第 28 卷第 5 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 28　No. 5
2015 年 10 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Otc. 2015
文章编号:1673-1549(2015)05-0089-04　　DOI:10.11863/j.suse.2015.05.17

向量值集值形式广义博弈 Nash 平衡的存在性

计　伟,张珺铭

(贵州建设职业技术学院,贵阳 551400)

摘　要:对常见博弈模型中的策略集和支付函数进行抽象化,构造其向量值集值形式意义下的广义博弈模型,并定义相应的 Nash 平衡点和向量值集值形式广义博弈的最优回应映射,证明最优回应映射的不动点与其 Nash 平衡点是等价的。最后对抽象化的策略集和支付函数作相应的假设,获得了广义博弈模型 Nash 平衡点的两个存在性定理,推广了 Nash 平衡点存在性结果。

关键词:广义博弈;Nash 平衡;最优回应映射;集值映射

中图分类号:O225;O177　　**文献标志码**:A

1　模型构造

(1)设 $N = \{1,2,\cdots n\}$ 为局中人集合。

(2)对任意 $i\in N$, 局中人 i 的策略集合为 X_i, 定义集值映射: $G_i:X_{\hat{i}} \to P_0(X_i)$ 是第 i 个局中人的可行策略映射。

(3)对局中人 i, 定义集值映射: $U_j^i:G_i(X_{\hat{i}}) \to P_0(X_i)$, 对任意 $x_{\hat{i}} \in G_i(X_{\hat{i}})$, $U_j^i(x_i,x_{\hat{i}}) \subset P_0(X_i)(j = 1,2,\cdots,k)$, 表示在策略组合空间中除局中人 i 外其他 $n-1$ 个人选择 $x_{\hat{i}}$ 时,局中人 i 在可行策略集 $G_i(X_{\hat{i}})$ 中的第 j 个分量中所有比 X_i 更好的元组成的集合。定义集值映射: $F^i = (U_1^i,U_2^i,\cdots,U_k^i):X \to P_0(X^k)$ 如下: $F^i = \prod_{j=1}^{k} U_j^i$, 对任意 $x_{\hat{i}} \in G_i(X_{\hat{i}})$, $F^i(x_i,x_{\hat{i}}) \subset P_0(X_i^k)$, 表示在策略组合空间中除局中人 i 其他 $n-1$ 个人选择 $x_{\hat{i}}$ 时,局中人 i 在可行策略集 $G_i(X_{\hat{i}})$ 中至少不比 x_i 更差的元组成的集合。其中, $\hat{i} = N\backslash\{i\}$, $X_{\hat{i}} = (X_1,X_2,\cdots,X_{i-1},X_{i+1}\cdots X_n)$, $X_{\hat{i}} = \prod_{j=1}^{k} X_j$。则: $\Gamma = \{N;G_1,G_2,\cdots,G_n;F^1,F^2,\cdots,F^n\}$, 构成一个博弈,称为向量值集值形式广义博弈[1-4]。

定义 1[2-4]　如果对任意 $x_{\hat{i}}^* \in X_{\hat{i}}$, 对任意 $y_i \in G_i(X_{\hat{i}})$, 存在 $x_i^* \in G_i(X_{\hat{i}}^*)$, 使得 $F^i(y_i,x_{\hat{i}}^*) - F^i(x_i^*,x_{\hat{i}}^*) = \phi$, 则称 $x^* \in X$ 为向量值集值形式广义博弈的 Nash 平衡点。该平衡点的意义是很清楚的,表示对任意的 $i \in N$, $x_i^* \in G_i(X_{\hat{i}})$, 在 N 中除局中人 i 外,其他 $n-1$ 个局中人选取策略 $x_{\hat{i}}^* \in X_{\hat{i}}$ 时,对任意的 $y_i \in G_i(X_{\hat{i}})$, $F^i(y_i,x_{\hat{i}}^*) - F^i(x_i^*,x_{\hat{i}}^*) \neq \phi$ 是不可能的,这样的结果是每个局中人都可以接受的。

定义 2[2-4]　对任意 $i \in N$, 定义集值映射: $B_i:X_{\hat{i}} \to P_0(X_i)$ 如下:对每一 $x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}$, 对任意的 $y_i \in G_i(X_{\hat{i}})$, $B_i(x_{\hat{i}}) = \{y_i \in X_i:F^i(y_i,x_{\hat{i}}^*) - F^i(x_i^*,x_{\hat{i}}^*) = \phi\}$ 称 B_i 为局中人 i 对 $x_{\hat{i}}$ 的最优回应映射。对任意 $x \in X$, 定义集值映射 $B:X \to P_0(X)$ 如下:对任意 $x = (x_1,x_2,\cdots x_n) \in X$, $B(x) = \prod_{i=1}^{n} B_i(x_{\hat{i}})$, 则称 B 为该向量值集值形式广义博弈的最优回应映射。

2　预备知识

为给出向量值集值形式的广义博弈 Nash 平衡的存在性定理,下面给出有关集映射以及向量值函数的连续性、凸性等概念。

定义 3[1,5]　假设 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间, C 是

收稿日期:2015-07-30

作者简介:计 伟(1984-),男,贵州遵义人,助教,硕士,主要从事博弈论与非线性分析、最优化理论与方法方面的研究,(E-mail)jiwei10000@126.com

X 中的非空子集,如果对任意的 $x \in C$,对任意的 $\lambda > 0$,都有 $\lambda x \in C$,则称 C 是 X 中的一个锥,此时必有 $\lambda C = C$。如果锥 C 是闭集,则称 C 是闭锥,此时必有 $0 \in C$。如果锥 C 是凸集,则称 C 是凸锥,此时必有 $C + C = C$。如果 C 是锥,且对任意的 $x \in C \backslash \{0\}$,必有 $-x \notin C$,则称 C 是尖锥。

定义 4[1,5] 假设 X, Y 是两个拓扑空间,K 是 X 中的一个非空子集,集值映射 $F: K \to P_0(Y)$, $x \in K$,若对任何 Y 中的开集 G, $G \supset F(x)$,存在 x 在 X 中的开领域 $O(x)$,使得对任意的 $x' \in O(x)$ 有 $F(x') \subset G$,则称 F 在 x 处是上半连续的,如果 F 在 K 上每一点均是上半连续的,则称 F 在 K 上是上半连续的;若对任何 Y 中的开集 G, $G \cap F(x) \neq \phi$,存在 x 在 X 中的开领域 $O(x)$,使得对任意的 $x' \in O(x)$ 有 $F(x') \cap G \neq \phi$,则称 F 在 x 处是下半连续的,如果 F 在 K 上每一点均是下半连续的,则称 F 在 K 上是下半连续;若 F 在 x 处既上半连续又下半连续,则称 F 在 x 处是连续的,如果 F 在 K 上每一点均是连续的,则称 F 在 K 上是连续的。

定义 5[5-6] 假设 X 是一个拓扑空间,Y 是一个拓扑向量空间,K 是 X 中的一个非空子集,K 是 X 中的一个非空子集,C 是 Y 中的一个闭凸尖锥,向量值映射 $\varphi: K \to Y, x \in K$;若对 Y 中的零元 θ 的任何开领域 O,存在 x 在 X 中的开领域 $U(x)$ 使得对任意的 $x' \in U(x)$ 有 $\varphi(x') \in \varphi(x) + O + C$,则称 φ 在 x 处是 C - 连续的,如果 φ 在 K 上每一点均是 C - 连续的,则称 φ 在 K 上是 C - 连续的。

定义 6[5,7] 假设 X 是一个拓扑空间,Y 是一个拓扑向量空间,K 是 X 中的一个非空子集,K 是 X 中的一个非空子集,C 是 Y 中的一个闭凸尖锥,$F: K \to Y, x \in K$,若对 Y 中的零元 θ 的任何开领域 O,存在 x 在 X 中的开领域 $U(x)$ 使得对任意的 $x' \in U(x)$ 有 $F(x') \in F(x) + O + C$,则称 F 在 x 处是上半 C - 连续的,如果 F 在 K 上每一点均是上半 C - 连续的,则称 F 在 K 上是上半 C - 连续的;若对 Y 中的零元 θ 的任何开领域 O,存在 x 在 X 中的开领域 $U(x)$ 使得对任意的 $x' \in U(x)$ 有 $F(x') \cap (F(x) + O + C) \neq \phi$,则称 F 在 x 处是下半 C - 连续的,如果 F 在 K 上每一点均是下半 C - 连续的,则称 F 在 K 上是下半 C - 连续的。若 F 在 x 处既是上半 C - 连续的,又是下半 C - 连续的,则称 F 在 x 处是 C - 连续的;如果 F 在 K 上每一点均是 C - 连续的,则称 F 在 K 上是 C - 连续的。

特别地,当 F 是一个单值映射时,用符号 $\in$ 代替 $\subset$,此时 C - 连续与下半 C - 连续均等价于向量值函数的 C - 连续。

一般地,在向量拓扑空间中若集值映射时上半连续(下半连续、连续)的,则必是 C - 连续(下半 C - 连续、C - 连续)的,反之不然。

定义 7[5,7] 设 X, Y 是两个拓扑向量空间,K 是 X 中的一个非空凸子集,C 是 Y 中的一个闭凸尖锥,且 $\mathrm{int}C \neq \phi$, $\mathrm{int}C$ 表示 C 的内部,$\varphi: K \to Y$ 是一个向量值函数。若对任意 $x_1, x_2 \in K$ 和任意的 $t \in [0,1]$,有:$\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) - [t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2)] \in -C$,则称 φ 是 C - 凸的;若 $-\varphi$ 是 C - 凸的,则称 φ 是 C - 凹的。

定义 8[5,7] 设 X, Y 是两个拓扑向量空间,K 是 X 中的一个非空凸子集,C 是 Y 中的一个闭凸尖锥,且 $\mathrm{int}C \neq \phi$, $\mathrm{int}C$ 表示 C 的内部,$F: K \to P_0(Y)$ 是一个集值映射。若对任意 $x_1, x_2 \in K$ 和任意的 $t \in [0,1]$,有:$F(tx_1 + (1-t)x_2) \subset tF(x_1) + (1-t)F(x_2) - C$,则称 F 是 C - 凸的;若 $-F$ 是 C - 凸的,则称 F 是 C - 凹的。

3 主要结果

首先给出向量平衡问题解的存在性引理。

引理 1[8-10] 设 X 是是赋范线性空间 E 中的非空凸紧集,$\varphi: X \times X \to P_0(H)$ 满足:

(1)对任意的 $y \in X$, $x \to \varphi(x,y)$ 是上半 C - 连续的。

(2)对任意的 $x \in X$,集合 $D = \{y \in X: \varphi(x,y) \subset \mathrm{int}C\}$ 是凸的。

(3)对任意的 $x \in X$, $\varphi(x,x) \not\subset \mathrm{int}C$。

则存在 $x^* \in X$,使得对任意的 $y \in X$, $\varphi(x^*, y) \not\subset \mathrm{int}C$。

引理 2[8-10] 设 X 是赋范线性空间 E 中的非空凸紧集,$\varphi: X \times X \to P_0(H)$ 满足:

(1)对任意的 $y \in X$, $x \to \varphi(x,y)$ 是上半 C - 连续的。

(2)对任意的 $x \in X$, $y \to \varphi(x,y)$ 是 C - 凹的。

(3)对任意的 $x \in X$,有:$\varphi(x,x) \not\subset \mathrm{int}C$。

则存在 $x^* \in X$,使得对任意的 $y \in X$, $\varphi(x^*, y) \not\subset \mathrm{int}C$。

定理 1 $x^* \in X$ 是向量值集值形式广义博弈 Γ 的 Nash 平衡点当且仅当 $x^* \in X$ 是集值映射 $B: X \to P_0(X)$ 的不动点。

证明 充分性:设 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) \in X$ 为最优回应映射 $B: X \to P_0(X)$ 的不动点,则对任意的 $i \in N$, $x_i^* \in B_i(x_{\hat{i}}^*)$,即对任意的 $x_{\hat{i}}^* \in X_{\hat{i}}$,对每一 $y_i \in G_i(X_{\hat{i}})$ 存在 $x_i^* \in G_i(X_{\hat{i}})$,使得 $F^i(y_i, x_{\hat{i}}^*) - F^i(x_i^*, x_{\hat{i}}^*) = \phi$,所以 $x^* = (x_i^*, x_{\hat{i}}^*)$ 是向量值集值形式广义博弈 Γ 的 Nash 平衡点。

必要性:设 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) \in X$ 向量值集值形式广义博弈 Γ 的 Nash 平衡点,对任意 $i \in N$, 对任意的,对任意 $y_i \in G_i(X_{\hat{i}}) F^i(y_i, x_{\hat{i}}^*) - F^i(x_i^*, x_{\hat{i}}^*) = \phi$, 即对任意的 $x_i^* \in G_i(X_{\hat{i}}^*)$, $x_i^* \in B_i(x_{\hat{i}}^*)$, 所以 $x^* = (x_i^*, x_{\hat{i}}^*)$ 是最优回应映射 $B: X \to P_0(X)$ 的不动点。

定理2　设向量值集值形式广义博弈为 $\Gamma = \{N; G_1, G_2, \cdots, G_n; F^1, F^2, \cdots, F^n\}$

(1)对任意的 $i \in N$, X_i 是欧氏空间中的非空紧凸集, $G_i: X_{\hat{i}} \to P_0(X_i)$, 对任意的 $x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}$, $G_i(x_{\hat{i}})$ 是非空紧凸集。

(2)对任意的 $i \in N$, 对任意 $j(j = 1, 2, \cdots, k)$, U_j^i 是上半 C - 连续的。

(3)对任意的 $i \in N$, 对任意 $j(j = 1, 2, \cdots, k)$, 对任意 $x_i \in X_i$, $U_j^i(x_i, u_{\hat{i}})$ 在 $X_{\hat{i}}$ 上是下半 C - 连续的。

(4)对任意的 $i \in N$, 对任意 $j(j = 1, 2, \cdots, k)$, 对任意 $x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}$, $u_i \to U_j^i(u_i, x_{\hat{i}})$ 在 X_i 上是 C - 拟凹的。

则:博弈 Γ 存在平衡点。

证明　考虑平衡问题: $\varphi: X \times X \to R^k$ 对任意 $x = (x_i, x_{\hat{i}})$, $y = (y_i, y_{\hat{i}}) \in X$, $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (F^i(y_i, x_{\hat{i}}) - F^i(x_i, x_{\hat{i}}))$ 容易验证 $\varphi: X \times X \to R^k$。

(1)对任意的 $y \in X$, $x \to \varphi(x, y)$ 在 X 上是上半 R_+^k - 连续的。

(2)对任意的 $x \in X$, $y \to \varphi(x, y)$ 是 C - 凹的。

(3)对任意的 $x \in X$, $\varphi(x, x) \not\subset \mathrm{int} R_+^k$。

由引理 2,存在 $x^* \in X$, 使得对任意的 $y \in X$, $\varphi(x^*, y) \not\subset \mathrm{int} R_+^k$。

下证 x^* 是 Γ 的平衡点。事实上, $\forall i \in N$, 对任意的 $y_i \in G_i(X_{\hat{i}})$, $\exists x_i^* \in G_i(X_{\hat{i}})$,令 $y = (y_i, x_{\hat{i}}) \in X$,则

$$\varphi(x^*, y) = \sum_{i=1}^{n} (F^i(y_i, x_{\hat{i}}) - F^i(x_i^*, x_{\hat{i}}^*)) = \varnothing$$

即对任意的 $i \in N$ 有: $F^i(y_i, x_{\hat{i}}^*) - F^i(x_i^*, x_{\hat{i}}) = \varnothing$,所以, $x^* = (x_i^*, x_{\hat{i}}^*)$ 是博弈 Γ 的平衡点。

以上是考虑 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = k$ 时的情形,下面考虑 $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_n$ 的情况。

定理3　设向量值集值形式广义博弈为 $\Gamma = \{N; G_1, G_2, \cdots, G_n; F^1, F^2, \cdots, F^n\}$, 其中 $F^i = (U_1^i, U_2^i, \cdots, U_{k_i}^i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$,

(1)对任意的 $i \in N$, X_i 是赋范线性空间 E 中的非空凸紧集, $G_i: X_{\hat{i}} \to P_0(X_i)$, 对任意的 $x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}$, $G_i(x_{\hat{i}})$ 是非空紧凸集。

(2)对任意的 $i \in N$, 对任意 $j(j = 1, 2, \cdots, k)$, U_j^i 是上半 C - 连续的。

(3)对任意的 $i \in N$, 对任意 $j(j = 1, 2, \cdots, k)$, 对任意 $x_i \in X_i$, $U_j^i(x_i, u_{\hat{i}})$ 在 $X_{\hat{i}}$ 上是下半 C - 连续的。

(4)对任意的 $i \in N$, 对任意 $j(j = 1, 2, \cdots, k)$, 对任意 $x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}$, $u_i \to U_j^i(u_i, x_{\hat{i}})$ 在 X_i 上是 C - 凹的。

则:博弈 Γ 存在平衡点。

证明　考虑平衡问题: $\varphi: X \times X \to R^{k_n}$, 对任意的 $x = (x_i, x_{\hat{i}})$, $y = (y_i, y_{\hat{i}}) \in X$, $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x, y)$,

其中,

$$\varphi_i(x, y) = (\underbrace{F^i(y_i, x_{\hat{i}}) - F^i(x_i, x_{\hat{i}})}_{k_i\text{个分量}}, \varphi_i(x, y)) \in R^{k_n}$$

$$\varphi_i(x, y) = \underbrace{(U_1^i(y_i, x_{\hat{i}}) - U_1^i(x_i, x_{\hat{i}}), \cdots, U_1^i(y_i, x_{\hat{i}}) - U_1^i(x_i, x_{\hat{i}}))}_{k_n - k_i\text{个分量}}$$

容易验证 $\varphi: X \times X \to R^{k_n}$ 满足:

(1)对任意的 $y \in X$, $x \to \varphi(x, y)$ 在 X 上是上半 $R_+^{k_n}$ - 连续的。

(2)对任意的 $x \in X$, $y \to \varphi(x, y)$ 是 $R_+^{k_n}$ - 凹的。

(3)对任意的 $x \in X$, $\varphi(x, x) \not\subset \mathrm{int} R_+^{k_n}$。

由引理 2,存在 $x^* \in X$, 使得对任意的 $y \in X$, $\varphi(x^*, y) \not\subset \mathrm{int} R_+^{k_n}$。

下证 x^* 是 Γ 的平衡点。事实上, $\forall i \in N$, 对任意的 $y_i \in G_i(X_{\hat{i}})$, $\exists x_i^* \in G_i(X_{\hat{i}})$,令 $y = (y_i, x_{\hat{i}}) \in X$, 则 $\varphi_i(x^*, y) = \varphi(x^*, y) = \phi$, 如果 $F^i(y_i, x_{\hat{i}}^*) - F^i(x_i^*, x_{\hat{i}}^*) \neq \phi$, 则对任意 j, $U_j^i(y_i, x_{\hat{i}}^*) - U_j^i(x_i^*, x_{\hat{i}}^*) \neq \phi$, 从而 $\varphi_i(x^*, y) \subset \mathrm{int} R_+^{k_n}$, 与 $\varphi_i(x^*, y) = \phi$ 矛盾。因此, $\forall i \in N$, 及对任意的 $y_i \in G_i(X_{\hat{i}})$, $\exists x_i^* \in G_i(X_{\hat{i}})$, $F^i(y_i, x_{\hat{i}}) - F^i(x_i^*, x_{\hat{i}}) = \varnothing$, 所以: $x^* = (x_i^*, x_{\hat{i}})$ 是博弈 Γ 的平衡点。

4　结束语

在许多经典博弈模型中,如:囚徒困境、性别战博弈、Curnot 双头垄断模型、鹰鸽博弈、Betrand 双头垄断模型等,都认为偏好应具有传递性,并认为偏好具有传递性是合乎逻辑与理性的,且在偏好具有传递性基础上获得了 Nash 平衡点存在性结果,而在经济问题中常有现象:一个人可能认为苹果要好于香蕉,且香蕉要好于菠萝,但只有苹果与菠萝时,他可能认为菠萝要好于苹果而不是苹果要好于菠萝。以上例子说明,某些特定环境下,偏好不一定具有传递性。因此,在定理 2 与定理 3 中是对策略集和支付函数进行抽象化处理,在不考虑偏好基本性质(传递性)的条件下获得的结果,推广了 Nash 平衡的存在性结果。

参 考 文 献:

[1] 俞建,博弈论选讲[M].北京:科学出版社,2014.

[2] 杨哲,蒲勇健.广义不确定下广义博弈中 NS 均衡的存在性[J].中国管理科学,2013,21(5):165-171.

[3] 陈治友,夏顺友.抽象凸空间中广义博弈 Nash 平衡点的存在性[J].辽宁工程技术大学学报:自然科学版,2012,31(5):786-791.

[4] 计伟,刘安祥,陈静.极大元与 Nash 平衡[J].西南民族大学学报:自然科学版,2012(2):194-198.

[5] 杨辉.非线性问题:良定性、通有稳定性及本质连通区[D].杭州:浙江大学,2002.

[6] Shu wenxiang,Wen shengjia,Ji haohe,et al.Some results concerning the generic continuity of set-valued mappings [J].Nonlinear Analysis,2012,75:3591-3597.

[7] Wen shengjia,Shu wenxiang,Jihao He,et al.Existence and stability of weakly Pareto-Nash equilibrium for generalized multiobjective multi-leader-follower games[J].Journal of Global Optimization,2015,61:151-157.

[8] 俞建,袁先智.樊畿不等式及其在博弈论中的应用[J].应用数学与计算数学学报,2015(1):59-68.

[9] Blackwell D.An Analog of the Minimax Theorem for Vector payoffs[J].Pac J Math,1956,6:1-8.

[10] Shapley L S.Equilibrium points in Games with Vector payoffs[J].Naval Researth Logistics Quarterly,1959,6:57-61.

Existence of Generalized Game Nash Equilibrium in the Form of Vector Valued Set-valued

JI Wei, *ZHANG Junming*

(Guizhou Polytechnic of Construction, Guiyang 551400, China)

Abstract: The strategy set and payoff function in the common game model are abstracted, and generalized game model of vector-valued set-valued form is constructed, then best response mapping of relevant Nash equilibrium point and generalized game of vector valued set-valued is defined. It is proved that the fixed point of best response mapping and Nash equilibrium point is equivalent. finally, two existence theories of Nash equilibrium point of generalized game model are obtained by doing relevant hypothsis of abstract strategy set and payoff function, and the existence result of Nash equilibrium point is extended.

Key words: generalize game; Nash equilibrium; best response mapping; set-valued mapping