文章编号:1673-1549(2016)01-0087-06 DOI:10.11863/j.suse.2016.01.18

两无穷区间上积分交换次序充分条件的改进及其应用

邢家省[1,2], 杨小远[1,2], 白 璐[1,2]

(1.北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191;2.数学、信息与行为教育部重点实验室, 北京 100191)

摘 要:考虑两无穷区间上的积分交换次序定理的充分条件问题,指出了数学分析中经典定理的充分条件的不足和局限性、适用范围有限、解决问题困难等问题。对经典的充分条件在表述条件上给予改进,并运用数学分析中积分控制收敛定理给予证明,达到了数学分析中应有的理论高度,从而得到新结果。通过实例比较,使用新的积分交换次序定理更方便于验证条件。

关键词:无穷区间上的积分交换次序定理;含参变量广义积分;内闭一致收敛性;比较判别法;控制收敛定理

中图分类号:O177.2 **文献标志码**:A

两无穷区间上的积分交换次序定理[1-12]是数学分析中的重要结果,在文献[1-7]中,给出了两无穷区间上的积分可交换积分次序的充分条件和证明过程。发现数学分析中的积分交换次序定理的经典充分条件在实际问题中很难满足,对许多不满足此充分条件的函数不能直接利用[2,8],对有些函数验证满足经典充分条件也繁琐[1-2]。将经典的充分条件给予改进,在广泛的充分条件下给出积分交换次序定理的结果,得到最好的理论表现形式,并且在导出结果的过程中没有增加任何理论难度,利用新的表述结果可以更方便解决一批函数的积分计算问题。经典的积分交换次序定理中充分条件的局限性问题在文献[2,8]中已探讨,由于直接套用很困难,因而采用其他复杂的解决方法,其实,可以将原有理论结果发展,达到数学分析学中应有的理论高度和广泛适用性。

1 无穷区间上积分交换次序定理的经典充分条件及其局限性

定理 1[1-7] (无穷区间的积分交换次序)设函数 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续,如果满足下列条件:

(1)对任何 $\beta>\alpha$,积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛,对任何 $b>a$,积分 $\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

(2)积分 $\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u$ 中至少有一个存在,那么积分 $\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 都存在,而且相等,即 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$。

定理 1 是标准数学分析教材中的经典结果[1-7]。可以发现,定理 1 中充分条件(1)是苛刻的,对有些函数的验证很困难,有些函数也不满足此条件,不能直接套用此定理。可以将定理 1 中的条件(1)改进为一般形式,得到更好的一般结果形式,新的结果更方便使用。

定理 2[1-7] (无穷区间上的积分交换次序)如果函数 $f(x,u)$ 满足条件:

收稿日期:2015-10-22
基金项目:国家自然科学基金项目(61271010);北京航空航天大学校级重大教改项目(201401)
作者简介:邢家省(1964-),男,河南泌阳人,副教授,博士,主要从事偏微分方程、微分几何方面的研究,(E-mail)xjsh@buaa.edu.cn;
杨小远(1964-),女,辽宁沈阳人,教授,博导,主要从事应用调和分析、图像处理方面的研究,(E-mail)xiaoyuanyang@buaa.edu.cn

(1) $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续且非负。

(2) $\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上连续；$\psi(x)=\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续。

(3) 积分 $\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 中至少有一个存在，那么积分 $\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 都存在，而且相等，即

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$$

定理2中的条件(2)也有局限性，适用范围有限。

2 无穷区间上积分交换次序的充分条件的改进条件

定理3[1-7] 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $(a,+\infty)$ 上的函数列，$\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$ 存在，$\{f_n(x)\}$ 在 $(a,+\infty)$ 上收敛于 $f(x)$。

如果满足条件：

(1) 对任意 $A>\delta>a$，$\{f_n(x)\}$ 在 $[\delta,A]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

(2) 积分 $\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$ 对 n 一致收敛，则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$。

注意这里的积分下限 a 可能是积分的瑕点，a 也可能是 $-\infty$。

任取 $b>a$，由 $\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x+\int_b^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$，利用已有结果就可得出定理3的结论成立。

定理3常被使用的情形是控制收敛定理。

定理4[1-7] (控制收敛定理)设 $\{f_n(x)\}$ 是 $(a,+\infty)$ 上的函数列，$\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$ 存在，$\{f_n(x)\}$ 在 $(a,+\infty)$ 上收敛于 $f(x)$。

如果满足：

(1) 对任意 $A>\delta>a$，$\{f_n(x)\}$ 在 $[\delta,A]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

(2) 如果存在 $(a,+\infty)$ 上的非负函数 $F(x)$，使得 $\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而且对 $x\in(a,+\infty)$ 及所有的 n，都有 $|f_n(x)|\leqslant F(x)$，则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$。

定理4虽然是以函数列的极限形式叙述的，完全可以写出其他极限形式的相应结论[3,5,9]。

定理5 (无穷区间上的积分交换次序)设函数 $f(x,u)$ 在 $(a,+\infty)\times(\alpha,+\infty)$ 上连续，如果满足条件：

(1) 对任何 $B>\beta>\alpha$，积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[\beta,B]$ 上一致收敛。对任何 $A>b>a$，积分 $\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[b,A]$ 上一致收敛。

(2) 积分 $\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u$ 中至少有一个存在，则积分 $\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 都存在，而且相等，即

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$$

证明 不妨假定 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u$ 存在，因而 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 存在。即证明

$$\lim_{B\to+\infty,\beta\to\alpha^+}\int_\beta^B\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$$

由于 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在区间 $[\beta,B]$ 上一致收敛，所以，成立

$$\int_\beta^B\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\beta^B f(x,u)\mathrm{d}u$$

记

$$F_{B,\beta}(x)=\int_\beta^B f(x,u)\mathrm{d}u$$

$$F(x)=\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$$

$$\Phi(x)=\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u$$

显然

$$|F_{B,\beta}(x)|\leqslant\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u=\Phi(x)$$

且 $\int_a^{+\infty}\Phi(x)\mathrm{d}x$ 收敛，由条件知 $\lim\limits_{B\to+\infty,\beta\to\alpha^+}F_{B,\beta}(x)=F(x)$，且在 $(a,+\infty)$ 的任何内闭真子区间 $[b,A]$ 上一致收敛，利用控制收敛定理得，成立

$$\lim_{B\to+\infty,\beta\to\alpha^+}\int_a^{+\infty}F_{B,\beta}(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$$

因此，证明了结论。

显然定理 5 的条件比定理 1 的条件广泛自然,也就是定理 5 的结果优于定理 1 的结果,完全应该采用定理 5 替代定理 1,数学分析中应该以定理 5 的结果为最终形式,为得此结果,证明过程没有增加任何困难,定理 5 的充分条件,在实际应用中非常方便于验证,减少了解决问题的难度。

文献[1-9]中的狄尼定理也可以改进为如下形式。

定理 6　(狄尼定理)如果函数 $f(x,u)$ 满足条件:

(1) $f(x,u)$ 在 $(a,+\infty)\times(\alpha,+\infty)$ 上连续且非负。

(2) $\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $(\alpha,+\infty)$ 上连续, $\psi(x)=\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续。

(3) 积分 $\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 中至少有一个存在,那么积分 $\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 都存在,而且相等,即

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$$

一般地,对 $(a,b)\times(c,d)$ 上的积分交换次序定理的充分条件类似的可以给出,这里下限 a,c 可以是有限的或为 $-\infty$,上限 b,d 可以是有限的或为 $+\infty$。

3　一些含参变量广义积分的一致收敛性

定理 7　积分 $\int_0^{+\infty}te^{-tx^2}\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛。

证明　证法 1 利用不等式 $e^y\geqslant 1+y,(y\in[0,+\infty))$,得出 $0\leqslant te^{-tx^2}\leqslant\frac{t}{1+tx^2}<\frac{1}{x^2}$,而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛,由比较判别法[1-5],所以 $\int_0^{+\infty}te^{-tx^2}\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的。

证法 2 注意到

$$\int_x^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_x^{+\infty}\left(-\frac{1}{2y}\right)(e^{-y^2})'\mathrm{d}y=$$

$$\frac{1}{2x}e^{-x^2}-\int_x^{+\infty}\frac{1}{2y^2}e^{-y^2}\mathrm{d}y<\frac{1}{2x},\ (x>0)$$

于是对 $A>0$,成立

$$\int_A^{+\infty}te^{-tx^2}\mathrm{d}x=\sqrt{t}\int_{\sqrt{t}A}^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\leqslant\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}A}<\frac{1}{2A}$$

由此即得 $\int_0^{+\infty}te^{-tx^2}\mathrm{d}x$ 关于 $0\leqslant t<+\infty$ 是一致收敛的。

定理 8　设 $k>0$,积分 $\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}\sin t\mathrm{d}u$, $\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}\sin t\mathrm{d}u$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 都一致收敛。

证明　由

$$|e^{-(k+u^2)t}\sin t|\leqslant te^{-(k+u^2)t}\leqslant te^{-tu^2},\quad |e^{-u^2t}\sin t|\leqslant te^{-tu^2}$$

利用定理 7 的结果和 Weierstrass 比较判别法[1-5],所以 $\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}\sin t\mathrm{d}u$, $\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}\sin t\mathrm{d}u$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 都一致收敛。

定理 9[1-2]　设 $k>0$,积分 $\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}\sin t\mathrm{d}t$, $\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}\cos t\mathrm{d}t$ 关于 $u\in[0,+\infty)$ 一致收敛。

定理 10　设 $k>0$,对任意 $\delta>0$,积分 $\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}\cos t\mathrm{d}u$, $\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}\cos t\mathrm{d}u$,关于 $t\in[\delta,+\infty)$ 都一致收敛,而关于 $t\in[0,\delta]$ 不一致收敛。

定理 11　对任意 $\delta>0$,积分 $\int_0^{+\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t$ 关于 u 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛,在 $(0,\delta]$ 上不一致收敛。

定理 12[1-9]　设 $a>0$,则有 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2}$, $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+b^2}$。

定理 13[1-9]　成立

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^4}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

4　利用无穷区间上积分交换次序定理计算广义积分的方法

定理 14[1,3,9]　成立 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

证明　记 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$,作变换 $x=ut,(u>0)$,得

$$I=\int_0^{+\infty}ue^{-u^2t^2}\mathrm{d}t$$

$$I^2=I\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}Ie^{-u^2}\mathrm{d}u=$$

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}ue^{-u^2t^2}\mathrm{d}t\right)e^{-u^2}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

令 $f(t,u)=ue^{-u^2(1+t^2)}$,则有 $f(t,u)$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上是连续且非负的。

易知积分 $\int_0^{+\infty} f(u,t)\mathrm{d}u$ 关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛,对任意 $B>\beta>0$,积分 $\int_0^{+\infty} f(u,t)\mathrm{d}t$ 关于 u 在 $[\beta,B]$ 上一致收敛,且

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

故由定理 5,交换积分次序是允许的,于是

$$I^2 = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u =$$

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

注意

$$\varphi(u) = \int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t = e^{-u^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u^2t^2}\mathrm{d}(ut) =$$

$$e^{-u^2}I,(u>0),\ \varphi(u) \text{ 在 } (0,+\infty)$$

上连续,$\varphi(u)$ 在 $u=0$ 处不连续,积分 $\int_0^{+\infty} f(u,t)\mathrm{d}t$ 关于 u 在 $(0,\delta)$ 上不一致收敛。

函数 $f(t,u)=ue^{-u^2(1+t^2)}$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上不满足定理 1 的条件,也不满足定理 2 的条件,但满足定理 5 和定理 6 的条件。

定理 15[1-3,8-9] 菲涅尔积分 $\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$。

证明 命 $x^2=t$,那么

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \tag{1}$$

在(1)式右端引入收敛因子 e^{-kt},$(k>0)$,考虑积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kt}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$,将 $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\mathrm{d}u$ 代入,得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-kt}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-kt}\cos t\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+k)t}\cos t\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

记 $f(t,u)=e^{-(u^2+k)t}\cos t$,$(k>0)$。

已知积分 $\int_0^{+\infty} f(u,t)\mathrm{d}t$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛,对任意 $\delta>0$,积分 $\int_0^{+\infty} f(u,t)\mathrm{d}u$ 关于 t 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛,由

$$\int_0^{+\infty}|f(u,t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+k)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{u^2+k}$$

得 $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}|f(u,t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$ 存在。故由定理 5,交换积分次序是允许的,于是

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+k)t}\cos t\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+k)t}\cos t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \tag{2}$$

所以,有

$$\int_0^{+\infty} e^{-kt}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+k)t}\cos t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{k+u^2}{1+(k+u^2)^2}\mathrm{d}u\ (k>0) \tag{3}$$

又因为(3)式两端的积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kt}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$,$\int_0^{+\infty}\frac{k+u^2}{1+(k+u^2)^2}\mathrm{d}u$ 都关于 k 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛,故能在积分号下取极限 $k\to0^+$,在(3)式两端命 $k\to0^+$,即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

故有

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

注意函数 $f(t,u)=e^{-(u^2+k)t}\cos t$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上不满足定理 1 的条件。

类似的,可以给出:

定理 16[1-3,8-9] 菲涅尔积分 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$。

函数 $f(t,u)=e^{-(u^2+k)t}\sin t$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上满足定理 1 的条件,但验证比较复杂[1-2]。验证函数 $f(t,u)=e^{-(u^2+k)t}\sin t$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上满足定理 5 的条件就非常容易。

定理 17[2] 设 α 为实常数,则成立

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t(1+x^2)}\cos\alpha x\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t(1+x^2)}\cos\alpha x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \tag{4}$$

证明 设 $f(x,t)=e^{-t(1+x^2)}\cos\alpha x$,显然 $f(x,t)$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续,因为 $|f(x,t)|\leqslant e^{-t}$,又 $\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ 收敛,所以积分 $\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ 关于 x 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛;任取 $\delta>0$,则当 $t\geqslant\delta$ 时,有 $|f(x,t)|\leqslant e^{-\delta x^2}$,又 $\int_0^{+\infty} e^{-\delta x^2}\mathrm{d}x$ 收敛,从而积分 $\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 t 在

$[\delta,+\infty)$ 上一致收敛;显然 $\int_0^{+\infty}|f(x,t)|\mathrm{d}t$ 是 x 的连续函数,且 $\int_0^{+\infty}|f(x,t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty}e^{-t(1+x^2)}\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}$,又 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛,于是 $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}|f(x,t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$ 存在。利用定理 5,可知(4)式成立。

对函数 $f(x,t) = e^{-t(1+x^2)}\cos\alpha x$,显然 $\int_0^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $(0,\delta]$ 上不一致收敛,满足定理 5 的条件,但不满足定理 1 的条件。

在文献[2]中,为了证明(4)式成立,给出了相当繁琐的证明过程。

定理 18[2,9]　设 $p>1$,则 $\int_0^{+\infty}\cos x^p\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\Gamma(\frac{1}{p})\cos\frac{\pi}{2p}$。

证明　令 $x^p=y$,则 $\int_0^{+\infty}\cos x^p\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\frac{\cos y}{y^{1-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}y$,引入收敛因子 e^{-ky},$(k>0)$,考虑积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ky}\frac{\cos y}{y^{1-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}y$,由于

$$\frac{1}{y^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{p})}\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{p}}e^{-yt}\mathrm{d}t,(y>0)$$

于是

$$\int_0^{+\infty}e^{-ky}\frac{\cos y}{y^{1-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}y =$$
$$\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{p})}\int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{p}}e^{-y(t+k)}\cos y\mathrm{d}t)\mathrm{d}y$$

记

$$f(t,y) = t^{-\frac{1}{p}}e^{-y(t+k)}\cos y,\ (k>0)$$
$$(t,y)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty)$$

容易知道,对任意 $\delta>0$,积分 $\int_0^{+\infty}f(t,y)\mathrm{d}t$ 关于 y 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛;对任意 $\beta>0$,积分 $\int_0^{+\infty}f(t,y)\mathrm{d}y$ 关于 t 在 $[\beta,+\infty)$ 上一致收敛。由

$$\int_0^{+\infty}|f(t,y)|\mathrm{d}y \leqslant \int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{p}}e^{-y(t+k)}\mathrm{d}y = t^{-\frac{1}{p}}\frac{1}{t+k}$$

得 $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}|f(t,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t$ 存在,故由定理 5,交换积分次序是允许的,于是

$$\int_0^{+\infty}e^{-ky}\frac{\cos y}{y^{1-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}y =$$
$$\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{p}}e^{-y(t+k)}\cos y\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y =$$
$$\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{p}}e^{-y(t+k)}\cos y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t =$$
$$\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{p}}\frac{t+k}{1+(t+k)^2}\mathrm{d}t \tag{5}$$

式(5)两端令 $k\to 0^+$,即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos y}{y^{1-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}y = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{p}}\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t =$$
$$\frac{1}{2\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}\int_0^{+\infty}\frac{u^{-\frac{1}{2p}}}{1+u}\mathrm{d}u =$$
$$\frac{1}{2\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}B\left(\frac{1}{2p},1-\frac{1}{2p}\right) =$$
$$\frac{1}{2\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2p}\right) =$$
$$\frac{1}{2\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2p}} =$$
$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{2\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2p}} =$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}$$

故

$$\int_0^{+\infty}\cos x^p\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\frac{\cos y}{y^{1-\frac{1}{p}}}\mathrm{d}y = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}$$

函数 $f(t,y) = t^{-\frac{1}{p}}e^{-y(t+k)}\cos y$ 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上满足定理 5 的条件,但不满足定理 1 的条件。

参 考 文 献:

[1] 常庚哲,史济怀.数学分析教程(下册)[M].北京:高等教育出版社,2003.

[2] 黄玉民,李成章.数学分析(下册)[M].2 版.北京:科学出版社,2007.

[3] 华罗庚,著.王元,校.高等数学引论(第二册)[M].北京:科学出版社,2009.

[4] 复旦大学数学系.数学分析(下册)[M].北京:高等教育出版社,1988.

[5] 张筑生.数学分析新讲(第三册)[M].北京:北京大学

出版社,1990.

[6] 华东师范大学数学系.数学分析[M].北京:高等教育出版社,2001.

[7] 陈纪修,於崇华,金路.数学分析(下册)[M].2 版.北京:高等教育出版社,2003.

[8] 费定晖,周学圣.吉米多维奇数学分析习题集题解(五)[M].济南:山东科学技术出版社,1980.

[9] 裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].北京:高等教育出版社,2002.

[10] 匡继昌.Dirichlet 积分九种解法的思路分析[J].高等数学研究,2012,15(4):61-64.

[11] 黄丽云.被积函数正负性周期变化的反常积分[J].高等数学研究,2013,16(6):9-10.

[12] 宋文章.无界函数的反常积分的计算[J].高等数学研究,2014,17(6):19-21.

Improvement and Application of Sufficient Condition of Integrals Exchange on Two Infinite Interval

XING Jiasheng, *YANG Xiaoyuan*, *BAI Lu*

(1. College of Mathematics and System Science, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. Key Laboratory of Mathematics, Information and Behavior, Ministry of Education, Beijing 100191, China)

Abstract: Considered the sufficient condition of integrals exchange theorem on two infinite intervals, the shortage and limitation of the sufficient condition of classic theorem in mathematical analysis was put forward. Because of the limited range of application, difficulty of solving problem, the expression of classic sufficient condition was proved by the integral dominated convergence theorem of mathematical analysis. Then the proper theoretical height in mathematical analysis was achieved, and a better theoretical result was obtained. Via comparing the examples, it was very convenience to verify the conditions using the new integrals exchange theorem.

Key words: integrals exchange theorem on infinite interval; generalized integral contained parameters; inner close uniform convergence; comparison discriminance; dominated convergence theorem