第 28 卷第 5 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 28 No. 5
2015 年 10 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Otc. 2015
文章编号:1673-1549(2015)05-0097-04 DOI:10.11863/j.suse.2015.05.19

带非线性记忆边界条件的热方程组解的爆破问题

李慧芳

(西华大学理学院, 成都 610039)

摘 要:讨论一类具有幂函数型非线性记忆边界条件的热方程组解的爆破问题。综合应用上下解技巧及一些积分估计,给出了方程组解的整体存在和有限时刻爆破的完整分类,证明了在某些情形下爆破仅在区域边界上发生。

关键词:抛物型方程组;记忆边界条件;爆破;爆破集

中图分类号:O175.2 **文献标志码**:A

引 言

本文研究一类具有幂函数型非线性记忆边界条件的热方程组解的整体存在与爆破

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, v_t = \Delta v, x \in \Omega, t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \int_0^t v^p(x,s)\mathrm{d}s, \dfrac{\partial u}{\partial n} = \int_0^t u^q(x,s)\mathrm{d}s, x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{1}$$

其中,$p > 0$,$q > 0$,Ω 是 R^N 中的一个边界光滑的有界区域,n 是单位外法向量,初值 $u_0(x)$,$v_0(x)$ 是非负连续函数且满足相容条件。利用文献[1-2]中方法可证问题(1)存在局部非负经典解且解的唯一性成立。

近年来,关于这类带有连续时间延迟项的抛物型方程解的爆破问题越来越受到人们的关注[1-8]。文献[1]研究了问题

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, x \in \Omega, t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = u^q\int_0^t u^p(x,s)\mathrm{d}s, x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{2}$$

解的爆破性质。2014 年,陈继芹等在此基础上进一步对带非线性反应项的抛物型方程 $u_t = \Delta u + u^p$ 在时间积分边界条件 $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \int_0^t u^q(x,s)\mathrm{d}s$ 下的初边值问题做了研究[7],并得出了相应的爆破结论。Deng K 和 Dong Z 将上述研究推广到了方程组的情形[8],讨论了方程组

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^{q_1}\int_0^t v^{p_1}(x,s)\mathrm{d}s, v_t = \Delta v, x \in \Omega, t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \dfrac{\partial v}{\partial n} = v^{q_2}\int_0^t u^{p_2}(x,s)\mathrm{d}s, x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{3}$$

的初边值问题。基于以上工作,本文研究了问题(1)解的整体存在及有限时刻爆破的充分条件。

1 预备知识

为了利用上下解方法讨论问题,先给出上下解的定义及比较原理。

定义 1 若 $(\bar{u}(x,t), \bar{v}(x,t)) \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,T])$ 且满足

$$\begin{cases} \bar{u}_t \geqslant \Delta\bar{u}, \bar{v}_t \geqslant \Delta\bar{v}, x \in \Omega, t > 0 \\ \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial n} \geqslant \int_0^t \bar{v}^p(x,s)\mathrm{d}s, \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial n} \geqslant \int_0^t \bar{u}^q(x,s)\mathrm{d}s, x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \bar{u}(x,0) \geqslant u_0(x), \bar{v}(x,0) \geqslant v_0(x), x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{4}$$

则称 $(\bar{u}(x,t), \bar{v}(x,t))$ 是问题(1)的上解。类似地,若

收稿日期:2015-07-23

基金项目:四川省教育厅重点科研项目(14ZA0119);西华大学研究生创新基金(ycjj2015052)

作者简介:李慧芳(1990-),女,山西朔州人,硕士生,主要从事偏微分方程方面的研究,(E-mail)huifangshuxue@163.com

将方程(4)中所有不等号反向,便得到下解 $(\underline{u},\underline{v})$ 的定义。

引理 1 (比较原理)假设 $p \geqslant 1$ 且 $q \geqslant 1$, 若 $(\bar{u},\bar{v})$ 和 $(\underline{u},\underline{v})$ 分别是问题(1)在 $\bar{\Omega} \times [0,T]$ 上的上解和下解,则 $(\bar{u},\bar{v}) \geqslant (\underline{u},\underline{v})$。(证明类似文献[8]中比较原理)

注 1 文献[8]中比较原理的证明过程可知:当 $p < 1$ 或 $q < 1$ 时,结论仍然成立。

2 主要结果

定理 1 当 $pq \leqslant 1$ 时,问题(1)的所有非负解都整体存在。

证明 寻求问题(1)的一个整体上解 $(\bar{u}(x,t),\bar{v}(x,t))$。由文献[9]知,存在函数 $\varphi(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ 满足 $0 < \varphi(x) \leqslant 1, x \in \Omega$ 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \geqslant 1, x \in \partial\Omega$。令 $m_1 = \max_{\Omega} |\nabla\varphi|$, $m_2 = \max_{\Omega} |\Delta\varphi|$, 取 $\bar{u} = Me^{k\delta_1 t + r_1\varphi}$, $\bar{v} = Me^{k\delta_2 t + r_2\varphi}$, 其中

$$M = \max\{\|u_0\|_{L^\infty}, \|v_0\|_{L^\infty}\}$$

$$r_1 = M^{p-1}, r_2 = M^{q-1}, \delta_1 = 1 + p, \delta_2 = 1 + q$$

$$k = \max\left\{\frac{r_1^2 m_1^2 + r_1 m_2}{\delta_1}, \frac{r_2^2 m_1^2 + r_2 m_2}{\delta_2}, \frac{1}{\delta_1 q}, \frac{1}{\delta_2 p}\right\}$$

通过简单计算可得

$$\bar{u}_t - \Delta\bar{u} = Me^{k\delta_1 t + r_1\varphi}(k\delta_1 - r_1^2 m_1^2 - r_1 m_2) \geqslant 0$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial n} - \int_0^t \bar{v}(x,s)\,\mathrm{d}s \geqslant r_1 Me^{k\delta_1 t + r_1\varphi} - \frac{1}{k\delta_2 p}M^p e^{p(k\delta_2 t + r_2\varphi)} \geqslant 0$$

类似地, $\bar{v}_t \geqslant \Delta\bar{v}$, $\frac{\partial\bar{v}}{\partial n} \geqslant \int_0^t \bar{u}^q(x,s)ds$, 此外, $\bar{u}(x,0) = Me^{r_1\varphi} \geqslant M \geqslant u_0$, $\bar{v}(x,0) = Me^{r_2\varphi} \geqslant M \geqslant v_0$。因此 $(\bar{u},\bar{v})$ 是问题(1)的上解,因而由引理 1 及注 1 知:此时问题(1)的解 $(u(x,t),v(x,t))$ 整体存在。

定理 2 当 $pq > 1$ 时,问题(1)的所有非负非平凡解在有限时刻爆破。

证明 设 $c_i(i = 0,1,2\cdots)$ 表示取值不同的正常数。若 $G_N(x,y,t,\tau)$ 是带有齐次 Neumann 边界条件的热方程的 Green 函数,则由文献[10]知,

$$\int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau)\mathrm{d}S_x \geqslant c_0 > 0,\ y \in \bar{\Omega},\ T > t > \tau \geqslant 0 \tag{5}$$

借助 Green 函数,方程组(1)的解有下列表达式:

$$u(x,t) = \int_{\Omega} G_N(x,y,t,0)u_0(y)\mathrm{d}y + \int_0^t\int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau)\int_0^\tau v^p(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

$$v(x,t) = \int_{\Omega} G_N(x,y,t,0)v_0(y)\mathrm{d}y + \int_0^t\int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau)\int_0^\tau u^q(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau \tag{7}$$

分两种情形分别证明结论。

(i)当 $p > 1$ 且 $q > 1$ 时,记

$$F(t) = \int_{\partial\Omega} u(x,t)\,\mathrm{d}S_x \tag{8}$$

由(5)式、(6)式、(8)式及 Jensen 不等式可得

$$F(t) \geqslant \int_{\partial\Omega}\int_{\Omega} G_N(x,y,t,0)u_0(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}S_x \geqslant c_0\int_{\Omega} u_0(y)dy \geqslant c_1 \tag{9}$$

$$F(t) \geqslant \int_{\partial\Omega}\Big(\int_0^t\int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau)\int_0^\tau v^p(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau\Big)\mathrm{d}S_x \geqslant c_0\int_0^t\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau v^p(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau \tag{10}$$

由(5)式、(7)式及 Jensen 不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\partial\Omega} v^p(x,s)\,\mathrm{d}S_x\mathrm{d}S \geqslant \\ &\int_0^t\int_{\partial\Omega}\Big[\int_0^\eta\int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau)\int_0^\tau u^q(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau\Big]^p\mathrm{d}S_x\mathrm{d}\eta \geqslant \\ &c_0^p\int_0^t\int_{\partial\Omega}\Big[\int_0^\eta\int_0^\tau u^q(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\Big]^p\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\eta \geqslant \\ &c_0^p\,|\partial\Omega|^{(1-p)+p(1-q)}t^{3p(1-q)+(1-p)} \\ &\Big(\int_0^t\int_0^\eta\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} u(y,s)\,\mathrm{d}S_y\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\eta\Big)^{pq}\end{aligned} \tag{11}$$

这里 $p > 1, q > 1$, 所以,由(10)式和(11)式得:

$$\begin{aligned}&F(t) \geqslant \\ &c_2\int_0^t \xi^{(1-p)+3p(1-q)}\Big(\int_0^\xi\int_0^\eta\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\eta\Big)^{pq}\mathrm{d}\xi \geqslant \\ &c_2 t^{(1-p)+3[(1-q)+(1-pq)}\Big(\int_0^t (t-s)^3F(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{pq}\end{aligned} \tag{12}$$

令

$$\theta = -\frac{(1-p)+3p(1-q)+(1-pq)}{pq}, \rho = pq$$

则 $0 < \theta < 4, H(t) = F(t)^{\frac{1}{\rho}}$。由(9)式和(12)式得:

$$H(t) \geqslant c_3 + c_4 t^{-\theta}\int_0^t (t-s)^3 H^\rho(S)\,\mathrm{d}s \tag{13}$$

因为 $\rho = pq > 1$ 利用文献[8]中引理 3.2 可得 $H(t)$ 在有限时刻爆破,所以 $F(t)$ 在有限时刻爆破。由此可得问题(1)的解 (u,v) 在有限时刻爆破。

(ii)当 $p \leqslant 1$ 或 $q \leqslant 1$ 时,不妨设 $p \leqslant 1, q > 1$, 即: $q > 1 \geqslant p$ 且 $pq > 1$。由文献[10-11]知,存在 $c_5 > 0$, 使得

$$\int_0^t\int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau)\,\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau \leqslant c_5 t, x \in \bar{\Omega}, t \geqslant 1 \tag{14}$$

由(7)式、(14)式及 Jensen 不等式可得

$$\begin{aligned}&v(x,t) \geqslant \int_0^t\int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau)\int_0^\tau u^q(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau \geqslant \\ &\int_0^t\int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau)\tau^{1-q}\Big(\int_0^\tau u(y,s)\,\mathrm{d}s\Big)^q\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau \geqslant\end{aligned}$$

$$c_5^{1-q}t^{2(1-q)}\left(\int_0^t\int_{\partial\Omega}G_N(x,y,t,\tau)\int_0^\tau u(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau\right)^q \tag{15}$$

此处 $q>1$。

另一方面,由(5)式、(15)式及 Jensen 不等式可得

$$\int_0^t\int_{\partial\Omega}v^p(x,\eta)\,\mathrm{d}S_x\mathrm{d}\eta \geqslant$$

$$c_5^{p(1-q)}\int_0^t\int_{\partial\Omega}\eta^{2p(1-q)}\left(\int_0^\eta\int_{\partial\Omega}G_N(x,y,t,\tau)\right.$$

$$\left.\int_0^\tau u(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau\right)^{pq}\mathrm{d}S_x\mathrm{d}\eta \geqslant$$

$$c_5^{p(1-q)}\ |\partial\Omega|^{1-pq}t^{2p(1-q)+(1-pq)}c_0^{pq}$$

$$\left(\int_0^t\int_0^\eta\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}u(y,s)\,\mathrm{d}S_y\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\eta\right)^{pq} \tag{16}$$

又由(5)式和(10)式可得

$$F(t)\geqslant\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t\int_{\partial\Omega}G_N(x,y,t,\tau)\int_0^\tau v^p(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}S_x \geqslant$$

$$c_0\int_0^t\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau v^p(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau \geqslant$$

$$c_6\int_0^t\xi^{2p(1-q)+(1-pq)}\left(\int_0^\xi\int_0^\eta\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\eta\right)^{pq}\mathrm{d}\xi \geqslant$$

$$c_7t^{2p(1-q)+(1-pq)}\left(\int_0^t(t-s)^3F(s)\,\mathrm{d}s\right)^{pq} \tag{17}$$

令

$$\theta=-\frac{2p(1-q)+(1-pq)}{pq},\rho=pq$$

则 $0<\hat{\theta}<4$,$H(t)=F(t)^{\frac{1}{\rho}}$。由(9)式和(17)式可得

$$\hat{H}(t)\geqslant c_8+c_9t^{-\hat{\theta}}\int_0^t(t-s)^3\hat{H}^\rho(s)\,\mathrm{d}s \tag{18}$$

因为 $\rho=pq>1$ 利用文献[8]中引理 3.2 可得 $\hat{H}(t)$ 在有限时刻爆破,所以 $F(t)$ 在有限时刻爆破。由此可得问题(1)的解 (u,v) 在有限时刻爆破。

定理 3　若 $p>1$ 且 $q>1$, 则问题(1)解的爆破仅在边界上发生。

证明　假设问题(1)的解 (u,v) 在有限时刻 T 爆破。$C_i(i=0,1,2\cdots)$ 是不同的正常数,由(6)式及 Jensen 不等式可得

$$\int_{\partial\Omega}u^q(x,t)\,\mathrm{d}S_x \geqslant$$

$$\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t\int_{\partial\Omega}G_N(x,y,t,\tau)\int_0^\tau v^p(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau\right)^q\mathrm{d}S_x \geqslant$$

$$|\partial\Omega|^{1-q}\left(\int_{\partial\Omega}\int_0^t\int_{\partial\Omega}G_N(x,y,t,\tau)\int_0^\tau v^p(y,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau\mathrm{d}S_x\right)^q \geqslant$$

$$c\left(\int_0^t\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau v^p(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau\right)^q \tag{19}$$

类似地,

$$\int_{\partial\Omega}v^p(x,t)\,\mathrm{d}S_x\geqslant c\left(\int_0^t\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u^q(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau\right)^p \tag{20}$$

令

$$J(t)=\int_0^t\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u^q(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau$$

$$K(t)=\int_0^t\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau v^p(y,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau$$

则有

$$J''(t)\geqslant cK^q(t),K''(t)\geqslant cJ^p(t),t\in[0,T)$$

由文献[8]引理 4.1 知

$$J(t)\leqslant C(T-t)^{-2\alpha},K(t)\leqslant C(T-t)^{-2\beta},t\in[0,T) \tag{21}$$

其中,$\alpha=\dfrac{(p+1)}{(pq-1)}$,$\beta=\dfrac{(q+1)}{(pq-1)}$。

取任意 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 且 $\mathrm{dist}(\partial\Omega,\Omega')=\varepsilon>0$, 对于取定的 Ω', 再取 $\Omega''\subset\subset\Omega$, 使得 $\Omega'\subset\subset\Omega''$, $\mathrm{dist}(\partial\Omega'',\Omega')\geqslant\dfrac{\varepsilon}{3}$ 且 $\mathrm{dist}(\partial\Omega,\Omega'')\geqslant\dfrac{\varepsilon}{3}$, 由文献[8]知:对任意 $\varepsilon>0$, 有

$$0\leqslant G_N(x,y,t,\tau)\leqslant C_\varepsilon,|x-y|\geqslant\frac{\varepsilon}{3},x,y\in\bar{\Omega},0<\tau<t<T \tag{22}$$

由(7)式及(22)式可得:

$$\max_{\overline{\Omega'}}v(x,t)\leqslant C_0+C_\varepsilon J(t)\leqslant C_1(T-t)^{-2\beta}$$

由文献[12]中定理 4.1 可得:

$$v(x,t)\leqslant\frac{C_3}{[\psi(x)+(C_2+1)(T-t)]^{2\beta}}$$

其中,$\psi(x)\in C^2(\overline{\Omega''})$ 满足

$$\psi(x)>0,x\in\Omega'',\psi(x)=0,x\in\partial\Omega''$$

$$\Delta\psi-\frac{\max\{2\alpha+1,2\beta+1\}\ |\nabla\psi|^2}{\psi}\geqslant-C_4,x\in\Omega''$$

所以,$v(x,t)$ 不可能在 $\Omega'\times(0,T)$ 上爆破,即此时爆破只在区域边界上发生。

同理可得 $u(x,t)$ 不可能在 $\Omega'\times(0,T)$ 上爆破,即此时爆破只在区域边界上发生。

3　结束语

本文研究一类具有幂函数型非线性记忆边界条件的热方程组解的爆破性质,不仅给出解整体存在与有限时刻爆破的条件,同时也证明了当多数满足的关系进一步强化时,通过证明爆破不可能在区域内部发生,得到爆破集。

参 考 文 献:

[1] Anderson J R,Deng K,Dong Z.Global solvability for the

heat equation with boundary flux governed by nonlinear memory[J].Quart Appl Math,2011,69:759-770.

[2] Deng K,Kwong M K,Levine H A.The influence of nonlocal nonlinearities on the long time behavior of solutions of Burgers' equation[J].Quart Appl Math,1992,50:173-200.

[3] Du L L,Mu C L,Xiang Z.Global existence and blow-up to a reaction-diffusion system with nonlinear Memory [J].Comm.Pure Appl.Anal,2005,5:721-733.

[4] Pao C V.Solution of a nonlinear integrodifferential system arising in nuclear reactor dynamics[J].J.Math.Anal. Appl,1997,48:470-492.

[5] Hetzer G. A quasilinear functional reaction-diffusion equation from climate modeling[J]. Nonlinear Anal, 1997,30:2547-2556.

[6] Grasselli M,Pata V.A reaction-diffusion equation witn memory[J].Discrete Contin.Dyn.Syst.Ser,2006,15:1079-1088.

[7] 陈继芹,王玉兰,宋小军.一类带记忆边界条件的抛物型方程的爆破问题[J].四川大学学报:自然科学版,2014(2):229-235.

[8] Deng K,Dong Z.Blow up of a parabolic system with nonlinear memory[J].Dynamics of Continuous,Discrete and Impulsive System Series A,2012,19:729-743.

[9] Deng K,Xu M.On solutions of a singular diffusion equation[J].Nonlinear Anal,2000,41:489-500.

[10] Hu B,Yin H M.Critical exponents for a system of heat equations coupled in a non-linear boundary condition[J]. Math Methods Appl.Sci,1996,19:1099-1120.

[11] Garroni M G,Menaldi J L.Green Function for Second Order Parabolic Integro-Differential Problems[M]. New York:Longman,1992.

[12] Hu B,Yin H M.The profile near blow up time for solutions of heat equation with a nonlinear boundary condition[J].Trans Amer Math Soc,1994,346:117-135.

Blow-up Analysis for the Heat System with a Nonlinear Memory Boundary Condition

LI Huifang

(School of Science, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: A kind of blow-up problems of heat system with power function type nonlinear memory boundary condition are discussed. By using the upper and lower solution technique and some integral estimates, a complete classification of the global existence and blow-up in finite time of solutions of the equation system is given. At the same time, it is proved that under certain conditions blow-up occurs only on the area boundary.

Key words: parabolic system; memory boundary condition; blow-up; blow-up set