第 28 卷第 5 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 28　No. 5
2015 年 10 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Otc. 2015

文章编号:1673-1549(2015)05-0093-03　　DOI:10.11863/j. suse. 2015. 05. 18

S-*σ*- 仿 *Lindelof* 空间和 *S*-*σ*- 仿紧空间及其乘积性质

丁　猛, 朱培勇

(电子科技大学数学科学学院, 成都　611731)

摘　要:类比 *S* -仿紧空间,引入 *S*-*σ*- 仿紧空间与 *S*-*σ*- 仿 *Lindelof* 空间的概念。给出了 *S*-*σ*- 仿 *Lindelof* 空间的一个充要条件和 *S*-*σ*- 仿 *Lindelof* 对完备优柔映射下的一个逆保持性质。利用所获得的这两个结果证明了 *S*-*σ*- 仿 *Lindelof* 空间与紧空间的乘积仍是 *S*-*σ*- 仿 *Lindelof*。最后指出: *S*-*σ*- 仿紧空间具有类似于 *S*-*σ*- 仿 *Lindelof* 空间结果。

关键词: *S*-*σ*- 仿 *Lindelof*;*S*-*σ*- 仿紧; *σ*- 局部可数; *σ*- 局部有限

中图分类号:O189. 11　　**文献标志码**:A

引　言

2006 年,AL－ZOUBI K Y 类比仿紧空间在文献[1]中引入了 *S*- 仿紧空间的概念,并且得到了 *S*- 仿紧空间的一些性质。文献[2－3]中获得了 *σ* 仿 *Lindelof* 空间一系列 *Tychonoff* 乘积的性质。

本文通过类比文献[1]引入 *S*- 仿紧的方法引入 *S*-*σ*- 仿 *Lindelof* 空间与 *S*-*σ*- 仿紧空间,并且研究 *S*-*σ*- 仿 *Lindelof* 空间的等价刻画和映射性质,获得一个等价刻画和一个逆映射的保持性质。然后,利用所获得的结果,证明关于 *S*-*σ*- 仿 *Lindelof* 空间的 *Tychonoff* 乘积定理。

1　预备知识

定义 1[4]　设 X 是任一非空集合, T 是 X 的一些子集构成的集族,如果下列三个条件被满足:

(O1) $X \in T$, $\phi \in T$。

(O2)若 G_1, $G_2 \in T$, 则 $G_1 \cap G_2 \in T$。

(O3)若 $G_\lambda \in T(\lambda \in \Lambda)$,其中 Λ 是任意指标集,则 $\cup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \in T$。

则称 T 为集合 X 上的一个拓扑,并且称有序偶 (X, T) 为一个拓扑空间,集族 T 中的每一个集合都称为拓扑空间 (X,T) 的开集。

定义 2[1,5]　(X,T) 是一个拓扑空间,集合 A 是 X 的子集,称集合 A 为半开集,如果 X 中存在开集 G, 使得 $G \subset A \subset cl(G)$ 成立,其中 $cl(G)$ 表示为集合 G 的闭包。

定义 3[1,6]　称映射 f:$X \to Y$ 是一个优柔映射(irresolute mapping),如果 Y 中任意半开集 G,$f^{-1}(G)$ 是 X 中的半开集。

定义 4[2]　设 G 是拓扑空间 X 的一些子集所构成的集合族。

(1) G 称为是局部可数的,如果 $\forall x \in X$, $\exists U \in U(x)$ 使得 $(G)_U = \{G \in G \mid G \cap U \neq \phi\}$ 为至多可数的集族。

(2) G 称为是 σ- 局部可数的,如果 G 能表示成可数

收稿日期:2015-07-08

作者简介:丁　猛(1992-),男,河南永城人,硕士生,主要从事拓扑学和混沌理论方面的研究,(E-mail) 416374819@ qq. com;
朱培勇(1956-),男,四川自贡人,教授,主要从事拓扑学和混沌理论方面的研究,(E-mail)zpy6940@ sina. com

个局部可数集族的并,即 $G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$, 其中每个 G_n 是局部可数的。

(3) G 称为是局部有限的,如果 $\forall x \in X$, $\exists U \in U(x)$ 使得 $(G)_U = \{G \in G \mid G \cap U \neq \phi\}$ 为至多有限的集族。

(4) G 称为 σ- 局部有限的,如果 G 能表示成可数个局部有限集族的并,即 $G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$, 其中每个 G_n 是局部有限的。

定义 5[4] X 的一个覆盖 U 称为是一个定向覆盖,如果对于 U 的任意有限子集族 $U_1 \subset U$, 都有 $\cup U_1 \subset U$。

定义 6[7] 称映射 $f:X \to Y$ 是一个闭映射(closed mapping),如果对于 X 中任意闭子集 A,$f(A)$ 都是 Y 中闭子集。

定义 7[7] 称连续映射 $f:X \to Y$ 是一个完备映射(perfect mapping),如果 f 是一个闭映射,并且任意 $y \in Y$, 都有 $f^{-1}(y)$ 是 X 中的紧子集。

引理 1[3] 设 X 与 Y 是两个拓扑空间,则连续映射 $f:X \to Y$ 是一个闭映射当且仅当对于 $\forall y \in Y$ 且 X 中任意包含 $f^{-1}(y)$ 的开集 G, 都存在一个 y 的开邻域 U 使得 $f^{-1}(y) \subset G$。

引理 2[3] 如果 X 是紧空间, Y 是 T_2 空间,则投影映射 $P_Y:X \times Y \to Y$ 是完备映射。

类比文献[1]引入 *S*- 仿紧空间的方法引入 S-σ- 仿 *Lindelof* 空间与 S-σ- 仿紧空间[1,8]。

定义 8 设 (X,T) 是一个拓扑空间。

(1)称 (X,T) 是 S-σ- 仿 *Lindelof* 空间,如果 X 的每个开覆盖都有 σ- 局部可数的半开加细。

(2)称 (X,T) 是 S-σ- 仿紧空间,如果 X 的每个开覆盖都有 σ- 局部有限的半开加细。

在本文,所涉及到的关于拓扑学中的概念、术语与符号等,如果没有特别申明,都取自于文献[9-10]。

2 主要结论

引理 3 (X,T) 是一个拓扑空间,集合 A 是 X 的子集,且集合 A 为 X 的一个半开集, O 为 X 的一个开集,则 $O \cap A$ 是 X 的半开集。

证明 因为 A 为 X 的一个半开集,故存在开集 $G \in T$, 使得 $G \subset A \subset cl(G)$ 成立,则有 $G \cap O \subset A \cap O \subset cl(G) \cap O$。

证 $cl(G) \cap O \subset cl(G \cap O)$。事实上,对于 $\forall x \in cl(G) \cap O$, 因为 $x \in cl(G)$, 则 $\forall U \in U(x)$, 有 $G \cap U \neq \phi$, 又因为 $x \in O$, 并且 O 为 X 的开集,则 $O \in U(x)$, 因此, $O \cap U \in U(x)$, 故 $G \cap O \cap U \neq \phi$, 从而, $x \in cl(G \cap O)$, 所以, $cl(G) \cap O \subset cl(G \cap O)$。于是,存在 X 中开集 $G \cap O$ 使得 $G \cap O \subset A \cap O \subset cl(G \cap O)$, 则 $O \cap A$ 是 X 中的一个半开集。

定理 1 拓扑空间 (X,T) 是 S-σ- 仿 *Lindelof* 空间当且仅当 X 的每个定向开覆盖都有一个 σ- 局部可数的半开加细。

证明 充分性 设 $U = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ 是 X 的任一开覆盖,令 $U^F = \{\cup_{\alpha \in \theta} U_\alpha \mid \theta \in [\Lambda]^{<\omega}\}$, 其中 $[\Lambda]^{<\omega}$ 表示 Λ 的所有非空有限子集构成的集族。由定义 4 可知, U^F 是 X 的一个定向开覆盖,由已知, U^F 有一个 σ- 局部可数的半开加细 $G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n = \cup_{n=1}^{\infty} \{G_{n\theta} \mid \theta \in [\Lambda]^{<\omega}\}$, 合于每个 $G_n = \{G_{n\theta} \mid \theta \in [\Lambda]^{<\omega}\}$ 是局部可数的,并且对于 $\forall \theta \in [\Lambda]^{<\omega}$, 有 $G_{n\theta} \subset \cup_{\alpha \in \theta} U_\alpha$。

对于 $\forall n \in N$, 令 $H_n = \{G_{n\theta} \cap U_\alpha \mid \alpha \in \theta \in [\Lambda]^{<\omega}\}$, 证 $H = \cup_{n=1}^{\infty} H_n$ 是 U 的一个 σ- 局部可数的半开加细。事实上,对 $\forall n \in N$, $\forall \theta \in [\Lambda]^{<\omega}$, $\forall \alpha \in \theta$, 有 $G_{n\theta} \cap U_\alpha \subset U_\alpha$, 并且

$$\cup H = \cup_{\theta \in [\Lambda]^{<\omega}} \cup_{\alpha \in \theta} \cup_{n=1}^{\infty} (F_{n\theta} \cap U_\alpha) =$$
$$\cup_{n=1}^{\infty} \cup_{\theta \in [\Lambda]^{<\omega}} (F_{n\theta} \cap (\cup_{\alpha \in \theta} U_\alpha)) =$$
$$\cup_{n=1}^{\infty} \cup_{\theta \in [\Lambda]^{<\omega}} G_{n\theta} = \cup_{n=1}^{\infty} \cup G_n = \cup G = X$$

因此, $H = \cup_{n=1}^{\infty} H_n$ 是 U 的一个加细。

另外,因为 $G_{n\theta}$ 是半开集, U_α 是开集,由引理 3 知, $G_{n\theta} \cap U_\alpha$ 是半开集,故 $H = \cup_{n=1}^{\infty} H_n$ 是 U 的一个半开加细。因为任意 $G_n = \{G_{n\theta} \mid \theta \in [\Lambda]^{<\omega}\}$ 是局部可数的,即对于 $\forall x \in X$, 存在 $U \in U(x)$ 使得

$$\{\theta \in [\Lambda]^{<\omega} \mid G_{n\theta} \cap U \neq \phi\} \subset \{\theta_1, \theta_2, \cdots\}$$

为至多可数集,其中每个 $\theta_i \in [\Lambda]^{<\omega}$, 又因为 $\{\alpha \in \theta \mid F_{n\theta} \cap U_\alpha \in (H_n)_U\} \subset \cup_{i=1}^{\infty}\theta_i$, 即 $(H_n)_U$ 为至多可数集,因此,每个 $H_n = \{G_{n\theta} \cap U_\alpha \mid \alpha \in \theta \in [\Lambda]^{<\omega}\}$ 都是局部可数集族,即 $H = \cup_{n=1}^{\infty} H_n$ 是 σ- 局部可数的。从而, $H = \cup_{n=1}^{\infty} H_n$ 是 U 的一个 σ- 局部可数的半开加细,空间 X 是 S-σ- 仿 *Lindelof* 空间。

必要性 由 S-σ- 仿 *Lindelof* 空间的定义直接得到。

定理 2　设 X, Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$ 是完备的优柔映射,若 Y 是 S-σ- 仿 *Lindelof* 空间,则 X 也是 S-σ- 仿 *Lindelof* 空间。

证明　设 U 是 X 的任意一个定向开覆盖,任意 $y \in Y$, 因为 f 是完备的,则 $f^{-1}(y)$ 是 X 中的紧子集,故存在 $U_1, U_2, ..., U_n \in U$ 使得 $f^{-1}(y) \subset \cup_{i=1}^{n} U_i$, 即存在 $U = \cup_{i=1}^{n} U_i \in U$ 使得 $f^{-1}(y) \subset U$, 又因为 $f: X \to Y$ 是一个连续的闭映射,由引理 1 知,存在开集 $V_y \in U(y)$ 使得 $f^{-1}(V_y) \subset U$, 则 $\{V_y \mid y \in Y\}$ 是 Y 的一个开覆盖。由 Y 的 $S-\sigma-$ 仿 *Lindelof* 性, $\{V_y \mid y \in Y\}$ 有一个 $\sigma-$ 局部可数的半开加细 $G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$, 合于每个 $G_n = \{G_{nt} \mid t \in \tau\}$ 是局部可数集族,并且 $\forall n \in N$, $\forall t \in \tau$, $\exists y \in Y$ 使得 $G_{nt} \subset V_y$。

证 $\cup_{n=1}^{\infty}\{f^{-1}(G_{nt}) \mid t \in \tau\}$ 是 U 的一个 σ- 局部可数的半开加细。事实上, $\forall n \in N$, $\forall t \in \tau$, $\exists y(t) \in Y$ 使得 $G_{nt} \subset V_{y(t)}$, 则 $f^{-1}(G_{nt}) \subset f^{-1}(V_{y(t)})$。由 $V_{y(t)}$ 的定义, $\exists U \in U$ 使得 $f^{-1}(F_{nt}) \subset f^{-1}(V_{y(t)}) \subset U$, 又因为 $\cup_{n=1}^{\infty}(\cup \{G_{nt} \mid t \in \tau\}) = Y$, 则 $\cup_{n=1}^{\infty}(\cup \{f^{-1}(G_{nt}) \mid t \in \tau\}) = f^{-1}(Y) = X$, 因而, $\cup_{n=1}^{\infty}\{f^{-1}(G_{nt}) \mid t \in \tau\}$ 是 U 的一个加细,又因为 f 是优柔映射,故 $f^{-1}(G_{nt})$ 是半开集,从而, $\cup_{n=1}^{\infty}\{f^{-1}(G_{nt}) \mid t \in \tau\}$ 是 U 的一个半开加细。

最后证每个 $\{f^{-1}(G_{nt}) \mid t \in \tau\}$ 是 σ- 局部可数集族。事实上,对 $\forall x \in X$, 令 $y = f(x)$, 因为 $G_n = \{G_{nt} \mid t \in \tau\}$ 局部可数,则存在 $O_y \in U(y)$, 使得 $(G_n)_{O_y} = \{G_{nt} \in G_n \mid G_{nt} \cap O_y \neq \phi\}$ 至多为可数集,又因为

$$\{G_{nt} \in G_n \mid f^{-1}(G_{nt}) \cap f^{-1}(O_y) \neq \phi\} \subset \{G_{nt} \in G_n \mid G_{nt} \cap O_y \neq \phi\}$$

所以 $\{G_{nt} \in G_n \mid f^{-1}(G_{nt}) \cap f^{-1}(O_y) \neq \phi\}$ 也是至多可数集,并且 $f^{-1}(O_y) \in U(x)$, 因此, $\{f^{-1}(G_{nt}) \mid t \in \tau\}$ 是局部可数集族。从而, $\cup_{n=1}^{\infty}\{f^{-1}(G_{nt}) \mid t \in \tau\}$ 是 U 的一个 σ- 局部可数的半开加细,故 X 是 S-σ- 仿 *Lindelof* 空间。

定理 3　设 X 是 T_2 的 S-σ- 仿 *Lindelof* 空间, Y 是紧空间,则 $X \times Y$ 是 S-σ- 仿 *Lindelof* 空间。

证明　设 $p_X: X \times Y \to X$ 是投影映射,由定理 2,只需证明 p_X 是完备的优柔映射。事实上, A 是 X 中任意半开集,即存在开集 G 使得 $G \subset A \subset cl(G)$。因为 $G \times Y \subset A \times Y \subset cl(G) \times Y \subset cl(G) \times cl(Y) = cl(G \times Y)$, 则存在 $X \times Y$ 的开集 $O = G \times Y$ 使得 $O \subset A \times Y \subset cl(O)$, 即 $A \times Y$ 是 $X \times Y$ 中的半开集,又因为 $p_X^{-1}(A) = A \times Y$, 故 p_X 是优柔映射,又由引理 2 可知, p_X 是完备映射,故 p_X 是完备的优柔映射,从而,由定理 5, $X \times Y$ 是 S-σ- 仿 *Lindelof* 空间。

用上面完全相同的方法,不难推得 S-σ- 仿紧空间有上述所有结果。在此,不再作重复的证明,仅用如下推论。

推论 1　拓扑空间 (X, T) 是 S-σ- 仿紧空间,当且仅当 X 的每个定向开覆盖都有一个 σ- 局部有限的半开加细。

推论 2　设 X, Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$ 是完备的优柔映射,若 Y 是 S-σ- 仿紧空间,则 X 也是 S-σ- 仿紧空间。

推论 3　设 X 是 T_2 的 S-σ- 仿紧空间, Y 是紧空间,则 $X \times Y$ 是 S-σ- 仿紧空间。

参 考 文 献:

[1] AL-Zoubi K Y.S - paracompact spaces[J].Acta Mathematica Hungarica,2006,110:165-174.

[2] AL-Zbubi K Y. S-expandable spaces[J]. Acta Mathematica Hungarica,2004,102:203-212.

[3] Ryszard E. General topology[M]. Berlin: Heldermann,

1989.

[4] 朱培勇,雷银彬.拓扑学导论[M].北京:北京科学出版社,2009.

[5] 张焰杰,吴昭鑫,杨思鑫.S-亚紧空间[J].四川理工学院学报:自然科学版,2014,27(1):98-100.

[6] 杨书娟,斯钦孟克,郑鹏.强 S-仿紧空间[J].大学数学,2013,29(5):36-39.

[7] Zhu Peiyong.The products on σ -paralindelof spaces[J]. Scienticae Mathematicae,1998(2):217-221.

[8] Li P Y, Song Y K.Some remarks on S-paracompact spaces[J].Acta Mathematica Hungarica,2008,118(4):345-355.

[9] 朱培勇. σ -仿 Lindelof 空间的 Tychonoff 乘积[J].数学研究与评论,1998,18(3):405-411.

[10] 蒋继光.一般拓扑专题选讲[M].北京:北京科学出版社,1991.

The S- σ -para-Lindelof Spaces and S- σ -paracompact Spaces and the Properties of Their Products

DING Meng, *ZHU Peiyong*

(School of Mathematical Sciences, UESTC, Chengdu 611731, China)

Abstract: The concepts of S- σ -paracompact spaces and S- σ -para-Lindelof spaces are introduced by the analogy of S-paracompact spaces. Firstly, a necessary and sufficient condition of S- σ -para-Lindelof spaces is obtained, and an inverse preserving property of S- σ -para-Lindelof spaces is proved under an irresolute perfect closed mapping. Next, by using the above results, it is showed that the product of S- σ -para-Lindelof space and a compact space is a S- σ -para-Lindelof space. Finally, it is pointed that the above all conclusions are true if S- σ -para-Lindelof space is replaced by S- σ -paracompact space.

Key words: S- σ -para-Lindelof; S- σ -paracompact; σ -locally countable; σ -locally finite