

局部 Lipschitz 连续函数差的刻画

王娇娇, 李 军

(西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充 637009)

摘 要:在 Banach 空间中利用广义方向导数和 Clarke 次微分的定义, 指出两个局部 Lipschitz 连续函数差与 Clarke 次微分之间的关系。在此基础上, 指出如果两个局部 Lipschitz 连续函数 $f, g: X \rightarrow R$ 是 Clarke 正则的, 那么结果退化到经典意义下 ε 次微分与局部 Lipschitz 连续函数差的关系, 并指出了当函数 h 是可微偶凸函数时, 在定理 1 的条件下两个局部 Lipschitz 连续函数的 Clarke 次微分之间的关系, 最后指出当两个局部 Lipschitz 连续函数差为常数时, 两个函数的 Clarke 次微分之间的关系。

关键词:Lipschitz 连续函数; Clarke 次微分; Clarke 次梯度; Clarke 正则

中图分类号:O224

文献标志码:A

引 言

凸分析理论中, 次微分作为微分的广义概念, 在讨论最优化条件上扮演着重要角色。例如, x_0 为凸函数 f 在闭凸集 A 上的全局最小点当且仅当 $0 \in \partial f(x) + N_A(x_0)$ 。在二十世纪六十年代, Banach 空间上的真凸下半连续函数 f 的积分理论^[1-2] 也通过 Fenchel 次微分算子解决: $\partial f(x) \subset \partial g(x), \forall x \in X \Leftrightarrow f = g + C$, 其中 C 为常数, 这一结果在不同的研究中被广泛的应用。微积分和线性算子理论也被扩展到许多经典的结果中^[3-4]。

在 R 空间中, 考虑函数 $f(x) = -|x|$ (f 是 Lipschitz 连续的), 易知在每一点的次微分都是空集, 这就需要引出非光滑分析中的重要工具 Clarke 次微分。在文献[5]中, 非光滑现象在数学和最优化理论中出现是自然并且频繁的, 作为文献[5]中重要工具, 讨论和研究 Clarke 次微分是十分必要的。

在文献[6]中, 利用凸函数差的 Lipschitz 性质研究

函数的微分性质, 指出了凸函数差的 Lipschitz 性质与次微分之间的关系, 并进一步推广到与 ε 次微分之间的关系。如函数 f, g 在 D 上为下半连续凸函数, 满足: 对所有的 $x, y \in D, f(x) - g(x) \leq f(y) - g(y) + h(x - y)$, 那么, 对每一个 $x \in D, \forall \varepsilon > 0, \varphi \neq \partial_a f(x) \subset \partial_\varepsilon g(x) + \partial_\varepsilon h(\theta)$ 成立。该思想也体现在文献[7]中。

本文在文献[6]的基础上进行探讨, 利用该思想, 指出两个局部 Lipschitz 连续函数差与 Clarke 次微分之间的关系。

1 预备知识

本文空间 X 为 Banach 空间, 并记 X^* 为 X 的对偶空间, 设 $f, g: X \rightarrow R$ 局部 Lipschitz 连续函数, 记 θ 为零向量。

定义 1 正常凸函数 $f: X \rightarrow R$ 在点 x 处沿方向 d 的方向导数定义:

$$f'(x; d) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}$$

收稿日期:2013-09-23

基金项目:国家自然科学基金项目(11371015);教育部科学技术重点项目(211163);四川青年科技基金项目(2012JQ0032)

作者简介:王娇娇(1989-)女,四川成都人,硕士生,主要从事运筹学与控制论方面的研究,(E-mail) jiaojiaowang0221@163.com

定义 2 设 $f: X \rightarrow R$ 局部 Lipschitz 连续函数, 则函数 f 在点 x 处沿方向 d 的广义方向导数定义:

$$f^\circ(x; d) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + td) - f(y)}{t}$$

定义 3 设 $f: X \rightarrow R$ 正常凸函数, 称满足 $f(y) - f(x) \geq \langle \xi, y - x \rangle, y \in X$ 的向量 $\xi \in X^*$ 为凸函数 f 在 x 处的次梯度, 并称 f 在 x 处的次梯度的全体构成的集合为次微分, 记做 $\partial f(x)$ 。

定义 4 设 $f: X \rightarrow R$ 局部 Lipschitz 连续函数, 称满足 $f^\circ(x; d) \geq \langle \xi, d \rangle, d \in X$ 的向量 $\xi \in X^*$ 为函数 f 在 x 处的次梯度, 并称 f 在 x 处的次梯度的全体构成的集合为 Clarke 次微分, 记做 $\partial^\circ f(x)$ 。

定义 5 设 $f: X \rightarrow R$ 局部 Lipschitz 连续函数, 若 f 在点 x 处存在方向导数, 并且对所有的 $d \in X$ 均有 $f^\circ(x; d) = f'(x; d)$ 成立, 则称 f 在 x 处 Clarke 正则, 若 f 在 X 上每一点都是 Clarke 正则的, 则称 f 是 Clarke 正则的。

2 主要结果

定理 1 设 $f, g: X \rightarrow R$ 局部 Lipschitz 连续函数, $h: X \rightarrow R$ 可微凸函数, 并且 $h(\theta) = 0$, 有结论: (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)。

(1) 对所有的 $x, y \in X$, 满足

$$f(x) - g(x) \leq f(y) - g(y) - h(x - y)$$

(2) 对每一个 $x \in X$, 有

$$\varphi \neq \partial^\circ f(x) \subset \partial^\circ g(x) - \partial h(\theta)$$

(3) 对每一个 $x \in X$, 有

$$\partial^\circ f(x) \cap (\partial^\circ g(x) - \partial h(\theta)) \neq \varphi$$

证明 (1) \Rightarrow (2) 因为 f 为局部 Lipschitz 连续函数, 由文献[8]定理 2.59 知 $\partial^\circ f(x) \neq \varphi$, 由定理 1 的条件 (1) 可得 $f(x) - f(y) \leq g(x) - g(y) - h(x - y)$, 任取 $x \in X$, 令 $x = y + td$ (其中 $t \in R, t > 0$), 则有

$$f(y + td) - f(y) \leq g(y + td) - g(y) - h(y + td - y)$$

在不等式两边同时除以 t , 则

$$\frac{f(y + td) - f(y)}{t} \leq \frac{g(y + td) - g(y)}{t} - \frac{h(td)}{t}$$

在不等式两边同时取上极限, 那么

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + td) - f(y)}{t} \leq$$

$\limsup_{t \downarrow 0}$

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{g(y + td) - g(y)}{t} + \limsup_{t \downarrow 0} \left(-\frac{h(td)}{t} \right)$$

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + td) - f(y)}{t} \leq$$

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{g(y + td) - g(y)}{t} - \liminf_{t \downarrow 0} \frac{h(td)}{t}$$

由 h 的可微性, 知 h 是连续的, 所以

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + td) - f(y)}{t} \leq$$

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{g(y + td) - g(y)}{t} - \lim_{t \downarrow 0} \frac{h(td)}{t}$$

即

$$f^\circ(x; d) \leq g^\circ(x; d) - h'(\theta; d)$$

因为 h 是可微的, 所以 $\partial h(\theta) = \{ \nabla h(\theta) \}$, 对 $\forall \xi \in \partial^\circ f(x)$, 只需证 $\xi + \nabla h(\theta) \in \partial^\circ g(x)$, 由 $\xi \in \partial^\circ f(x)$ 得, $f^\circ(x; d) \geq \langle \xi, d \rangle$, 所以,

$$g^\circ(x; d) \geq \langle \xi, d \rangle + h'(\theta; d) \geq$$

$$\langle \xi, d \rangle + \langle \nabla h(\theta), d \rangle =$$

$$\langle \xi + \nabla h(\theta), d \rangle$$

即

$$\xi + \nabla h(\theta) \in \partial^\circ g(x)$$

所以

$$\varphi \neq \partial^\circ f(x) \subset \partial^\circ g(x) - \partial h(\theta)$$

(2) \Rightarrow (3) 显然成立。

命题 1 如果 $f, g: X \rightarrow R$ 是 Clarke 正则的, 那么在定理 1 中有结果 (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)。

证明 由于 (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) 在定理 1 中已证成立, 只需说明 (3) \Rightarrow (1) 即可。因为 f, g 是 Clarke 正则的, 所以

$$f^\circ(x; d) = f'(x; d), g^\circ(x; d) = g'(x; d)$$

所以定理 1 条件 (3) 等价于 $\partial f(x) \cap (\partial g(x) - \partial h(\theta)) \neq \varphi$ 。需证

$$\partial f(x) \cap (\partial g(x) - \partial h(\theta)) \neq \varphi \Rightarrow$$

$$f(x) - f(y) \leq g(x) - g(y) - h(x - y)$$

证明与参考文献[6]类似, 取 $x, y \in X$, 并且让 $m = 1, 2,$

$3, \dots$, 记 $x_k := x + \frac{k}{m}(y - x)$ (其中 $k = 0, 1, 2, \dots, m$),

由假设条件 $\partial f(x) \cap (\partial g(x) - \partial h(\theta)) \neq \varphi$, 则对每一

个 k , 有 $\partial f(x_k) \cap (\partial g(x_k) - \partial h(\theta)) \neq \varphi$, 因为 h 是可微的, 所以 $\partial h(\theta) = \{\nabla h(\theta)\}$, 选择 $u_k^* \in \partial f(x_k)$, $v_k^* \in \partial g(x_k)$ 使得 $u_k^* = v_k^* - \nabla h(\theta)$, 那么

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \geq \frac{1}{m} \langle y - x, u_k^* \rangle$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, m - 1) \tag{1}$$

$$g(x_k) - g(x_{k+1}) \geq -\frac{1}{m} \langle y - x, v_{k+1}^* \rangle$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, m - 1) \tag{2}$$

将不等式(1)式(2)式相加, 并且利用 $u_k^* = v_k^* - \nabla h(\theta)$, 则

$$f(y) - f(x) + g(x) - g(y) \geq \frac{1}{m} \langle y - x, u_0^* - v_m^* \rangle$$

$$- \frac{m-1}{m} \langle y - x, \nabla h(\theta) \rangle$$

因为 $\nabla h(\theta) \in \partial h(\theta)$, 得

$$h(x - y) - h(\theta) \geq \langle x - y - \theta, \nabla h(\theta) \rangle$$

$$\langle y - x, \nabla h(\theta) \rangle \geq -h(x - y)$$

利用该结果可以推出

$$f(y) - f(x) + g(x) - g(y) \geq \frac{1}{m} \langle y - x, u_0^* - v_m^* \rangle$$

$$+ \frac{m-1}{m} h(x - y)$$

令 $m \rightarrow \infty$, 则

$$f(y) - g(x) \leq f(y) - g(y) - h(x - y)$$

即

$$f(x) - g(x) \leq f(y) - g(y) - h(x - y)$$

命题2 设 $f, g: X \rightarrow R$ 局部 Lipschitz 连续函数, $h: X \rightarrow R$ 可微凸函数, 满足 $h(\theta) = 0, \nabla h(\theta) = 0, h(-x) = h(x)$, 若对所有的 $x, y \in X$, 满足 $f(x) - g(x) \leq f(y) - g(y) - h(x - y)$, 则对每一个 $x \in X$, 有 $\partial^\circ f(x) = \partial^\circ g(x) \neq \varphi$.

证明 由定理1知 $\varphi \neq \partial^\circ f(x) \subset \partial^\circ g(x) - \partial h(\theta)$, 因为 $\partial h(\theta) = \{\nabla h(\theta)\} = \{0\}$, 所以 $\partial^\circ f(x) \subset \partial^\circ g(x)$. 由 x, y 的任意性, 根据条件可得 $g(x) - f(x) \leq g(y) - f(y) - h(y - x)$, 因为 $h(-x) = h(x)$, 所以 $g(x) - f(x) \leq g(y) - f(y) - h(x - y)$. 所以由定理1知 $\varphi \neq \partial^\circ g(x) \subset \partial^\circ f(x) - \partial h(\theta)$. 同理因为 $\partial h(\theta) = \{\nabla h(\theta)\} = \{0\}$, 得 $\partial^\circ g(x) \subset \partial^\circ f(x)$, 综上, $\partial^\circ f(x) = \partial^\circ g(x) \neq \varphi$.

命题3 设 $f, g: X \rightarrow R$ 的局部 Lipschitz 连续函数,

若 $f - g$ 为常数, 那么 $\partial^\circ f(x) = \partial^\circ g(x) \neq \varphi$.

证明 因为 f 为局部 Lipschitz 连续函数, 由文献[8]定理2.59知 $\partial^\circ f(x) \neq \varphi$, 由 $f(x) = g(x) + C$ (其中 C 为常数), 任取 $x \in X$, 令 $x = y + td$ (其中 $t \in R, t > 0$), 有

$$f(y + td) = g(y + td) + C$$

在等式两边同时减去 $f(y)$ 得

$$f(y + td) - f(y) = g(y + td) - f(y) + C = g(y + td) - g(y)$$

在等式两边同时除以 t , 则

$$\frac{f(y + td) - f(y)}{t} = \frac{g(y + td) - g(y)}{t}$$

在等式两边同时取上极限, 那么

$$\limsup_{y \rightarrow x} \frac{f(y + td) - f(y)}{t} = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{g(y + td) - g(y)}{t}$$

即

$$f^\circ(x; d) = g^\circ(x; d)$$

所以

$$\partial^\circ f(x) = \partial^\circ g(x) \neq \varphi$$

注: 在文献[6]中, 提供了定义在 Banach 空间凸函数差的 Lipschitz 连续性的标准, 并且涉及了 ε 次微分, 扩大了研究的工作空间。在本文中, 主要利用文献[6]的思想, 扩展到对局部 Lipschitz 连续函数差的研究, 所涉及了 Clarke 次微分, 正是 Clarke 次微分的使用, 表明它更适合本文, 因为它涉及的函数不一定是凸函数。

3 实例

例 考虑函数 $f, g: R \rightarrow R$:

$$f(x) = |x|, g(x) = -2|x|$$

显然, f, g 是局部 Lipschitz 的, 易知 $f(x) = |x|$ 是 R 上的凸函数, 由文献[8]定理2.56知, f 是 Clarke 正则的, 即有 $f^\circ(0; d) = f'(0; d) = |d|$, 经计算得 $g^\circ(0; d) = g'(0; d) = 2|d|$, 那么 g 在 x 处是 Clarke 正则的, 取 $x = 0, y = 1, h = x^2 + x$, 则 $f(0) - g(0) \leq f(1) - g(1) - h(0 - 1)$, 那么由定理1可得 $\partial^\circ f(0) \subset$

$\partial^\circ g(0) - \partial h(0)$, 并且可得 $\partial h(0) = \{\nabla h(0)\} = \{1\}$, 事实上, 在 $x = 0$ 处有 $f^\circ(0; d) = |d|$ 且 $g^\circ(0; d) = 2|d|$, 因此, $\partial^\circ f(0) = [-1, 1]$, $\partial^\circ g(0) = [-2, 2]$, 且 $\partial h(0) = \{1\}$, 则 $\partial^\circ g(0) - \partial h(0) = [-3, 1]$, 所以 $\partial^\circ f(0) \subset \partial^\circ g(0) - \partial h(0)$ 成立。

参 考 文 献:

- [1] Rockafellar R T.Characterization of the subdifferentials of convex functions[J].Pacific J.Math.1966,17:497-510.
- [2] Rockafellar R T.On the maximal monotonicity of subdifferential mappings[J].Pacific J.Math,1970,33:209-216.
- [3] Moreau J J.Fonctionnelles Convexes,in:Séminaire Sur les équations aux dérivées Partielles [J].Collège de France,1966,71:38-45.
- [4] Phelps R R.Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability[M].Berlin:Springer-Verlag,1993.
- [5] Clarke F H.Optimization and Nonsmooth Analysis[M].New York:John Wiley & Sons,1983.
- [6] Hantoute A,Martinez L J E.Characterization of Lipschitz continuous difference of convex functions[J].J. Optim.Theory Appl.2013,159:673-680.
- [7] Kocourek P.An elementary new proof of the determination of a convex function by its subdifferential[J].Optimization,2010,59(8):1231-1233.
- [8] Fukushima M.非线性最优化基础[M].林贵华,译.北京:科学出版社,2011.
- [3] Moreau J J.Fonctionnelles Convexes,in:Séminaire Sur

Characterizations of the Difference of Local Lipschitz Continuous Functions

WANG Jiaojiao, LI Jun

(College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637009, China)

Abstract: The definition of generalized directional derivative and Clarke subdifferential are used in Banach spaces, and the relation between the difference of two local Lipschitz continuous functions and Clarke subdifferential is pointed out. Based on this, if the two local Lipschitz continuous functions f and $g: X \rightarrow R$ are Clarke regular, the result is degenerated to the relationship between the classical ε -subdifferential and the difference of two local Lipschitz continuous functions. Then when h is a function which is differentiable, even and convex, under conditions of the theorem 1, the relationship of Clarke differentials of two local Lipschitz continuous functions is pointed out. Finally, when the difference of two local Lipschitz continuous functions is a constant, the relationship of Clarke differentials of the two functions is pointed out.

Key words: Lipschitz continuous function; Clarke differential; Clarke subgradient; Clarke regular