

可积函数中位值的积分表达式

郭时光

(四川理工学院理学院,四川 自贡 643000)

摘要:研究可积函数在均衡点处的中位值,首先引入可补点、中位值和均衡点的概念,然后使用它们将 Rimann 引理推广,得出中位值的积分极限表达式,最后给出中位值的 Fourier 积分表达式。这个结果主要应用于计算函数的 Fourier 积分表达式在间断点处的值。

关键词:Rimann 引理;Fourier 积分公式;可补点;中位值;均衡点

中图分类号:O175

文献标志码:A

在著名的 Rimann 引理中,由于没有给出函数在间断点处的表达式^[1],这使得难以明瞭 Fourier 积分公式^[2]在间断点处成立与否^[3-9]。为了改善这种状况,引入可补点、中位值和均衡点的概念,从而将 Rimann 引理推广到间断点处的讨论中。

1 基本概念和主要定理

设函数 $f(t)$ 在点 $t = x$ 的某个邻域内有定义,在点 $t = x$ 处,如果函数 $f(t)$ 的左极限与右极限 $f(x \pm 0)$ 均存在,则称 $t = x$ 是函数 $f(t)$ 的可补点。如果 $t = x$ 是函数 $f(t)$ 的可补点,则称 $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ 是函数 $f(t)$ 在 $t = x$ 处的中位值。

设 $t = x$ 是函数 $f(t)$ 的可补点,如果存在正数 δ ,使得集合

$$\left\{ \frac{f(x \pm t) - f(x \pm 0)}{t}; 0 < t \leq \delta \right\}$$

均为有界集,则称点 $t = x$ 为函数 $f(t)$ 的均衡点。

定理 1 设 $f(t)$ 是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的函数,如果它满足下列两个条件:

(1) $f(t)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

(2) 绝对值积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ 存在。

则当 $t = x$ 是 $f(t)$ 的均衡点时,有

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin \lambda t dt = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \tag{1}$$

定理 2 设 $f(t)$ 是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的函数,如果它满足定理 1 中的两个条件,则当 $t = x$ 是 $f(t)$ 的均衡点时,成立着下列中位值的积分表达式

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(\tau - x) d\tau \right] d\omega \tag{2}$$

2 主要引理

引理 1 如果函数 $f(t)$ 在区间 $[a, b]$ 有界且可积,则有

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt = 0 \tag{3}$$

证明 由条件可知,对于任意给定的正数 ε ,存在分

划 $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, 使得

$$\sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

其中, M_k, m_k 依次是函数 $f(t)$ 在区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 上的最小上界与最大下界, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ($k=1, 2, \cdots, n$), 作函数

$$j(t) = \begin{cases} f(t_{k-1}) & (t_{k-1} \leq t < t_k) \\ f(t_{n-1}) & (t = t_n) \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt - \int_a^b j(t) \sin \lambda t dt \right| \leq \\ & \int_a^b |f(t) \sin \lambda t - j(t) \sin \lambda t| dt \leq \\ & \int_a^b |f(t) - j(t)| dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(t) - f(t_{k-1})| dt \leq \\ & \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

而当 $|\lambda| > \frac{4}{\varepsilon} \sum_{k=1}^n |f(t_{k-1})|$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b j(t) \sin \lambda t dt \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} j(t) \sin \lambda t dt \right| = \\ & \left| \sum_{k=1}^n f(t_{k-1}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sin \lambda t dt \right| = \\ & \left| \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n f(t_{k-1}) (\cos \lambda t_{k-1} - \cos \lambda t_k) \right| \leq \\ & \frac{2}{|\lambda|} \sum_{k=1}^n |f(t_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

用式(4)与式(5), 得

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) \cos \lambda t dt \right| \leq \\ & \left| \int_a^b f(t) \cos \lambda t dt - \int_a^b j(t) \cos \lambda t dt \right| + \\ & \left| \int_a^b j(t) \cos \lambda t dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

可见式(3)成立。证毕。

3 定理证明

定理 1 证明分为三个部分。

第一部分:证明等式(1)左端的积分存在。首先, 由于 $t=x$ 是 $f(t)$ 的均衡点, 故可取得一个正数 δ , 使得函数 $\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$ 关于变数 t 在区间 $(0, \delta]$ 上有界。

再用条件(2), 可知积分

$$\int_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin \lambda t dt$$

存在。其次, 用 Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$, 可知积分

分 $\int_0^\delta \frac{\sin \lambda t}{t} dt$ 存在。最后, 用条件(2), 得

$$\begin{aligned} & \int_\delta^{+\infty} \left| \frac{f(x+t)}{t} \sin \lambda t \right| dt \leq \\ & \frac{1}{\delta} \int_\delta^{+\infty} |f(x+t)| dt \leq \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \end{aligned}$$

所以积分 $\int_\delta^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin \lambda t dt$ 存在, 再用积分对区间的可加性, 得

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin \lambda t dt + \\ & f(x+0) \int_0^\delta \frac{\sin \lambda t}{t} dt + \int_\delta^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin \lambda t dt = \\ & \int_0^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin \lambda t dt \end{aligned}$$

由此可见, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin \lambda t dt$ 存在。同理:

$\int_{-\infty}^0 \frac{f(x+t)}{t} \sin \lambda t dt$ 存在。从而知积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin \lambda t dt$ 存在。

第二部分:证明下列等式成立,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin \lambda t dt = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2t} \sin \lambda t dt \end{aligned} \quad (6)$$

用积分换元法, 可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin \lambda t dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)}{t} \sin \lambda t dt$$

将等式两边同时加上其左边, 然后将所得等式两边同除以 2, 即得式(6)。

第三部分:证明式(1)成立。用 Dirichlet 积分, 当 $\lambda > 0$ 时, 得

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{2}$$

由此可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2t} \sin \lambda t dt - \\ & \frac{1}{2} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2t} \sin \lambda t dt - \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2t} \sin \lambda t dt = \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^a \left[\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} + \right. \\ & \left. \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right] \sin \lambda t dt - \\ & \frac{1}{\pi} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt \end{aligned} \quad (7)$$

在式(7)中,由于各个被积函数关于变数 λ 均为奇函数,所以当 $\lambda < 0$ 时式(7)也成立。

现在证明当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时,式(7)中最后一个等号后面的两个积分均趋于零。用第一部分的结论和引理1,得

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^a \left[\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} + \right. \\ & \left. \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right] \sin \lambda t dt = 0 \end{aligned}$$

而用积分换元法和 Dirichlet 积分收敛性,得

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\lambda a}^{+\text{sgn} \lambda \infty} \frac{\sin u}{u} du = 0$$

于是由式(7),得

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2t} \sin \lambda t dt = \\ & \frac{1}{2} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

同理,得

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^0 \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2t} \sin \lambda t dt = \\ & \frac{1}{2} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

将式(8)与式(9)相加,得

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2t} \sin \lambda t dt = \\ & \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)中令 $a \rightarrow +\infty$, 即得

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2t} \sin \lambda t dt = \\ & \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

将式(11)左边的积分换为式(7)左边的积分,即可

得式(1)。证毕。

定理2的证明:根据条件,分别用交换积分次序和定理1,得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(\tau-x) d\tau \right] d\omega = \\ & \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(\tau-x) d\tau \right] d\omega = \\ & \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left[\int_0^\lambda \cos \omega(\tau-x) d\omega \right] d\tau = \\ & \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau-x} \sin \lambda(\tau-x) d\tau = \\ & \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin \lambda t dt = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \end{aligned}$$

证毕。

4 应用举例

例1 设 $u(x) = \begin{cases} e^{-x} (x > 0) \\ 0 (0 > x) \end{cases}$, 则用中位值的积分

表达式(2),得

$$\begin{cases} e^{-x} (x > 0) \\ \frac{1}{2} (x = 0) \Rightarrow \frac{u(x-0) + u(x+0)}{2} = \\ 0 (x < 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cos \omega(\tau-x) d\tau \right] d\omega = \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\tau} \cos \omega(\tau-x) d\tau \right] d\omega = \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega x + \omega \sin \omega x}{\omega^2 + 1} d\omega \end{aligned}$$

例2 δ -函数 $\delta(x)$ 是无界函数,它不满足 Fourier 积分定理的条件。如果一定要用 Fourier 积分公式将其表示为积分形式,则用筛选性质和积分性质,得

$$\begin{aligned} & \delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \cos \omega(x-\tau) d\tau \right] d\omega = \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \cos \omega x d\tau \right] d\omega = \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \omega x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau \right] d\omega = \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \omega x d\omega \end{aligned}$$

式中最后一个等号右边的积分在通常意义下是不存在

的,但是,在工程技术应用中却认可上面的计算式。由此可见, δ -函数的引入,是会产生一些不寻常现象的。

参 考 文 献:

- [1] 江泽坚.数学分析[M].北京:人民教育出版社,1965.
- [2] 张元林.积分变换[M].5版.北京:高等教育出版社,2012.
- [3] 祝鹏,尹云辉,杨宇博.奇异摄动问题内罚间断有限方法的最优阶一致收敛性分析[J].计算数学,2013,35(3):321-336.
- [4] Boyce U E, Diprima R C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems [M]. New York: John Wiley & Sons, inc, 1996.
- [5] Pachpatte B G. Explicit bound on a retarded integral inequality[J]. Math In equal App, 2004(7):7-14.
- [6] Pachpatte B G. On a retarded integral inequality and its applications[J]. In equal Pure App Math, 2004(5):19.
- [7] Kitover A K, Wickstead A W. Operator norm limits of order continuous operators[J]. Positivity, 2005(9):341-345.
- [8] 刘东梅, 吴晓萍, 赵学靖. 基于均匀分布协变量的线性模型的参数估计[J]. 中国科技论文, 2013, 6(13): 1221-1226.
- [9] Lorch E R. Spectral Theory [M]. New York: Oxford Univ. Press, 2010.

Integral Expression of the Median Value of the Integrable Function

GUO Shiguang

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: The median value at the equilibrium point of the integrable function is studied. At first, the concepts of the fillable point, the median value and equilibrium point are introduced, and then by using them to generalize Rimann lemma, the integral limit expression of median value is obtained. Finally, the Fourier integral expression of the median value is given. This result is mainly used in calculating the value at the discontinuities of the Fourier integral expression of the function.

Key words: Rimann lemma; Fourier integral formula; fillable point; median value; equilibrium point