

非 Armendariz 环的最小阶

何建伟, 邵海琴, 郭莉琴, 王力梅

(天水师范学院数学与统计学院, 甘肃 天水 741001)

摘要:利用有限环的同构分类,以及两个判断 Armendariz 环的充分条件,讨论了非 Armendariz 环的最小阶数,最后得出,交换的非 Armendariz 环的阶数最小为 4,非交换的非 Armendariz 环的阶数最小为 8,并给出了这些最小阶数对应环的构造。

关键词:有限环;非 Armendariz 环;最小阶

中图分类号:O153.3

文献标志码:A

本文所指的环都是结合环但不一定含有单位元,称环 R 是 Armendariz 环,如果对 $R[x]$ 中任意两个多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$$

若 $f(x)g(x) = 0$, 则对任意整数 $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$, 有 $a_i b_j = 0$, 对 Armendariz 环的讨论始于文献[1-2], 在文献[3-6]中分别讨论了弱 Armendariz 环,称环 R 是弱 Armendariz 环,如果对 $R[x]$ 中任意两个线性多项式 $f(x) = a_0 + a_1x, g(x) = b_0 + b_1x$, 若 $f(x)g(x) = 0$, 则对任意整数 $0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2$, 有 $a_i b_j = 0$ 。文献[7]中得到了两类不一定是 reduced 环的 Armendariz 环。

1 主要结果

一个环 R 关于乘法构成一个含零元的半群,下面的命题是显然的。

命题 1 若 $R^2 = 0$, 则环 R 是 Armendariz 环,称环 R 是 reduced 环,如果 R 不含非零幂零元,Armendariz 注意到 reduced 环一定是 Armendariz 环。

命题 2 若环 R 是 reduced 环,则 R 是 Armendariz 环。

命题 3 若环 R 的一个非空子集 A 满足:

(1) $A^2 = 0$ 。

(2) 对 R 中任意两元素 x, y , 若 $xy = 0$ 则 $x \in A$ 或 $y \in A$ 且当 $x \in A$ 时, $xR = 0$, 当 $y \in A$ 时, $Ry = 0$, 则 R 为 Armendariz 环^[7]。

命题 4 若环 R 的一个非零理想 I 满足:

(1) $I^2 = 0$ 。

(2) 对 R 中任意非零元素 x_1, x_2, x_3, x_4 , 若 $x_1x_2 = 0, x_1x_4 + x_3x_2 = 0, x_3x_4 \in I$, 则 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$, 则 R 是 Armendariz 环^[7]。

对于最小阶的非 Armendariz 环,首先,阶为素数的环或者是零乘环或者是 reduced 环,所以也是 Armendariz 环。阶为 1 的环显然也是 Armendariz 环,故讨论四阶环的 Armendariz 性。

由文献[8]知,不同构的四阶环只有 11 类,沿用文献[8]的符号将这 11 类环表示为 $R_i, i = 1, 2, \dots, 11$ 。分别讨论其 Armendariz 性。

命题 5 R_1 是 Armendariz 环。

证明 $I = \{0, b\}$ 是 R_1 的理想满足 $I^2 = 0$, 若 R 中任意非零元素 x_1, x_2, x_3, x_4 , 满足 $x_1x_2 = 0, x_1x_4 + x_3x_2 = 0, x_3x_4 \in I$, 如果 $x_3x_4 = 0$, 则 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = b \in I$; 如果 $x_3x_4 = b$, 因为 $b(x_4 + x_3) = 0$ 所以 $x_4 + x_3 = 0$ 或 $x_4 + x_3 = b$ 但 $x_4 + x_3 = 0$ 将推出 $x_4 = x_3$, 这与 $x_3x_4 = b$ 矛盾,故只能是 $x_4 + x_3 = b$, 但 $1 + b \neq b$ 且 $c + b \neq b$, 都与 $x_3x_4 = b$ 矛盾,故此 $x_3x_4 = b$ 不会出现。由命题 4, R_1 是 Armendariz 环。

R_2 是 reduced 环故也是 Armendariz 环。 R_3 是零乘环故也是 Armendariz 环。

命题 6 R_4 是 Armendariz 环。

证明 $A = \{0, a\}$ 是环 R 的一个非空子集满足 $A^2 = 0$, 若 $xy = 0$ 则 $x \in A$ 或 $y \in A$ 且当 $x \in A$ 时, 不论 $x = 0$ 还是 $x = a$ 都有 $xR = 0$, 同样如果 $y \in A$, 那么 $Ry = 0$, 由命题 3 知 R_4 是 Armendariz 环。

同理可证明 R_5, R_6, R_7 也是满足命题 3 的 Armendariz 环, R_8 是无零因子环, 故是 reduced 环, 所以是 Armendariz 环, R_9 是零乘环, 故是 Armendariz 环, R_{10} 与模 4 剩余类环同构, 在文献[7]中已经证明模 4 剩余类环为 Armendariz 环。

命题 7 R_{11} 是弱 Armendariz 环但不是 Armendariz 环。

证明 R_{11} 的加法表和乘法表分别见表 1 和表 2。则有 R_{11} 中的多项式乘积等式 $(a + (3a)x + (2a)x^2)(2a + (3a)x + ax^2) = 0$, 但 $a(3a) = 2a \neq 0$, 故 R_{11} 不是 Armendariz 环, 但是对 R_{11} 中任意两个线性多项式 $f(x) = a_0 + a_1x, g(x) = b_0 + b_1x$, 若 $f(x)g(x) = 0$, 不妨假设 a_0, a_1, b_0, b_1 都是非零元, 则 $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \{a, 2a\}$, 若 $a_0 = 2a$, 则 $f(x)g(x) = (a_1x)(b_0 + b_1x) = 0$, 所以对任意整数 $0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2$, 有 $a_i b_j = 0$, 若 $a_0 = a$, 则 $b_0 = 2a$, 同上可知对任意整数 $0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2$, 有 $a_i b_j = 0$, 这说明 R_{11} 是一个弱 Armendariz 环。

表 1 加法表

+	0	a	2a	3a
0	0	a	2a	3a
a	a	2a	3a	0
2a	2a	3a	0	a
3a	3a	0	a	2a

表 2 乘法表

°	0	a	2a	3a
0	0	0	0	0
a	0	2a	0	2a
2a	0	0	0	2a
3a	0	2a	2a	2a

综合以上七个命题, 有:

定理 1 交换的非 Armendariz 环最小阶为 4, 在同构的意义下只有一类。

对于交换的非 Armendariz 环的最小阶数, 只需从六

阶以上的环中寻找。由文献[8], 六阶环在同构意义下只有四种, 用文献[8]记号表示为 R_1, R_2, R_3, R_6 , 其中 R_1 是 reduced 环, 所以也是 Armendariz 环。 R_2 中取非空子集 $\{\overline{0}, \overline{6}\}$, R_3 中取非空子集 $\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}\}$, 可证明其是满足命题 1 的 Armendariz 环。 R_6 是零乘环, 故也是 Armendariz 环, 在八阶环中, 考虑模 2 剩余类环 Z_2 的 2 阶上三角矩阵环 $T_2(Z_2)$, 由文献[7]知其不是 Armendariz 环, 这个环是非交换的。

定理 2 非交换的非 Armendariz 环最小为 8 阶。

2 结束语

综上所述, 交换的非 Armendariz 环的阶数最小为 4, 非交换的非 Armendariz 环的阶数最小为 8, 对于其它环, 也可以考虑用同构分类的方法做类似地讨论。

参考文献:

- [1] Armendariz E P. A note on extensions of Baer and p. p.-rings[J]. J. Austral. Math Soc, 1974, 18: 470-473.
- [2] Rege M B, Chhawchharia S. Armendariz rings[J]. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci, 1997, 73: 14-17.
- [3] Lee T K, Wong T L. On Armendariz rings[J]. Houston J. Math, 2003, 29: 583-593.
- [4] 伍惠凤. 关于弱 3-Armendariz 环[J]. 杭州师范大学学报: 自然科学版, 2012(3): 241-244.
- [5] 解晓娟. 弱 M-拟 Armendariz 环[J]. 安徽师范大学学报: 自然科学版, 2012(2): 123-126.
- [6] 解晓娟. 中心弱 Armendariz 环[J]. 郑州大学学报: 理学版, 2012(2): 10-12.
- [7] Jian W H, Sheng Z R. The power-serieswise Armendariz rings with nilpotent subsets[J]. Scientia Magna, 2010, 6(4): 107-112.
- [8] 张学哲. 四元环的同构分类[J]. 山西师范大学学报: 自然科学版, 2002, 16(4): 1-6.
- [9] 杨子胥. 近世代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

The Least Order of Non-Armendariz Ring

HE Jianwei, SHAO Haiqin, GUO Liqin, WANG Limei

(School of Mathematics and Statistic, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China)

Abstract: According to the isomorphism classification of finite ring, and two sufficient conditions for deciding Armendariz ring, the least order of non-Armendariz ring is studied. Then it can be concluded that the least order of non-Armendariz ring is four, the least order of non-Armendariz ring is eight when the ring is commutative. Finally, the structures of these rings that have the least orders are presented.

Key words: finite rings; non-Armendariz ring; the least order