第 28 卷第 5 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 28 No. 5
2015 年 10 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Otc. 2015
文章编号:1673-1549(2015)05-0031-06 DOI:10.11863/j.suse.2015.05.07

基于 Logistic 混沌-贝努力序列的循环压缩测量矩阵构造算法

臧华中

(三江学院计算机科学与工程学院, 南京 210012)

摘 要:作为信号处理的一个新领域,压缩感知的目标是尽量减少信号重构过程中采样点的损失,而压缩感知矩阵的构造是压缩感知的核心工作之一。在前人研究的基础上,将循环矩阵快速算法的优点和混沌序列内在确定性和外在随机性相结合的优点进行有效结合,提出了一种新的压缩感知测量矩阵构造算法,即基于 Logistic 混沌—贝努利序列和循环矩阵的循环压缩感知测量矩阵构造算法(CCNMM)。大量仿真实验结果表明,对于一维和二维信号的恢复,CCNMM 算法优于贝努利随机测量矩阵和高斯测量矩阵,证明了 CCNMM 的有效性和实用性。

关键词:压缩感知;测量矩阵;Logistic 混沌;贝努力序列;循环矩阵

中图分类号:TN911.7 **文献标志码**:A

引 言

近年来,Candès[1-2] 和 Donoho[3] 等人提出了一种被称为压缩感知(Compressed Sensing,CS)的新型采样理论,该理论一经提出,便得到了广大科学研究者的普遍关注。到目前为止,CS 在诸如视频处理[4]、医疗图像处理[5]、生物传感[6]、无线绘图[7]、图像压缩[8-11] 和雷达探测[12] 等领域得到了广泛的应用。

当图像在某些基下非常稀疏或高度可压缩时(大多数的基或坐标系数很小或为零),与奈奎斯特理论相比,CS 能够通过更少的测量实现对信号的更精确重构。在 CS 中,对信号的测量是通过测量矩阵实现的。测量矩阵必须满足性质-约束等距性(Restricted Isometry Property,RIP),即测量矩阵必须与用于描述稀疏基的矩阵是不相干的[13]。

在 CS 理论中,寻找合适的满足 RIP 的测量矩阵是重中之重。一般来说,测量矩阵是通过满足随机分布的随机序列构建的[14]。然而,在实际应用中,为了降低硬件设计的费用,是不会选择使用纯粹的随机序列来构建测量矩阵的。与纯粹的随机序列相比,混沌序列拥有与之相同的特性,且更容易在硬件上实现,因此,越来越多的研究试图通过混沌序列来构建测量矩阵[15-21]。J. A. Tropp 等[15] 提出了带有随机滤波的随机采样算法;N. Linh-Trung等[16] 通过对带有过滤阀的混沌滤波器进行检测后指出,与随机滤波器相比,通过 Logistic 映射构造的混沌滤波器更适于构造测量矩阵[19-20];V. Kafedziski 等[21] 通过 Chua 和 Lorenz 混沌序列构建用于压缩采样的测量矩阵。对该测量矩阵的研究结果表明,通过 Chua 和 Lorenz 混沌序列构建的测量矩阵与通过随机高斯分布序列、伯努利序列和匀布随机序列构建的测量矩阵具有相似的属性。

因结构的特殊性,循环矩阵的许多优点使得循环矩阵适于构造压缩测量矩阵。对于处理一维、二维信号的循环矩阵,具有以下优点:第一,需要存储的独立变量少;第二,循环矩阵可以实现快速计算;第三,循环矩阵对测量信号的处理是通过离散卷积实现,从而很好地解决诸多与卷积运算相关的理论与实际问题;第四,对于

收稿日期:2015-07-22

作者简介:臧华中(1978-),男,江苏沭阳人,实验师,硕士生,主要从事计算机应用方面的研究,(E-mail)zanghuazhong@163.com

图像信号,目前已有学者研究出基于循环矩阵结构的 CS 恢复算法,该恢复算法不仅信号恢复效果令人满意,而且计算速度也很快[22]。

由于通过 Chua 和 Lorenz 混沌序列、随机高斯分布序列、伯努利序列和匀布随机序列等构建测量矩阵时,每次实验产生的矩阵都不相同,所以稳定性较差。针对这些算法存在的不足,本文通过将混沌序列良好的随机性质和循环矩阵的快速运算能力进行有效结合,提出一种新的测量矩阵构造算法——基于 Logistic 混沌—贝努利序列和循环矩阵的压缩感知测量矩阵构造算法(CCNMM)。文中通过仿真实验对该算法进行了研究,仿真结果表明,与其他类型的随机测量矩阵进行比较,基于 Logistic 混沌—贝努利混沌序列和循环矩阵的测量矩阵是行之有效的。

1 压缩感知

假设 N 维向量 $x \in R^N$ 在某些基 Ψ(傅里叶变化基、小波变换基、离散余弦基等)下是非常稀疏或高度离散的,s 是 K 维稀疏的,即 s 有 K 个重要成分,则向量 x 可以表示为 $x = \Psi s$。测量向量 $y \in R^M$ 通过 Φx 获得,其中,$M < N$ 且 $\Phi \in R^{M\times N}$ 是选择的满足 RIP 的过渡矩阵,即测量感知矩阵。从数学角度来看,CS 的步骤可以通过线性映射的形式表示:

$$y = \Phi x = \Phi\Psi s \tag{1}$$

其中,$\Theta = \Phi\Psi$ 被称为压缩感知矩阵。CS 的目标是通过给定 Φ 和 Ψ,利用尽量小的 M 实现从 y 到 s 的完美重构。

如果 Φ 与 Ψ 不相干(RIP 规定),当 M 满足 $cK\log(N/K) < M < N$(c 是某一常数)时,可以通过各种稀疏近似算法实现从 y 到 s 的重构。这些稀疏近似算法包括基于基本追踪(Basic Pursuit,BP)的 l_l 最优、正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)[23]和稀疏重构的梯度投影(Gradient Projection for Sparse Reconstruction,GPRS)[24]等。除了上面的算法,近年来也有学者不断提出新的稀疏近似算法,比如修正自适应匹配追踪(MAMP)算法[25]、迭代硬阈值重构算法(IIHT)[26]等。

2 基于 Logistic 混沌-贝努利序列的循环压缩测量矩阵构造算法

2.1 基于 Logistic 混沌—贝努利序列的压缩测量矩阵的构造

作为非线性系统所独有的且广泛存在的一种非周期运动形式,混沌序列不仅具有内在确定性和外在随机性,而且还具有规律性、遍历性等良好的伪随机性质。鉴于混沌序列的这些优点,混沌序列在非线性控制、信号处理以及保密通信等很多领域都得到了广泛应用。

Logistic 混沌系统可以表示为:

$$x_{n+1} = 1 - \eta x_n^2 \tag{2}$$

其中,$x_n \in [-1,1]$。

对于 Logistic 系统,如果 $\eta \in [1.872,2.000]$,当 $x_0 = 0.23,0.37$ 或 0.7 时,该系统的 Lyapunov 指数均大于 0,满足以上条件的 Logistic 系统称为混沌系统[16]。

通过符号函数将 x_n 映射为 y_n:

$$y_n = \mathrm{sgn}(x_n) = \begin{cases} -1, x_n < 0 \\ 0, x_n = 0 \\ 1, x_n > 0 \end{cases} \tag{3}$$

文献[17]指出,当参数 $\eta = 2.000$ 时,$\{y_n\}$ 满足 Bernoulli 分布和 RIP,即通过 Logistic 混沌系统所产生的混沌序列 $\{y_n\}$ 可作为 CS 的压缩测量矩阵。

本文构造基于 Logistic 混沌 - 贝努力序列的压缩测量矩阵的步骤包括以下三步:

Step 1:文献[27]中的研究结果表明,如果 $\eta = 2.000$,当 $x_0 = 0.23,0.37$ 或 0.7 时,重构误差 MSE 的计算值分别为 0.097 95、0.082 61 和 0.089 51。本文通过 $\eta = 2.000$、$x_0 = 0.37$ 的 Logistic 混沌系统产生长度 $n = M \times N$ 的混沌序列 x_n。

Step 2:通过符号函数将上一步生成的 x_n 映射为 y_n。

Step 3:将 Step 2 中生成的 y_n 以长度 N 为单位进行截断,获得 $M \times N$ 维的矩阵 Φ_1。

基于 Logistic 混沌 - 贝努力序列的压缩测量矩阵构造算法的计算复杂度为 $O(M \times N)$,而文献[19]中算法的复杂度大于 $O(N^2)$ $(M << N)$,所以,与文献[19]中提出的算法相比,在计算速度方面,基于 Logistic 混沌 - 贝努力混沌序列的压缩测量矩阵构造算法更有优势。图 1 给出的是贝努力随机序列和 Logistic 混沌 - 贝努力序列的序列幅值和序列统计个数对比图。

图 1 中的对比结果表明,与贝努力随机序列相比,Logistic 混沌 - 贝努力序列的平均性和稳定性更加突出。

2.2 基于 Logistic 混沌 - 贝努力序列的循环压缩测量矩阵的构造

循环测量矩阵 $\Phi = \Phi_1 C$,其中,C 为循环矩阵。对于一维信号和二维信号,C 的构造形式是不同的[22]:

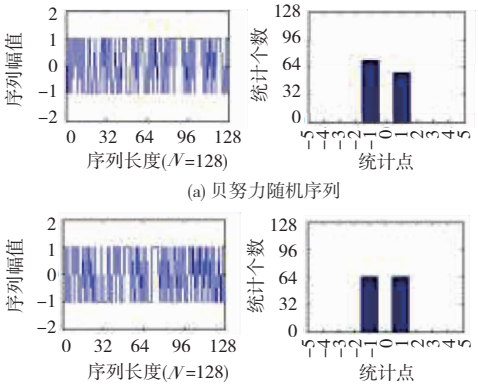


图 1　贝努力随机序列和 Logistic 混沌 - 贝努力序列的序列幅值和序列统计个数对比图

(1)一维信号

$$C = FDF^* = Fdiag(d)F^* = Fdiag(\sqrt{n}Fv)F^* \quad (4)$$

其中,n 为矩阵的列数,F 为 DFT 矩阵,F^* 表示 F 的转置矩阵,D 为对角阵,v 为循环矩阵的第一行。当通过循环矩阵对一维信号 x 进行测量时,测量结果 Cx 是 x 与 v 循环卷积的结果。

(2)二维信号

如果以 $x \in C^{n_1 \times n_2}$ 表示二维信号,循环矩阵的构造公式仍然是式(4),但与用于一维信号的循环矩阵不同的是,F 是 $C^{n_1 \times n_2}$ 上的二维 DFT 矩阵。v 不再是循环矩阵的第一行,而是用于循环测量的核矩阵。当通过循环矩阵对二维信号进行测量时,Cx 表示将二维信号 x 和 v 沿着上下左右四个方向进行卷积。$D = \sqrt{n_1 n_2}F(v)$,其中 $F(v) = F \otimes v$ 表示矩阵 F 和矩阵 v 中的元素对应相乘。

3　仿真结果及分析

本文通过对一维信号和二维信号进行仿真实验,验证 CCNMM 的可行性与有效性。为了更好地验证本文提出算法的优越性,该部分还将 CCNMM 对一维和二维信号的恢复效果与 Gaussian 随机矩阵(GRM)、Bernoulli 随机矩阵(BRM)对一维和二维信号的恢复效果进行了对比。

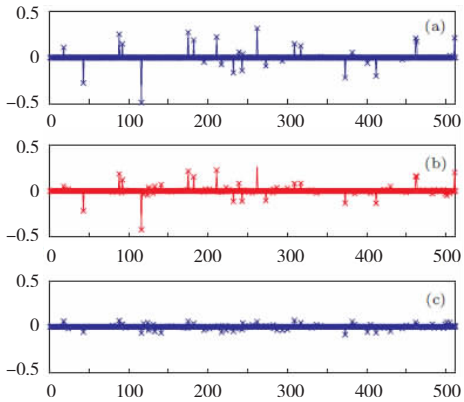
3.1　一维信号

首先利用 CCNMM 对一维信号进行测量,将一维信号的长度 N 取为 512,稀疏度 $K = 30$,压缩测量点数 $M = 80$,压缩比为 M/N。本文选用均方失真度(mean square distortion degree,MSDD)和信噪比(signal to noise ratio,SNR)作为对信号恢复程度的评价指标。

$$MSDD = \frac{\|x - \hat{x}\|^2}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |x_i - \hat{x}_i|^2 \quad (5)$$

$$SNR = 10\lg \frac{\|x\|^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \quad (6)$$

其中,x 为原始信号,$\hat{x}$ 为测量矩阵恢复的信号,x_i 和 $\hat{x}_i$ 分别为 x 和 $\hat{x}$ 的第 i 个采样点。图 2 是利用 CCNMM 的仿真结果,其 MSDD = 1.5217×10^{-4},SNR = 19.1274。由图 2 的仿真结果和 MSDD、SNR 的计算值可以看出,经 CCNMM 恢复的信号的 MSDD 很小、SNR 比较高,即 CCNMM 能够对一维信号进行很好地恢复。



(a) 原始信号 x;(b) 恢复信号 $\hat{x}$;(c) 原始信号与恢复信号的差 $x - \hat{x}$。

图 2　CCNMM 测量下一维信号的恢复

为了对 CCNMM、GRM 和 BRM 对原始信号的恢复效果进行对比,构造新评估指标-信号恢复误差(SRE):

$$SRE = \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \quad (7)$$

图 3 给出了 CCNMM、GRM 和 BRM 对原始信号的恢复误差随信号稀疏度变化情况。在图 3 中,CCNMM 和 BRM 的 SRE 的变化规律很相似且在大多数情况下都小于 GRM 的 SRE 的计算值。因此,CCNMM 对一维信号的恢复效果,与 BRM 相似,但优于 GRM。通过改变 N、K、M 的值做了大量仿真实验,仿真结果表明,CCNMM 对一维信号的恢复效果除个别情况下与 BRM 对一维信号的恢复效果相似以外,绝大多数情况下好于 BRM 和 GRM 对一维信号的恢复效果。

3.2　二维信号

通过 CCNMM、GRM 和 BRM 对大小为 256 × 256 的灰度"摄影师"图像的恢复效果的对比来对 CCNMM 对二维信号的恢复性能进行评估,同时采用峰值信噪比(peak signal to noise ratio,PSNR)作为对图像恢复效果的评价指标。

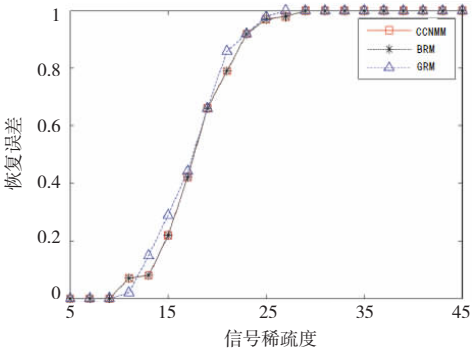


图 3 CCNMM、GRM 和 BRM 对一维信号的恢复误差随信号稀疏度的变化

$$PSNR = 10\lg\frac{255^2}{MSE} \tag{8}$$

$$MSE = \frac{\|X - Y\|^2}{S} = \frac{\sum_{k=1}^{l}|X_k - Y_k|^2}{S} \tag{9}$$

其中,X 为原始图像,Y 为经测量矩阵恢复的图像,X_k 和 Y_k 分别为 X 和 Y 的第 k 个采样点,l 为 X 中采样点的个数,S 为原始图像的大小。在本实例中,$l = 256$,$S = 256 \times 256$。

图 4 给出了 CCNMM、GRM 和 BRM 对灰度"摄影师"图像的恢复效果。其 $PSNR$ 的计算值分别为:GRM($PSNR = 23.9690$);BRM($PSNR = 24.2346$);CCNMM($PSNR = 27.5324$)。对应原始图像图 4(a),图 4(d)的处理效果明显好于图 4(b)和图 4(c)的处理效果,同时,三幅图的 $PSNR$ 的计算值定量地证明了上面的分析结果。因此,与 GRM 和 BRM 相比,CCNMM 对二维信号具有更加优越的恢复效果。通过改变 N、K、M 的值做了大量仿真实验,仿真结果表明,CCNMM 对二维信号的恢复效果明显好于 BRM 和 GRM 对二维信号的恢复效果。

4 结束语

本文针对 Bernoulli 测量矩阵和 Gaussian 随机矩阵在稳定性方面的不足,将循环矩阵的优点和混沌序列的优点相结合提出基于 Logistic 混沌 - 贝努力序列的循环测量矩阵构造算法。该算法不仅很好地继承了循环矩阵计算速度快的优点,而且利用混沌的内在确定性来产生独立同分布的随机序列、利用混沌的外在随机性来满足测量矩阵对随机性的要求。文中对一维与二维信号的重构效果进行了数值仿真,仿真结果表明,与 Bernoulli

图 4 CCNMM、GRM 和 BRM 对灰度"摄影师"图像的恢复

测量矩阵和 Gaussian 随机矩阵相比,CCNMM 对信号的重构效果更好。对于二维信号的重构,重构信号 $PSNR$ 值平均有 2 ~ 5 dB 的提高,因此,CCNMM 具有一定的实用价值。

参 考 文 献:

[1] Candès E,Romberg J,Tao T.Robust uncertainty principles:exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J].IEEE Transaction Information Theory,2006,52(2):489-509.

[2] Candès E,Tao T.Near optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies[J]. IEEE Transactions Information Theory,2006,52(12):5406-5425.

[3] Donoho D. Compressed sensing[J]. IEEE Transaction Information Theory,2006,52(4):1289-1306.

[4] Azghani M,Karimi M,Marvasti F.Multi-Hypothesis compressed video sensing technique[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2015 (99):1.

[5] Yang F G,Ozturk M S,Zhao L L,et al.High-resolution mesoscopic fluorescence molecular tomograpy based on compressive sensing[J].IEEE Transaction on Biomedical Engineering,2014,62(1):248-255.

[6] Sheikh M A, Milenkovic O, Baraniuk R G. Designing

compressive sensing DNA microarrays[C]//In Proceedings of the IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-sensor Adaptive Processing (CAMP-SAP 2007),St. Thomas, VI,December 12-14,2007:141-144.

[7] Zhang C, Yu J. Compressive sensing wireless channel modeling with digital map[J].IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters,2013,12:349-352.

[8] Duarte M F,Davenport M A,Takhar D,et al.Single pixel imaging via compressive sampling[J].IEEE Signal Processiing Magazine,2008,25(2):83-91.

[9] Tan J, Ma Y T, Baron D. Compressive imaging via approximate message passing with image denoising[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2015,63(8): 2085-2092.

[10] Yang J C,Wright J,Huang T,et al.Image super-resolution via sparse representation[J]. IEEE Transaction on Image Processing,2010,19(11):2861-2873.

[11] Yang J C,Wang Z W,Lin Z,et al.Coupled dictionary training for image super - resolution[J].IEEE Transaction on Image Processing,2012,21(8):3467-3478.

[12] Zhang W J, Hoorfar A. A generalized approach for SAR and MIMO radar imaging of building interior targets with compressive sensing[J]//Proceeding of 2014 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, Memphis,TN,July 6-11,2014:139-140.

[13] Liu Li, Yang Peng, Zhang Jianguo, et al. Compressive Sensing with Tent Chaotic Sequence[J]. Sensors & Transducers,2014,165(2):119-124.

[14] Haupt J, Nowak R. Signal reconstruction from noisy random projections[J]. IEEE Transaction Information Theory,2006,52(9):4036-4048.

[15] Tropp J A,Wakin W B,Duarte M F.Random filters for compressive sampling and reconstruction[C]//Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Process (ICASSP'06), Toulouse, France,May 14-19,2006:872-875.

[16] Romberg J.Compressive sensing by random convolution[J].SIAM Journal on Imaging Sciences,2009,2(4): 1098-1128.

[17] Trung N L,Phong D V,Hussain Z M,et al.Compressed sensing using chaos filters[C]//Proceedings of Australasian Telecommunication Networks and Applications Conference(ATNAC'08),Adelaide, Australia,December 7-10,2008:219-223.

[18] Wang Xinyu,Jia Min,Guo Qing,et al.A multi-bit pseudo-random measurement matrix construction method based on discrete chaotic sequence in an MWC under-sampling system[C]//Proceeding of 2015 IEEE 81st Vehicular Technology Conference(VIC Spring),Glasgow,United Kingdom,May 11-14,2015:1-5.

[19] Yu L,Barbot J P,Zheng G,et al.Compressive sensing with chaotic sequence[J].IEEE Signal Processing Letters,2010,17(8):731-734.

[20] Yu L,Barbot J P,Zheng G,et al.Toeplitz - structured chaotic sensing matrix for compressive sensing[C]// Proceedings of the IEEE,IET International Symposium on Communication Systems Networks and Digital Signal Processing(CSNDSP'10),Newcastle,UK,July 21-23,2010:229-233.

[21] Kafedziski V,Stojanovski T.Compressive sampling with chaotic dynamical systems[J].Telecommunications Forum, 2011,42(4):695-989.

[22] 郭静波,汪韧.基于混沌序列和 RIPless 理论的循环压缩测量矩阵的构造[J].物理学报,2014,63(19): 198402-1-198402-10.

[23] Troop J, Gibert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53 (12):4655-4666.

[24] Figueiredo M A T,Nowak R D,Wright S J.Gradient projection for sparse reconstruction: application to

compressed sensing and other inverse problem[J]. Journal of Selected Topics in Signal Proceedings: Special Issue on Convex Optimization Methods for Signal Processing,2007,1(4):586-598.

[25] 甘伟,许录平.一种自适应压缩感知重构算法[J].系统工程与电子技术,2011,33(9):1948-1953.

[26] 张宗念,李金徽,黄仁泰.迭代硬阈值压缩感知重构算法-IIHT[J].计算机应用,2011,31(8):2123-2125.

[27] 凌聪,孙功庚.Logistic 映射扩频序列的相关分布[J].电子学报,1999,27(1):140-141.

A Construction Algorithm of Circulant Compressive Measurement Matrix Based on Logistic Chaotic-Bernoulli Sequence

ZANG Huazhong

(College of Computer Science and Engineering, Sanjiang University, Nanjing 210012, China)

Abstract: Compressed sensing is a new area of signal processing. Its goal is to minimize the loss of sampling site that need to be taken from signal reconstruction. Construction of a compressive sensing matrix is one of the key technologies of compressive sensing. On the basis of the study of the predecessors, a novel construction algorithm of compressive sensing measurement matrix, that is the construction algorithm of circulant compressive sensing measurement matrix based on Logistic chaotic Bernoulli sequence and circulant matrix (CCNMM), is presented. This algorithm employs circulant matrix for its advantage in high calculation speed and chaotic sequence for its ability of the effective combination of internal certainty and external randomness. A variety of simulation studies have been done and simulation results demonstrate that, compared with Bernoulli random measurement matrix and Gaussian measurement matrix, one-dimensional and two-dimensional signals can be better reconstructed by CCNMM, which powerfully proved the practicability and effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: compressive sensing; measurement matrix; Logistic chaotic; Bernoulli sequence; circulant matrix