第 28 卷第 5 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 28　No. 3
2015 年 10 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Oct. 2015
文章编号:1673-1549(2015)05-0081-04　　DOI:10.11863/j.suse.2015.05.15

曲面上三个基本形式关系的证明方法

邢家省[1,2]，白　璐[1,2]，罗秀华[3]

(1.北京航空航天大学数学与系统科学学院，北京　100191;2.数学、信息与行为教育部重点实验室，北京　100191;
3.平顶山教育学院，河南　平顶山　467000)

摘　要:考虑曲面上的第三个基本形式与第一基本形式和第二基本形式的关系问题,曲面上的第三基本形式可用第一和第二基本形式表示的公式处用矩阵理论的证明方法。

关键词:第三基本形式;高斯曲率;平均曲率;系数矩阵;正交坐标曲线网

中图分类号:O186.1　　**文献标志码**:A

曲面上的第三基本形式用第一和第二基本形式表示的公式是一个重要发现结果[1-3],对其证明方法引起了人们的极大兴趣[4-8]。文献[1-3]是经过在曲面上给出正交且共轭的方向或 Weingarten 变换的特征方向,然后选取曲率线网作为坐标曲线网,给予证明,这是原始的发现证明,对坐标曲线网选取不是一般情形。文献[4-8]用曲面上三个基本形式的系数矩阵的关系,再由特征矩阵多项式的性质给出了证明,但对三个基本形式矩阵的关系的证明是验证型,不是发现型的自然推导过程。本文在现有文献结果的基础上,给出三个基本形式矩阵的关系的直接发现型的证法,对二阶矩阵的特征矩阵多项式的性质也给出了自然导出过程。

1　曲面上三个基本形式的系数矩阵之间关系的直接导出证法

设曲面 $\Sigma:\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 是 C^2 类的正则曲面。曲面 Σ 上一点 $P(u,v)$ 处的单位法向量为 $\vec{n}$。

曲面上的第一基本形式为[1-3]:

$$I=\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=E(\mathrm{d}u)^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2 \tag{1}$$

曲面上的第二基本形式为[1-3]:

$$II=\vec{n}\cdot\mathrm{d}^2\vec{r}=L(\mathrm{d}u)^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N(\mathrm{d}v)^2 \tag{2}$$

曲面上的第三基本形式为[1-3]:

$$III=\mathrm{d}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{n}=e(\mathrm{d}u)^2+2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v+g(\mathrm{d}v)^2 \tag{3}$$

命

$$A=\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v\\ \vec{r}_v\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{n}\cdot\vec{r}_{uu} & \vec{n}\cdot\vec{r}_{vu}\\ \vec{n}\cdot\vec{r}_{uv} & \vec{n}\cdot\vec{r}_{vv}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\vec{n}_u\cdot\vec{r}_u & \vec{n}_u\cdot\vec{r}_v\\ \vec{n}_v\cdot\vec{r}_u & \vec{n}_v\cdot\vec{r}_v\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}e & f\\ f & g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{n}_u\cdot\vec{n}_u & \vec{n}_u\cdot\vec{n}_v\\ \vec{n}_v\cdot\vec{n}_u & \vec{n}_v\cdot\vec{n}_v\end{pmatrix}$$

矩阵 A,B,C 分别称为曲面上的第一、第二、第三基本矩阵。

曲面上的单位法向量为:

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}$$

曲面上的高斯曲率和平均曲率分别为[1-3,9-12]:

$$K=\det(A^{-1}B)=\frac{\det B}{\det A}$$

收稿日期:2015-02-24
基金项目:国家自然科学基金项目(11201020);北京航空航天大学校级重大教改项目(201401)
作者简介:邢家省(1964-),男,河南泌阳人,副教授,博士,主要从事偏微分方程、微分几何方面的研究,(E-mail)xjsh@buaa.edu.cn

$$H = \frac{1}{2} tr(A^{-1}B) \tag{4}$$

定理 1[2,4,7,11] 设曲面 $\Sigma: \vec{r} = \vec{r}(u,v)$ 在 $P(u,v)$ 点处的第一、第二、第三基本矩阵分别是 A,B,C。则有

$$C = B(A^{-1})^T B^T,\ C = BA^{-1}B \tag{5}$$

证明 因为 $\vec{n}\cdot\vec{n} = 1$, 所以 $\vec{n}\cdot\vec{n}_u = 0, \vec{n}\cdot\vec{n}_v = 0$, 从而 $\vec{n}_u, \vec{r}_u, \vec{r}_v$ 共面, $\vec{n}_v, \vec{r}_u, \vec{r}_v$ 共面;存在 $a_1, a_2; b_1, b_2$, 使得 $\vec{n}_u = a_1\vec{r}_u + a_2\vec{r}_v$, $\vec{n}_v = b_1\vec{r}_u + b_2\vec{r}_v$, 写成矩阵形式为:

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_u \\ \vec{n}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix}$$

记 $D = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_u \\ \vec{n}_v \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} \tag{6}$$

在(6)式的两边右乘以 $\begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix}^T = (\vec{r}_u, \vec{r}_v)$, 得到

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_u \\ \vec{n}_v \end{pmatrix} (\vec{r}_u, \vec{r}_v) = D \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} (\vec{r}_u, \vec{r}_v)$$

即

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_u\cdot\vec{r}_u & \vec{n}_u\cdot\vec{r}_v \\ \vec{n}_v\cdot\vec{r}_u & \vec{n}_v\cdot\vec{r}_v \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \vec{r}_u\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v \\ \vec{r}_v\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v \end{pmatrix}$$

由第一类基本量和第二类基本量的计算公式,得

$$\begin{pmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

于是成立 $-B = DA$, 从而有 $D = -BA^{-1}$, 所以得出

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_u \\ \vec{n}_v \end{pmatrix} = -BA^{-1} \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} \tag{7}$$

由此可得

$$C = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{n}_u\cdot\vec{n}_u & \vec{n}_u\cdot\vec{n}_v \\ \vec{n}_v\cdot\vec{n}_u & \vec{n}_v\cdot\vec{n}_v \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_u \\ \vec{n}_v \end{pmatrix} (\vec{n}_u, \quad \vec{n}_v) = D \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} (\vec{r}_u \quad, \vec{r}_v) D^T = DAD^T =$$

$$(-BA^{-1})A(-(A^{-1})^T B^T) = B(A^{-1})^T B^T$$

故成立 $C = B(A^{-1})^T B^T$, $C = BA^{-1}B$。

利用曲面论基本方程的矩阵方程表示(7)式,给出了三个基本形式的系数矩阵之间的关系的直接发现的证明过程。

定理 2[3,7] 设曲面 $\Sigma: \vec{r} = \vec{r}(u,v)$ 在 $P(u,v)$ 点处的第一、第二、第三基本矩阵分别为 A,B,C。则有

$$B(A^{-1})^T B^T = C,\ BA^{-1}B = C \tag{8}$$

2 法曲率的最大值和最小值满足的特征方程

在文献[1-3,9-12]中已经证明法曲率 k_n 的最大值和最小值满足特征方程

$$|\lambda E - A^{-1}B| = \lambda^2 - 2H\lambda + K = 0 \tag{9}$$

由此导致了考虑特征多项式 $|\lambda E - A^{-1}B| = \lambda^2 - 2H\lambda + K$ 零点的问题和相应的特征矩阵多项式。

对二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 其特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

直接验证,可知 A 满足特征矩阵方程

$$X^2 - (a_{11} + a_{22})X + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})E = 0$$

即

$$X^2 - (trA)X + (\det A)E = 0 \tag{10}$$

其中 X 为 2 阶方阵, E 为 2 阶单位矩阵。

3 曲面上的三个基本形式关系的特征矩阵方程证法

定理 3[1-3] 设曲面 $\Sigma: \vec{r} = \vec{r}(u,v)$ 在 $P(u,v)$ 点处的第一、第二、第三基本形式分别为 I, II, III; 高斯曲率为 K, 平均曲率为 H, 则成立

$$III - 2HII + KI = 0 \tag{11}$$

证明 利用 $A^{-1}B$ 满足其特征矩阵方程

$$X^2 - (tr(A^{-1}B))X + (\det(A^{-1}B))E = 0$$

即

$$X^2 - 2HX + KE = 0 \tag{12}$$

将 $A^{-1}B$ 代入(12)式,得到 $A^{-1}BA^{-1}B - 2HA^{-1}B + KE = 0$, 从而有 $BA^{-1}B - 2HB + KA = 0$, 即得到

$$C - 2HB + KA = 0 \tag{13}$$

写出矩阵方程(13)式的关于 du, dv 的二次型,就得到 $III - 2HII + KI = 0$。

4 正交坐标网下曲面的第三基本形式用第一和第二基本形式表示的证明

定理 4[1-3] 曲面上的三个基本形式之间存在关系

$\mathrm{III} - 2H\mathrm{II} + K\mathrm{I} = 0$。

证明 选取曲面 Σ 上的正交曲线族为坐标曲线网。设曲面 Σ:$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ 上的坐标曲线网是正交网,则有 $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$,

曲面的第一基本形式:

$$I = E(\mathrm{d}u)^2 + G(\mathrm{d}v)^2$$

曲面的第二基本形式:

$$II = L(\mathrm{d}u)^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N(\mathrm{d}v)^2$$

高斯曲率:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG}$$

平均曲率:

$$H = \frac{LG + NE}{2EG}$$

因为 $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$, 所以 $\vec{n} \cdot \vec{n}_u = 0, \vec{n} \cdot \vec{n}_v = 0$, 从而 $\vec{n}_u$, $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ 共面, $\vec{n}_v, \vec{r}_u, \vec{r}_v$ 共面。设 $\vec{n}_u = a_1\vec{r}_u + a_2\vec{r}_v$, 则有 $a_1 = -\frac{L}{E}, a_2 = -\frac{M}{G}$; 设 $\vec{n}_v = b_1\vec{r}_u + b_2\vec{r}_v$, 则有 $b_1 = -\frac{M}{E}$, $b_2 = -\frac{N}{G}$, 于是

$$e = \vec{n}_u \cdot \vec{n}_u = a_1^2\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u + a_2^2\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = \frac{L^2G + M^2E}{EG} = \frac{L^2G + LNE - LNE + M^2E}{EG} = 2HL - KE$$

$$f = \vec{n}_u \cdot \vec{n}_v = a_1b_1\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u + a_2b_2\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = \frac{LGM + NEM}{EG} = 2HM$$

$$g = \vec{n}_v \cdot \vec{n}_v = b_1^2\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u + b_2^2\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = \frac{M^2G + N^2E}{EG} = \frac{LGN + N^2E - LNE + M^2G}{EG} = 2HN - KG$$

代入第三基本形式,可得到 $III = 2HII - KI$。

5 曲率线网为坐标网下曲面的第三基本形式用第一和第二基本形式表示的证明

证明 取曲面上的曲率线网为坐标网。设曲面 Σ:$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ 上的坐标曲线网是曲率线网,则有 $F = 0$, $M = 0$,

$$\mathrm{I} = E(\mathrm{d}u)^2 + G(\mathrm{d}v)^2,\ \mathrm{II} = L(\mathrm{d}u)^2 + N(\mathrm{d}v)^2$$

由

$$k_n = \frac{II}{I} = \frac{L(\mathrm{d}u)^2 + N(\mathrm{d}v)^2}{E(\mathrm{d}u)^2 + G(\mathrm{d}v)^2} = \frac{L}{E}\frac{E(\mathrm{d}u)^2}{E(\mathrm{d}u)^2 + G(\mathrm{d}v)^2} + \frac{N}{G}\frac{G(\mathrm{d}v)^2}{E(\mathrm{d}u)^2 + G(\mathrm{d}v)^2}$$

则有

$$\min\left\{\frac{L}{E}, \frac{N}{G}\right\} \leqslant k_n \leqslant \max\left\{\frac{L}{E}, \frac{N}{G}\right\}$$

记

$$k_1 = \min\left\{\frac{L}{E}, \frac{N}{G}\right\}$$

$$k_2 = \max\left\{\frac{L}{E}, \frac{N}{G}\right\}$$

将基本量代入,则有高斯曲率

$$K = k_1k_2 = \frac{LN}{EG}$$

平均曲率

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{LG + NE}{2EG}$$

因为 $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$, 所以 $\vec{n} \cdot \vec{n}_u = 0, \vec{n} \cdot \vec{n}_v = 0$, 从而 $\vec{n}_u, \vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ 共面, $\vec{n}_v, \vec{r}_u, \vec{r}_v$ 共面,设 $\vec{n}_u = a_1\vec{r}_u + a_2\vec{r}_v$, 则有 $a_1 = -\frac{L}{E}, a_2 = 0$; 设 $\vec{n}_v = b_1\vec{r}_u + b_2\vec{r}_v$, 则有 $b_1 = 0, b_2 = -\frac{N}{G}$, 于是

$$\mathrm{e} = \vec{\mathrm{n}}_\mathrm{u} \cdot \vec{\mathrm{n}}_\mathrm{u} = \mathrm{a}_1^2\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{u} \cdot \vec{\mathrm{r}}_\mathrm{u} = \frac{L^2}{E}$$

$$f = \vec{n}_u \cdot \vec{n}_v = 0$$

$$\mathrm{g} = \vec{\mathrm{n}}_\mathrm{v} \cdot \vec{\mathrm{n}}_\mathrm{v} = \mathrm{b}_2^2\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{v} \cdot \vec{\mathrm{r}}_\mathrm{v} = \frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{G}}$$

从而

$$\mathrm{III} = \frac{L^2}{E}\mathrm{d}u^2 + \frac{N^2}{G}\mathrm{d}v^2 = \frac{L}{E}L\mathrm{d}u^2 + \frac{N}{G}N\mathrm{d}v^2 = \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right)(L\mathrm{d}u^2 + N\mathrm{d}v^2) - \frac{LN}{EG}(E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2) = 2H\mathrm{II} - K\mathrm{I}$$

故成立 $\mathrm{III} - 2H\mathrm{II} + K\mathrm{I} = 0$。

参 考 文 献:

[1] 梅向明,黄敬之.微分几何[M].4 版.北京:高等教育出版社,2008.

[2] 陈维桓.微分几何[M].北京:北京大学出社,2006.

[3] 苏步青,胡和生,沈纯理,等.微分几何[M].北京:人民教育出版社,1980.

[4] 陈维桓.曲面的三个基本形式之间的关系是 Hamilton-Cayley 定理的推论[J].数学的实践与认识,1990(3):79-81.

[5] 于纯孝,王洪英.曲面的三个基本形式之间关系的注记[J].山东师大学报:自然科学版,1996,11(4):9-11.

[6] 傅朝金.曲面的三个基本形式之间关系的几种证明方法[J].高等函授学报:自然科学版,2001,14(6):13-14.

[7] 傅朝金,何汉林.曲面的三个基本形式的系数矩阵之间关系的证明及其应用[J].海军工程大学学报,2002,24(3):5-7.

[8] 宋占奎.曲面的第三基本形式研讨[J].吉林化工学院学报,2006,23(4):79-82.

[9] 邢家省.法曲率最值的直接求法[J].吉首大学学报:自然科学版,2012,33(4):11-15.

[10] 邢家省,王拥军.曲面上法曲率的最值和最值切方向的性质[J].吉首大学学报:自然科学版,2013,34(1):6-10.

[11] 邢家省,王拥军.曲面的三个基本形式的系数矩阵之间关系的证明[J].河南科学,2012,30(10):1407-1410.

[12] 邢家省,贺慧霞,高建全.求解指定第一和第二基本形式的曲面方程的方法[J].吉首大学学报:自然科学版,2013,34(6):4-8.

The Proof Methods of the Relationship Among the Three Basic Forms on Curved Surface

XING Jiasheng[1,2], *BAI Lu*[1,2], *LUO Xiuhua*[3]

(1. School of Mathematics and System Science, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. LMIB of the Ministry of Education, Beijing 100191, China; 3. Pingdingshan Institute of Education, Pingdingshan 467000, China)

Abstract: The relationship between the third basic form with the first and second basic forms on curved surface is discussed in this paper. The proof methods concerning the third basic form expressed by the first and second basic forms by means of matrix theory is obtained.

Key words: third fundamental form; Gaussian curvature; mean curvature; coefficient Matrix; orthogonal coordinate curve mesh