kN}$ 。

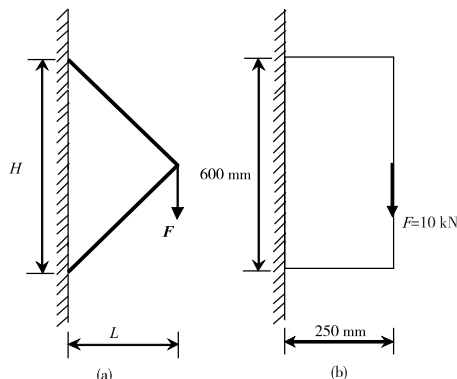


图 5 二杆桁架模型拓扑优化解析解及初始设计区域

这里以单元的 Von Mises 应力准则进行优化,取交叉概率  $P_c = 0.4$ ,变异概率  $P_m = 0.6$ ,单元初始删除率  $RR = 1\%$ ,进化率  $ER = 10\%$ ,控制参数  $EDControl = 20$ 。图 6 显示的是体积删除率分别为 80% 和 90% 时的结构剩余形状。进化完毕后,总的进化代数为 2053 代。

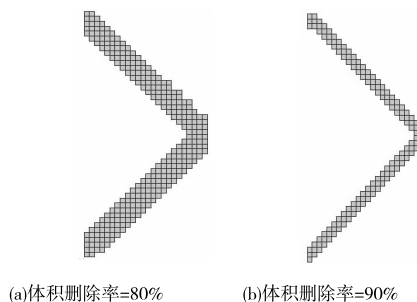


图 6 二杆桁架模型的 IGEA 解

从图 6(b) 的最终优化结构看,优化结果符合拓扑

## 3 算例分析

### 3.1 二杆桁架应力优化

结构应力优化中的一个经典实例即为如图 5(a) 所示的承受单个载荷  $F$  的二杆桁架<sup>[18]</sup>。对于载荷  $F$  和水平方向长度  $L$  固定不变的情况下,如果假定桁架为铰连接方式,分析可得最佳高度  $H = 2L$ 。

采用如图 5(b) 所示的矩形设计区域,它的尺寸为  $600 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}$ (比  $2L \times L$  稍大一点,足以覆盖设计的

优化解析解,且自然满足  $H = 2L$ 。在结构优化过程中,二杆桁架尽管有体积的大量减少,但结构的最大 Von Mises 应力仅仅由初始时的 24.8 MPa 增大到 25.9 MPa,增长率仅为 4.4%。这就验证了 IGEA 方法的可靠性。

### 3.2 短悬臂梁刚度优化

如图 7 所示一短悬臂梁处于平面应力状态,左端固定。梁的尺寸为  $L = 160 \text{ mm}$ ,  $H = 100 \text{ mm}$ ,厚度  $t = 1 \text{ mm}$ ,作用在自由端中点 A 处的垂直载荷  $F = 3000 \text{ N}$ 。材料弹性模量  $E = 206 \text{ GPa}$ ,泊松比  $\nu = 0.283$ 。用有限元网格将初始设计区域分为  $64 \times 40$  的四边形 4 节点平面应力单元。用与 3.1 节中同样的进化参数对结构进行优化。进化完毕时一共进化了 1767 代。

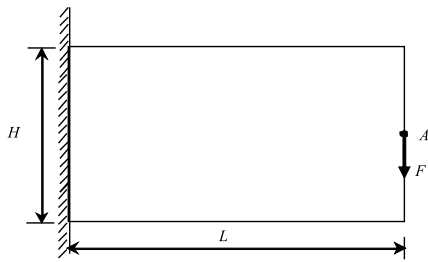


图 7 短悬臂梁结构初始设计区域

图 8 为 IGEA 优化结果和普通 ESO 采用四边形 4 节点单元(不修正灵敏度)<sup>[17]</sup>时的计算结果。

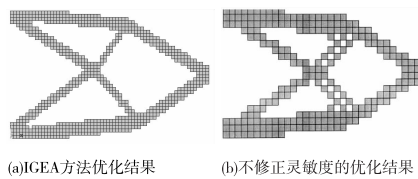


图 8 拓扑优化结果比较

从优化结果中看,本文优化结果和普通 ESO 方法优化结果是一致的。但由于普通 ESO 方法没有对四边形 4 节点单元的灵敏度进行修正,因此结构中出现了大量的棋盘格现象。IGEA 方法虽然仍采用四边形 4 节点单元对结构进行优化,但优化结果很好地保持了结构的连续性。这就验证了 IGEA 方法中灵敏度修正方法的有效性。

### 3.3 Michell 型结构刚度优化

1904 年,Michell 采用精确解法得到了最小质量的桁架解及它的一般理论,Cox 于 1965 年证明了 Michell 结构同时也是最小柔度设计<sup>[19]</sup>。图 9(a) 所示的桁架结构是一种 Michell 结构,它是两端铰支,底部中间作用一垂直载荷的最小质量桁架结构。从一个连续模型出发,进化方法能否产生一个类似于 Michell 解的结构是拓扑优化领域的一大挑战。

图 9(b) 所示的尺寸为  $2H \times H$  ( $H = 100 \text{ mm}$ )。其设计区域分为  $100 \times 50$  个四边形平面应力单元(由于对称性,仅仅需要分析模型的一半即可),铰支座设在底部左右两个角点。假设材料弹性模量  $E = 207 \text{ GPa}$ ,泊松比  $\nu = 0.3$ ,板的厚度为  $5 \text{ mm}$ ,垂直载荷  $F = 10 \text{ kN}$ 。

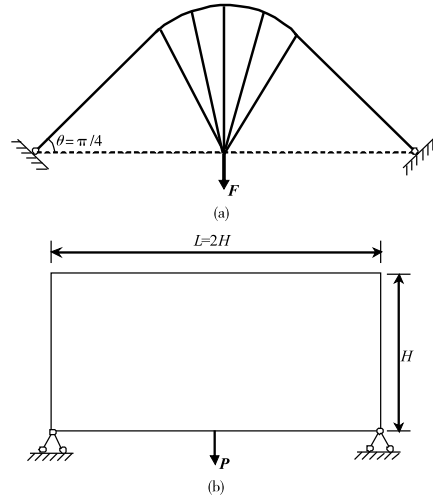


图 9 铰支 Michell 型拓扑优化解析解及初始设计区域

取交叉概率  $P_c = 0.04$ ,变异概率  $P_m = 0.06$ ,单元初始删除率  $RR = 1\%$ ,进化率  $ER = 10\%$ ,控制参数  $EDControl = 50$ 。本文采用四边形 4 节点单元修正灵敏度方法进行计算。进化完毕时一共计算了 1889 代。图 10 所示的是当单元总删除率  $TRR$  分别为 60% 和 70% 时的优化结果。由于计算时只对模型的一半进行分析,因此仅显示结构右半部分的优化结果。

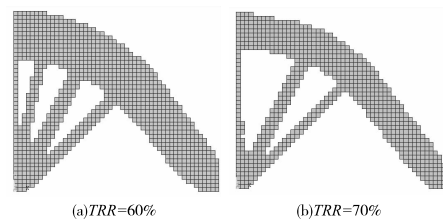


图 10 IGEA 方法优化结果

为方便进行对照,图 11 分别显示的是 ESO 方法、BESO 方法<sup>[10]</sup>、四边形 8 节点单元 GESO 方法的优化结果。

从图 10 和图 11 中可以看出,ESO 方法和 BESO 方法均不能得到完整的 Michell 解。虽然 IGEA 和 GESO 方法均能得到与 Michell 解完全相同的结构,但图 11(c) 的 GESO 方法采用的是四边形 8 节点单元进行分析,计算 1 代的时间约为 105 秒(仍只分析模型的一半),而 IGEA 方法计算 1 代的时间仅为 16 秒,且优化结果中没有出现棋盘格式。这就进一步验证了 IGEA 方法的可靠



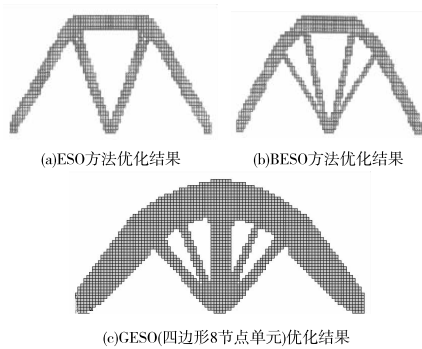


图 11 ESO、BESO、GESO 方法  
(四边形 8 节点单元)优化结果

性和高效性。

#### 4 结 论

(1)对基本遗传算法进行改进,采用并行小生境比对法进行拓扑优化,能减小单元被错误删除的概率,提高优化结果的质量。

(2)采用灵敏度过滤技术对四边形 4 节点单元的灵敏度进行修正,能有效解决“四边形 4 节点单元易产生棋盘格现象”的缺陷,其拓扑优化效果不仅能达到四边形 8 节点单元的效果,而且显著提高了优化效率。

(3)采用式(18)作为单元删除的修正判据,能确保结构删除的都是多余单元,避免有用单元被错误地删除,提高拓扑优化结果的可靠性。

(4)采用式(17)的引导式单元删除策略,并引入孤立单元判断机制,能引导遗传算法向着结构拓扑全局更优的方向进化,能有效解决“ESO 方法和基本遗传算法易陷入局部最优解”的缺陷。

(5)本文提出的 IGEA 方法对平面连续体结构拓扑优化具有普适性,且能推广至三维连续体结构的拓扑优化。

#### 参 考 文 献:

- [1] FERNANDES W S,ALMEIDA V S,NEVES F A,et al. Topology optimization applied to 2D elasticity problems considering the geometrical nonlinearity[J]. Engineering Structures,2015,100(1):116-127.
- [2] HASSANI B,HINTON E.A review of homogenization and topology optimization I:homogenization theory for media with periodic structure[J]. Computers & Structures,1998,54(6):707-717.
- [3] 赖云山,马海涛.基于变厚度杂交元的二维连续体结

构拓扑优化[J].科学技术与工程,2012,12(6):1352-1354.

- [4] GEA H C.Topology Optimization:A new microstructure-based design domain method[J]. Computers & Structures,1996,61(5):781-788.
- [5] XIE Y M,STEVEN G P.A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Computers & Structures,1993,49(5):885-896.
- [6] XIE Y M,STEVEN G P.Evolutionary structural optimization[M].Berlin:Springer-Verlag,1997.
- [7] GUILLAUME P H,IDRIS K S.The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem[J]. SIAM J. Control Optim,2002,41(4):1042-1072.
- [8] YANG X Y.Bi-directional evolutionary method for stiffness and displacement optimization[D].Melbourne,Australia:Victoria University of Technology,1999.
- [9] SHOBEIRI V. The topology optimization design for cracked structures[J].Engineering Analysis with Boundary Elements,2015,58(9):26-38.
- [10] 龙凯,陈广华.基于物质点描述的双向渐进式拓扑优化方法[J].工程力学,2012,29(8):308-318.
- [11] 易伟建,刘霞.遗传演化结构优化算法[J].工程力学,2004,21(3):66-71.
- [12] 苏文政.结构最大刚度拓扑优化的隐式方法[J].科学技术与工程,2015,15(1):138-140.
- [13] STEVEN G,QUERIN O,XIE M.Evolutionary structural optimisation (ESO) for combined topology and size optimisation of discrete structures[J].Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,2000,188(4):743-754.
- [14] LIU X,YI W J.Genetic evolutionary structural optimization [J].Computer & Structures,2008,64(3):305-311.
- [15] CHU D N,XIE Y M,HIRA A,et al.Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints [J].Finite Elements in Analysis and Design,1996,21(4):239-251.
- [16] BENDSOE M P,SIGMUND O.Topology optimization: theory,methods and applications[M].New York:Spring-

- er,2003. 优化方法[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2014,35(4):443-447.
- [17] 李湘沅. 基于 ANSYS 平台的连续体结构拓扑优化方法研究[D]. 上海:同济大学,2007. [19] COX H L. The design of structures of least weight[M]. Oxford:Pergamon Press,1965.
- [18] 李霞,周克民. 采用类桁架连续体的桁架结构拓扑

## Improved Genetic Evolutionary Algorithm for Structural Topology Optimization

XIAO Yuguo<sup>1</sup>, SHENG Ying<sup>1</sup>, ZENG Lingxi<sup>2</sup>

- (1. College of Architecture and Environment, Sichuan University, Chengdu 610065, China;  
2. Risk Management Institute, National University of Singapore, Singapore 119077, Singapore)

**Abstract:** Topology optimization is the hot and difficult research topic in structure optimization. The evolutionary structural optimization (ESO) and genetic evolutionary structural optimization (GESO) are both topology optimization methods proposed in recent years, and can be used to search for optimal topology and guide conceptual design of structure. However, both of the methods have many disadvantages, thus have limitations in engineering applications. In accordance with the disadvantages of ESO and GESO, an improved genetic evolutionary algorithm (IGEA) by using improved genetic algorithm (GA) and ESO was proposed in this paper and could be applied in structural topology optimization effectively. Many improvements such as parallel niches comparison method, filtering technology of element sensitivity, the modified criterion and guiding strategy of element deletion and judgment mechanism of isolated elements were proposed in the new algorithm. With the programming platform of VC++ , the topology optimization program of the improved GA, finite element method and IGEA was completed. The numerical examples show that the proposed IGEA method is better than ESO and GESO methods.

**Key words:** topology optimization; improved genetic evolutionary algorithm; filtering of sensitivity; guiding of element deletion; judgment of isolated element