

S - 亚紧空间

张焰杰, 吴昭鑫, 杨思鑫

(成都理工大学管理科学学院, 成都 610059)

摘 要:文章引入了 S - 亚紧空间, 并且获得 3 个主要结果: (1) 如果 (X, \mathcal{F}) 是一个 S - 亚紧的 T_2 空间, 则对 X 中的任意一个闭集 A 和不属于 A 的任一点 x , 存在 $U \in \mathcal{F}, V \in SO(X, \mathcal{F})$ 使 $x \in U, A \subseteq V$ 且 $U \cap V = \emptyset$ 。(2) 如果 (X, \mathcal{F}^α) 是 S - 亚紧的, 则 (X, \mathcal{F}) 是 S - 亚紧的。(3) (X, \mathcal{F}) 是一个极不连通的 T_2 空间, 则 (X, \mathcal{F}) 是 S - 亚紧的当且仅当 X 的每个开覆盖 \mathcal{U} 有一个点有限的正则闭加细 $\mathcal{V}; V \in RC(X, \mathcal{F})$ 。

关键词:半开集; 极不连通; S - 亚紧; α - 集

中图分类号: O189.11

文献标志码: A

S - 仿紧空间的概念是由 K. Y. AL - ZOUBI 提出^[1], 文章在此基础上定义了 S - 亚紧空间, 并对 S - 亚紧空间的性质做了初步的探讨, S - 亚紧空间是对亚紧空间进一步拓展, 即亚紧空间一定是 S - 亚紧空间, 反之则不一定成立。

1 预备知识

本文简称拓扑空间为空间, $int(A)$ 、 $cl(A)$ 和 $scl(A)$ 分别表示集 A 的内部、闭包和半闭包。

定义 1^[1] (X, \mathcal{F}) 是一个拓扑空间, 集合 A 是 X 的子集, 集合 A 称为半开集, 如果在 X 中存在开集 U 使得 $U \subseteq A \subseteq cl(U)$ 或 $A \subseteq cl(int(A))$ 半闭集, 即半开集的余集。集合 A 的半闭包, 即包含 A 的最小的半闭集, 用 $scl(A)$ 表示。集合 A 称为正则开(正则闭, 预开启), 如果 $A = int(cl(A))$ ($A = cl(int(A))$, $A \subseteq int(cl(A))$), 用 $SO(X, \mathcal{F})$ 、 $RO(X, \mathcal{F})$ 、 $RC(X, \mathcal{F})$ 和 $PO(X, \mathcal{F})$ 分别表示由 (X, \mathcal{F}) 中所有的半开集、正则开、正则闭和预开启的子集构成的集族。

定义 2 空间 X 称为是 S - 亚紧的, 如果 X 的每一个开覆盖都有一个点有限的半开加细覆盖。

定义 3^[2] 空间 (X, \mathcal{F}) 称为极不连通的, 如果空间 (X, \mathcal{F}) 中每个开集的闭包在 (X, \mathcal{F}) 中仍然是开集。

定义 4^[3] (X, \mathcal{F}) 中的子集 A 称为 α - 集, 如果 $A \subseteq int(cl(int(A)))$ 。

定义 5^[3] 用 \mathcal{F}^α 表示由 (X, \mathcal{F}) 中所有 α - 集构成的集族, 若它形成 X 的一个拓扑, 则有 $T \subseteq \mathcal{F}^\alpha \subseteq SO(X, \mathcal{F}) = SO(X, \mathcal{F}^\alpha)$ 。

引理 1^[3] 若 A 是空间 (X, \mathcal{F}) 中的一个开集, 则对任意的 $V \in SO(X, \mathcal{F})$ 有 $A \cap V \in SO(X, \mathcal{F})$ 。

引理 2^[4] $\mathcal{F} = \{F_\alpha, \alpha \in I\}$ 是空间 (X, \mathcal{F}) 的一个集族, 则集族 \mathcal{F} 是点有限的当且仅当 $\{scl(F_\alpha), \alpha \in I\}$ 是点有限的。

证明 显然成立。

引理 3^[3] 若空间 (X, \mathcal{F}) 是极不连通的, 则对每一个 $U \in SO(X, \mathcal{F})$ 有 $scl(U) = cl(U)$ 。

收稿日期: 2013-09-30

基金项目: 安徽省高等学校省级优秀青年人才基金项目(2010SQRL158)

作者简介: 张焰杰(1988-), 男, 河南安阳人, 硕士生, 主要从事拓扑学方面的研究, (E-mail) 1036961343@qq.com

2 主要结论

定理 1 如果 (X, \mathcal{T}) 是一个 S - 亚紧的 T_2 空间, 则对 X 中的任意一个闭集 A 和不属于 A 的任一点 x , 存在 $U \in \mathcal{T}, V \in SO(X, \mathcal{T})$ 使 $x \in U, A \subseteq V$ 且 $U \cap V = \emptyset$, 即对 X 的每个包含 x 的开集 U , 存在开集 V 使得 $x \in V \subseteq scl(V) \subseteq U$.

证明 对于任意的 $y \in A$, 存在 $W_y, Y \in W_y, x \notin cl(W_y)$. 故集族 $\mathcal{W} = \{W_y: Y \in A\} \cup \{X - A\}$ 是 X 的一个覆盖, 那么它存在一个点有限的半开加细覆盖 \mathcal{H} , 令 $V = \cup \{H \in \mathcal{H}: Y \in H\}$, 那么 V 是一个包含 A 的半开集, 由 $cl(V) = cl(\cup \{H \in \mathcal{H}: Y \in H\})$ 知道 $U = X - cl(V)$ 是一个包含 x 的开集且 $U \cap V = \emptyset$.

推论 1 每个 S - 亚紧 T_2 空间是半正则的, 即 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_S$.

证明 对于任意的 $U \in \mathcal{T}$, 由定理 1 知存在开集 V , 使 $V \subseteq scl(V) \subseteq U$, 又 $V \subseteq int(cl(V))$ 推出 $V \in PO(X, \mathcal{T})$, 推出 $scl(V) = int(cl(V))$, 即 $V \subseteq int(cl(V)) \subseteq U$, 由于 $int(cl(V))$ 构成的集族是空间 X 的一个基, 所以 X 是半正则的.

推论 2 每个极不连通的 S - 亚紧 T_2 空间是正则的.

证明 $\forall x \in X$ 和 x 的任意开邻域存在开集 V 使 $x \in V \subseteq scl(V) \subseteq U$, 由 (X, \mathcal{T}) 是极不连通的, 所以 $scl(V) = cl(V)$ 即 $x \in V \subseteq cl(V) \subseteq U$, 从而 X 是正则的.

定理 2 每个极不连通的 S - 亚紧 T_2 空间是亚紧的.

证明 \mathcal{U} 是 X 的一个开覆盖, 由推论 2 知任意的 $x \in X$, 存在 $U_x \in \mathcal{U}, V_x \in \mathcal{T}$ 使得 $x \in V_x \subseteq cl(V_x) \subseteq U_x$, 则 $\mathcal{V} = \{V_x: x \in X\}$ 是 X 的一个开覆盖, 从而 \mathcal{V} 存在一个点有限的半开加细覆盖, $\mathcal{W} = \{W_\beta: \beta \in B\}$ 对于任意的 $\beta \in B$ 存在开集 H_β 使得 $H_\beta \subseteq W_\beta \subseteq cl(H_\beta)$, 那么对于任意的 $\beta \in B$ 存在 $V_x \in \mathcal{V}$ 使得 $cl(H_\beta) = scl(H_\beta) = cl(W_\beta) \subseteq cl(V_x) \subseteq U_x$, 由引理 2 知 $\mathcal{W} = \{W_\beta: \beta \in B\}$ 是点有限的, 当且仅当 $\mathcal{W} = \{scl(W_\beta): \beta \in B\}$ 是点有限的, 从而 $\mathcal{W} = \{cl(W_\beta): \beta \in B\}$ 是点有限的, 那么集族 $\mathcal{H} = \{cl(H_\beta): \beta \in B\}$ 是点有限的, 故 \mathcal{H} 是 \mathcal{U} 的一个点有限的开加细覆

盖.

定理 3 如果 (X, \mathcal{T}^α) 是 S - 亚紧的, 则 (X, \mathcal{T}) 是 S - 亚紧的.

证明 设 U 是 (X, \mathcal{T}) 的一个开覆盖, 由于 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^\alpha$, 所以 \mathcal{U} 是 (X, \mathcal{T}^α) 的一个开覆盖, 从而 \mathcal{U} 在 (X, \mathcal{T}^α) 中存在一个点有限的半开加细 \mathcal{V} , 由于 $SO(X, \mathcal{T}) = SO(X, \mathcal{T}^\alpha)$, 显然 \mathcal{V} 在 (X, \mathcal{T}) 中也是点有限的, 所以 (X, \mathcal{T}) 是 S - 亚紧的.

定理 4 (X, \mathcal{T}) 是极不连通的空间, 若 (X, \mathcal{T}_{S_0}) 是 S - 亚紧的, 则 (X, \mathcal{T}) 是 S - 亚紧的.

证明 由于 (X, \mathcal{T}) 是极不连通的, $SO(X, \mathcal{T}) \subseteq PO(X, \mathcal{T})$ [5], 知 $\mathcal{T}^\alpha = SO(X, \mathcal{T}) \cap PO(X, \mathcal{T}) = SO(X, \mathcal{T}) = \mathcal{T}_{S_0}$ [6], 由定理 3 知 (X, \mathcal{T}) 是 S - 亚紧的.

定理 5 (X, \mathcal{T}) 是 T_2 空间, 则有 (X, \mathcal{T}) 是 S - 亚紧的, 当且仅当 X 的每一个开覆盖都有点有限的半闭加细 $\mathcal{V}(V \in SC(X, \mathcal{T}), \text{任意 } V \in \mathcal{V})$.

证明 必要性: 设 \mathcal{U} 是 X 的任一个开覆盖, 对于任意的 $x \in X$, 存在 $U_x \in \mathcal{U}$, 且 $x \in U_x$, 由定理 1 知存在 $V_x \in \mathcal{T}$ 使得 $x \in V_x \subseteq scl(V_x)$, 因此 $\{V_x: x \in X\}$ 是 X 的一个开覆盖. 则它存在一个点有限的半开加细 $\mathcal{W} = \{W_\beta: \beta \in B\}$, 令 $scl(\mathcal{W}) = \{scl(W_\beta): \beta \in B\}$, 显然 $scl(\mathcal{W})$ 是一个点有限的半闭集族, 且对任意的 $\beta \in B$ 有 $scl(W_\beta) \subseteq scl(V_x) \subseteq U_x$, 所以 $scl(\mathcal{W})$ 是 \mathcal{U} 的一个半闭加细 [7].

充分性: \mathcal{U} 是 X 的一个开覆盖, \mathcal{V} 是 \mathcal{U} 的一个点有限的半闭加细, 若 \mathcal{V} 中仅含一个元素 V , 则 $V = X$, 显然 \mathcal{V} 是 \mathcal{U} 的一个点有限的半开加细; 若 \mathcal{V} 中含有多个元素, 令 $V' = X - V, V \in \mathcal{V}$, 则 $\{V': V \in \mathcal{V}\}$ 是 X 的一个半开覆盖, 任意的 $V \in \mathcal{V}$ 都存在 $U_V \in \mathcal{U}$ 使得 $V \subseteq U_V$, 由引理 1 知 $\{U_V \cap V': V \in \mathcal{V}\}$ 是 \mathcal{U} 的一个点有限的半开加细.

定理 6 [8] (X, \mathcal{T}) 是一个极不连通的 T_2 空间, 则 (X, \mathcal{T}) 是 S - 亚紧的, 当且仅当 X 的每个开覆盖 \mathcal{U} 有一个点有限的正则闭加细 $\mathcal{V}(V \in RC(X, \mathcal{T}))$.

证明 充分性: 对任意的 $V \in RC(X, \mathcal{T})$ 显然 $int(V) \subseteq V = cl(int(V))$, 从而 $V \in SO(X, \mathcal{T})$, 所以 X 的每个开覆盖 \mathcal{U} 有一个点有限的半开加细 \mathcal{V} .

必要性: 设 \mathcal{U} 是 X 的任一开覆盖, 则对任意的 $x \in X$ 和任意的 $U_x \in \mathcal{U}$, 由推论 2 知存在 X 的一个开邻域 V 使

得 $x \in V_x \subseteq cl(V_x) \subseteq U_x$, 因此 $\{V_x : x \in X\}$ 是 X 的一个开覆盖, 则它存在一个点有限的半开加细 $\mathcal{W} = \{W_\beta : \beta \in B\}$, 由引理 2 知 $\{scl(W_\beta) : \beta \in B\}$ 是点有限的, 又 (X, \mathcal{T}) 是极不连通的, 故 $\{cl(W_\beta) : \beta \in B\}$ 是点有限的, 又 $W_\beta \subseteq V_x$, 知 $cl(W_\beta) \subseteq cl(V_x) \subseteq U_x$, 所以 $\mathcal{W}' = \{cl(W_\beta) : \beta \in B\}$ 点有限加细 \mathcal{U} , 又由于 $W_\beta \in SO(X, \mathcal{T})$, 所以 $cl(W_\beta) \in RC(X, \mathcal{T})$, 故 $\mathcal{W}' = \{cl(W_\beta) : \beta \in B\}$ 是 \mathcal{U} 的一个点有限的正则闭加细覆盖。

参考文献:

- [1] Levine N. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces [J]. Amer. Math. Monthly, 1963, 70: 36-41.
- [2] Noiri T. Properties of S-closed spaces [J]. Acta Math. Hungar., 1980, 35: 431-436.
- [3] Al-Zoubi K Y. s-paracompact [J]. Acta Math. Hungar., 2006, 110: 165-174.
- [4] Al-Zoubi K Y. s-expandable spaces [J]. Acta Math. Hungar., 2004, 102: 203-212.
- [5] Jankovic D S. A note on mappings of extremally disconnected spaces [J]. Acta Math. Hungar., 1985, 46: 83-92.
- [6] Reilly I L, Vamanamurthy M K. On α -continuity in topological spaces [J]. Acta Math. Hungar., 1985, 45: 27-32.
- [7] 高国士. 拓扑空间论 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [8] 赵树魁. 亚强和亚弱仿紧空间的一些性质 [J]. 吉林化工学院学报, 2012(4): 80-83.

S-weak Paracompact Spaces

ZHANG Yanjie, WU Zhaoxin, YANG Sixin

(College of Management Science, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract: The notion of S-weak paracompact is introduced and the following results are mainly proved: (1) If (X, \mathcal{T}) is a S-weak paracompact T_2 -space, then for every closed subset A of X and $x \notin A$, there exist $U \in \mathcal{T}$ and $V \in SO(X, \mathcal{T})$ such that $x \in U$, $A \in V$ and $U \cap V = \emptyset$; (2) If (X, \mathcal{T}^α) is S-weak paracompact then (X, \mathcal{T}) is S-weak paracompact; (3) Let (X, \mathcal{T}) be an extremely disconnected T_2 -space. Then (X, \mathcal{T}) is S-weak paracompact if and only if each open cover \mathcal{U} of X has a locally finite regular-closed refinement \mathcal{V} , $V \in RC(X, \mathcal{T})$

Key words: semi-open sets; extremely disconnected; S-weak paracompact; α -sets