文章编号:1673-1549(2016)01-0093-03　　DOI:10.11863/j. suse.2016.01.19

奇异变换半群 $Sing_n$ 的深度

陈辉蓉[1], 胡华碧[1], 龙伟峰[2]

(1.贵州医科大学生物工程系, 贵阳 550025;2.贵州师范大学数学与计算机学院, 贵阳 550004)

摘　要:设[n] = {1,2⋯. n}并赋予自然序, $Sing_n$ 为[n]上的奇异变换半群,令 $J_{n-1} = \{\alpha \in Sing_n: |\mathrm{im}(\alpha)| = n-1\}$。通过定义部分横截集,证明了半群 $Sing_n$ 的全 J_{n-1} -深度为 $n-1$, 同时得到了半群 $Sing_n$ 的任意元素 α 的 J_{n-1} -深度为 n-$|\mathrm{im}(\alpha)|$, 进一步证明了有限半群 S 的任意非空子集 U 生成的子半群 $[U]$ 存在全 U -深度。

关键词:部分横截集;深度;奇异变换半群

中图分类号:O152.7　　**文献标志码**:A

引　言

设 $[n] = \{1,2,\cdots,n\}$ 并赋予自然序, T_n 和 S_n 分别是 $[n]$ 上的全变换半群和对称群,称半群 $Sing_n = T_n \backslash S_n$ 为 $[n]$ 上的奇异变换半群[1]。奇异变换半群 $Sing_n$ 中的 Green 关系刻划[2]:

$\alpha L\beta \Leftrightarrow \mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$

$\alpha R\beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$

$\alpha J\beta \Leftrightarrow |\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$

记 $J_r = \{\alpha \in Sing_n \mid |\mathrm{im}(\alpha)| = r\}$, 且 $1 \leqslant r \leqslant n-1$, 则 $Sing_n$ 有 n-1 个 J -类 $J_1, J_2, \cdots, J_{n-1}$, 且 $Sing_n = \cup_{s=1}^{n-1} J_s$。

设 G 是半群 S 的生成集[3],则 $S = [G] = \cup_{i \in N} G^i$ 其中 $G^i = \{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i \mid \alpha_j \in G, 1 \leqslant j \leqslant i\}$, N 为自然数集。设 $\alpha \in S$, 若存在 $k \in N$, 使 $\alpha \in G^k \backslash G^{k-1}$, 称元素 α 的 G -深度为 k, 设 $G^{[k]} = \cup_{i=1}^{k} G^i$, 若满足条件 $S = G^{[k]}$ 的最小自然数 k 存在,称半群 S 的全 G -深度为 k。

设 α 是半群 S 的一个元素,若 $\alpha^2 = \alpha$, 则称 α 是半群 S 的一个幂等元,设 U 是半群 S 的任意子集,通常用 $E[U]$ 表示 U 中的幂等元之集。1966 年 Howie[1] 证明了奇异变换半群 $Sing_n$ 是由顶端 J -类 J_{n-1} 的幂等元集 $E(J_{n-1})$ 生成。1980 年 Howie[2] 得到了半群 $Sing_n$ 的任意元素的幂等元深度[4] ($E(J_{n-1})$ -深度)。本文得到了半群 $Sing_n$ 的全 J_{n-1} -深度为 $n-1$, 同时得到了半群 $Sing_n$ 的任意元素 α 的 J_{n-1} -深度为 $n - |im\alpha|$。进一步,证明了有限半群 S 的任意非空子集 U 生成的子半群 $[U]$ 存在全 U -深度。

本文未定义的术语及记法见文献[3]。

1　准备工作

定义 1　设 A 是集合 $[n]$ 的一个非空子集, $\alpha \in Sing_n$, 若对任意 $x, y \in A$, 且 $x \neq y$, 有 $x\alpha \neq y\alpha$, 则称 A 是 α 在集合 $[n]$ 上的部分横截集,简称 A 是 α 的部分横截集[5]。

引理 1　设 A 是集合 $[n]$ 的一个非空子集, $\alpha \in Sing_n$, 若集合 A 是 α 的部分横截集,则 $|A\alpha| = |A|$。

引理 2　设 $2 \leqslant r \leqslant n-1$, 则 $J_r \cdot J_{n-1} \subseteq J_r \cup J_{r-1}$。

证明　任取 $\alpha \in J_r, \beta \in J_{n-1}$, 则 $|\mathrm{im}(\alpha)| = r$。分两种情况证明 $\alpha\beta \in J_r \cup J_{r-1}$。

(1)若 $\mathrm{im}(\alpha)$ 是 β 的部分横截集,则由引理 1 可得, $|\mathrm{im}(\alpha\beta)| = |(\mathrm{im}(\alpha))\beta| = |\mathrm{im}(\alpha)| = r$, 从而 $\alpha\beta \in J_r \subseteq J_r \cup J_{r-1}$。

收稿日期:2015-09-06

基金项目:贵州省科学技术基金项目(KLS[2013]01)

作者简介:陈辉蓉(1962-),女,贵州仁怀人,副教授,主要从事半群理论方面的研究,(E-mail)chenghuirong1962@163.com

(2)若 $\mathrm{im}(\alpha)$ 不是 β 的部分横截集,则存在 $x,y\in\mathrm{im}(\alpha)$,使得 $x\beta=y\beta$,由 $\beta\in J_{n-1}$ 可知,集合 $\{x,y\}$ 是 β 唯一的非单点核类,于是集合 $[n]\setminus\{x\}$ 是 β 的部分横截集,进而由部分横截集的定义易知集合 $\mathrm{im}(\alpha)\setminus\{x\}$ 是 β 的部分横截集,从而由引理 1 可得

$$|\mathrm{im}(\alpha\beta)|=|(\mathrm{im}(\alpha))\beta|=|(\mathrm{im}(\alpha)\setminus\{x\})\beta|=$$
$$|\mathrm{im}(\alpha)\setminus\{x\}|=|\mathrm{im}(\alpha)|-1=r-1$$

因此

$$\alpha\beta\in J_{r-1}\subseteq J_r\cup J_{r-1}$$

综上所述,由 α,β 的任意性可得,$J_r\cdot J_{n-1}\subseteq J_r\cup J_{r-1}$。

引理 3 设 $1\leqslant s\leqslant n-2$,则 $J_s\subseteq J_{s+1}\cdot J_{n-1}$。

证明 任取

$$\alpha=\begin{bmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_s\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s\end{bmatrix}\in J_s$$

令 $[n]\setminus\mathrm{im}(\alpha)=\{a_{s+1},a_{s+2},\cdots,a_n\}$,由 $s\leqslant n-2$ 可知,存在 A_i,使 $|A_i|>1$,不妨设 $|A_1|>1$,取 $b\in A_1$,令

$$\beta=\begin{bmatrix}A_1\setminus\{b\} & A_2 & \cdots & A_s & b\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s & a_n\end{bmatrix}$$

$$\gamma=\begin{bmatrix}\{a_1,a_n\} & a_2 & \cdots & a_s & a_{s+1} & \cdots & a_{n-1}\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s & a_{s+1} & \cdots & a_{n-1}\end{bmatrix}$$

则 $\beta\in J_{s+1},\gamma\in J_{n-1}$,且 $\alpha=\beta\gamma$,再由 α 的任意性可得,$J_s\subseteq J_{s+1}\cdot J_{n-1}$。

引理 4 设 $1\leqslant r\leqslant n-2$,则 $J_r\subseteq(J_{n-1})^{n-r}$。

证明 由引理 3 可得 $J_s\subseteq J_{s+1}\cdot J_{n-1}$,$1\leqslant s\leqslant n-2$,从而

$$J_r\subseteq J_{r+1}\cdot J_{n-1}\subseteq(J_{r+2}\cdot J_{n-1})\cdot J_{n-1}$$
$$\subseteq(J_{r+3}\cdot J_{n-1})\cdot(J_{n-1})^2\subseteq\cdots$$
$$\subseteq(J_{n-2}\cdot J_{n-1})\cdot(J_{n-1})^{n-r-3}$$
$$\subseteq(J_{n-1}\cdot J_{n-1})\cdot(J_{n-1})^{n-r-2}=(J_{n-1})^{n-r}$$

引理 5 设 $1\leqslant s\leqslant n-1$,则 $(J_{n-1})^s\subseteq J_{n-1}\cup J_{n-2}\cup\cdots\cup J_{n-s}$。

证明 对 s 用归纳法证明。

(1)当 $s=1$ 时,显然有 $J_{n-1}\subseteq J_{n-1}$。

(2)假设 $s=k$ 时,结论成立,即

$$(J_{n-1})^k\subseteq J_{n-1}\cup J_{n-2}\cup\cdots\cup J_{n-k}$$

当 $s=k+1$ 时,由引理 2 及归纳假设可得,

$$(J_{n-1})^{k+1}=(J_{n-1})^k\cdot J_{n-1}\subseteq(J_{n-1}\cup J_{n-2}$$
$$\cup\cdots\cup J_{n-k})\cdot J_{n-1}=(J_{n-1}\cdot J_{n-1})\cup$$
$$(J_{n-2}\cdot J_{n-1})\cup\cdots\cup(J_{n-k}\cdot J_{n-1})\subseteq$$
$$(J_{n-1}\cup J_{n-2})\cup(J_{n-2}\cup J_{n-3})\cdots$$
$$\cup(J_{n-k}\cup J_{n-k-1})=J_{n-1}\cup J_{n-2}\cup\cdots$$
$$\cup J_{n-k}\cup J_{n-k-1}$$

综上所述,引理 5 成立。

由引理 5,容易得到如下推论。

推论 1 设 $1\leqslant s\leqslant n-1$,则

$$\cup_{k=1}^{s}(J_{n-1})^k\subseteq J_{n-1}\cup J_{n-2}\cup\cdots\cup J_{n-s}$$

引理 6 设 $n\geqslant3$,则

$$Sing_n=[J_{n-1}]=\cup_{k=1}^{n-1}(J_{n-1})^k$$

证明 显然有 $\cup_{k=1}^{n-1}(J_{n-1})^k\subseteq Sing_n$,由文献[1]知 $Sing_n=[J_{n-1}]$,由引理 4 可得 $J_s\subseteq(J_{n-1})^{n-s}1\leqslant s\leqslant n-2$,从而,

$$[J_{n-1}]=Sing_n=\cup_{k=1}^{n-1}J_s=$$
$$(J_1\cup J_2\cup\cdots\cup J_{n-2})\cup J_{n-1}$$
$$\subseteq[(J_{n-1})^{n-1}\cup(J_{n-1})^{n-2}\cdots\cup(J_{n-1})^2]\cup J_{n-1}=$$
$$\cup_{k=1}^{n-1}(J_{n-1})^k$$

因此 $Sing_n=[J_{n-1}]=\cup_{k=1}^{n-1}(J_{n-1})^k$。

2 主要结果及证明

定理 1 半群 $Sing_n$ 的全 J_{n-1} -深度为 $n-1$。

证明 据文献[1]知 $Sing_n=[J_{n-1}]$,由引理 6 可得 $J_{n-1}^{[n-1]}=\cup_{k=1}^{n-1}(J_{n-1})^k=(J_{n-1})$,由推论 1 及引理 6 可得对任意的 $1\leqslant s\leqslant n-2$,有

$$J_{n-1}^{[s]}=\cup_{k=1}^{s}(J_{n-1})^k\subseteq J_{n-1}\cup J_{n-2}\cup$$
$$\cup J_{n-s}\subseteq J_{n-1}\cup J_{n-2}\cup$$
$$\cup J_2\neq Sing_n$$

从而 $n-1$ 是满足条件 $Sing_n=J_{n-1}^{[k]}$ 的最小自然数,因此半群 $Sing_n$ 的全 J_{n-1} -深度为 $n-1$。

定理 2 设 $\alpha\in Sing_n$,则 α 的 J_{n-1} -深度为 $n-|\mathrm{im}(\alpha)|$。

证明 不妨设 $|\mathrm{im}(\alpha)|=r$,则 $\alpha\in J_r$,由引理 4 可得,$\alpha\in J_r\subseteq(J_{n-1})^{n-r}$,由引理 5 可得 $(J_{n-1})^{n-r-1}\subseteq J_{n-1}\cup J_{n-2}\cup\cdots\cup J_{r+1}$,从而由 $\alpha\in J_r$ 可得 $\alpha\notin(J_{n-1})^{n-r-1}$,进而 $\alpha\in(J_{n-1})^{n-r}\setminus(J_{n-1})^{n-r-1}$,因此 α 的 J_{n-1} -深度为 $n-r=n-|\mathrm{im}(\alpha)|$。

定理 3 设 U 是半群 S 的非空子集,若 $|S|=l<+\infty$,则半群 $[U]$ 存在全 U -深度。

证明 注意到 $[U]=\cup_{k\in N}U^k$,令 $B_1=U,B_2=U^2\setminus U,\cdots,B_k=U^k\setminus\cup_{i=1}^{k-1}U^i$,$k\geqslant2$,则 $[U]=\cup_{k\in N}B_k$,且 $B_i\cap B_j=\varphi,i\neq j$。

断言:存在 $m\in N$,使 $B_m=\varphi$,且当 $l\geqslant m$ 时,$B_l=\varphi$。

若对所有 $k\in N$,都有 $B_k\neq\varphi$,则由 $[U]=\cup_{k\in N}B_k$,

且 $B_i \cap B_j = \varphi, i \neq j$ 可得半群 $[U]$ 中有无穷多个元素，这与 $|[U]| \leqslant |S| = l < +\infty$ 矛盾。因此存在 $m \in N$，使 $B_m = \varphi$，由 $B_m = U^m \setminus \cup_{i=1}^{m-1} U^i$ 可得 $U^m \subseteq \cup_{k=1}^{m-1} U^k$。若 $B_{m+1} \neq \varphi$，取 $\beta \in B_{m+1} = U^{m+1} \setminus \cup_{k=1}^{m} U^k$，则 $\beta \in U^{m+1}$ 且 $\beta \notin \cup_{k=1}^{m} U^k$。由 U^{m+1} 的定义可知，存在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{m+1} \in U$，使 $\beta = \beta_1\beta_2\cdots\beta_{m+1}$，于是 $\beta_1\beta_2\cdots\beta_m \in U^m \subseteq \cup_{k=1}^{m-1} U^k$，从而存在 $1 \leqslant c \leqslant m-1$，使 $\beta_1\beta_2\cdots\beta_m \in U^c$，进而 $\beta = (\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)\beta_{m+1} \in U^{c+1}$（因 $c+1 \leqslant m$），这与 $\beta \notin \cup_{k=1}^{m} U^k$ 矛盾，因此 $B_{m+1} = \varphi$。重复上述的证明过程，当 $l \geqslant m$ 时，$B_l = \varphi$，令 $d = \max\{i \in N : B_i \neq \varphi, 1 \leqslant i \leqslant m\}$，则 $1 \leqslant d < m$，且

$$[U] = \cup_{k \in N} B_k = \cup_{k=1}^{d} B_k = \cup_{k=1}^{d}[U^k \setminus (\cup_{i=1}^{k-1} U^i)] \subseteq \cup_{k=1}^{d} U^k = U^{[d]}$$

注意到 $U^{[d]} = \cup_{k=1}^{d} U^k \subseteq [U]$，因此 $U^{[d]} = [U]$，由 $B_d = U^d \setminus \cup_{i=1}^{d-1} U^i \neq \varphi$ 可得 $U^d \neq \varphi$，从而对任意的 $1 \leqslant s < d$，有

$$U^{[s]} = \cup_{k=1}^{s} U^k = (U^{[d]}) \setminus (U^d \cup \cdots \cup U^{s+1}) \subseteq [U] \setminus U^d \neq [U]$$

进而，d 是满足条件 $[U] = U^{[k]}$ 的最小自然数，因此半群 $[U]$ 的全 U－深度为 d。

参考文献:

[1] HOWIE J M.the semigroup generated by the idempotent of a full transformation semigroup[J]. J. London Math. Soc.,1966,41:707-716.

[2] HOWIE J M.Products of idempotents in finite full transformation semigroup[J]. Proc. R. Soc. Edinburgh. Sect. A 1980,86:243-254.

[3] HOWIE J M.An Introduction to Semigroup Theory[M]. London:Academic Press,1976.

[4] HIGGINS P M. Idempotent depth in semigroups of order-preserving mappings[J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sec.A,1994,124(5):1045-1058.

[5] ZHAO Ping.Maximal idempotent-generated regular subsemigroups of sopn[J]. Semigroup Forum,2010,80:477-483.

[6] ZHAO Ping. A classification of maximal idempotent-generated subsemigroups of singular orientation-preserving transformation semigroups[J]. Semigroup Forum, 2009,79:377-384.

[7] 赵平,游泰杰,徐波.降序且保序变换半群的幂等元秩[J].山东大学学报:理学版,2011,46(4):75-77.

[8] ZHAO Ping.Semigroups of orientation-preserving transformations generated by idempotents of rankr[J].Advances in Mathematics,2010(4):443-448.

[9] 邓伟娜,裴惠生.一类变换半群中幂等元的中心化子[J].西南大学学报:自然科学版,2013(2):55-61.

[10] 李红香,赵平,游泰杰.保序变换半群 On 的平方幂等元[J].贵州师范大学学报:自然科学版,2014(1):48-50.

The Depth of Singular Transformation Semigroup $Sing_n$

CHEN Huirong[1], *HU Huabi*[1], *LONG Weifeng*[2]

(1. Department of Bioengineering, Guizhou Medical University, Guiyang 550025, China; 2. School of Mathematics and Computing, Guizhou Normal University, Guiyang 550004, China)

Abstract: Let $[n] = \{1, 2\cdots. n\}$ ordered in the standard way, $Sing_n$ be the singular transformation semigroup on the set $[n]$, and $J_{n-1} = \{\alpha \in Sing_n, |\mathrm{im}(\alpha)| = n\text{-}1\}$. By defining partial transversal sets, the J_{n-1} -depth of the semigroup $Sing_n$ is proved to be equal to n-1, and the J_{n-1} -depth of each element α of the semigroup $Sing_n$ is equal to n-$|\mathrm{im}(\alpha)|$. Furthermore, it is proved that the subsemigroup $[U]$ is generated by any nonempty subset U of limited semigroup S, and has the global U- depth.

Key words: partial transversal set; depth; singular transformation semigroup