

# 曲面正交网下测地曲率计算公式的推导方法

邢家省<sup>1,2</sup>, 白璐<sup>1,2</sup>, 高建全<sup>3</sup>

(1. 北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191; 2. 数学、信息与行为教育部重点实验室, 北京 100191;  
3. 平顶山教育学院, 河南 平顶山 467000)

**摘要:**考虑曲面上曲线测地曲率计算公式的推导方法问题,在曲面正交坐标网下,给出曲面上曲线测地曲率计算公式的参数方程形式,并由此得出测地曲率计算 Liouville 公式的一种推导方法。充分利用坐标曲线网的正交性条件,介绍了一种推导 Liouville 公式的直接方法,由此发现两种推导过程的内在联系。在曲面上一般参数坐标网下,直接给出了测地线的参数方程所满足的微分方程组的形式,由此导出在曲面正交坐标网下测地线的微分方程组。

**关键词:**测地曲率;正交曲线坐标网;Liouville 公式;测地线方程

**中图分类号:**O186.1

**文献标志码:**A

曲面上曲线的测地曲率的概念及其计算公式<sup>[1-9]</sup>,是微分几何学科中的重要发现<sup>[1-5]</sup>。关于测地曲率的计算公式的推导方法,引起了众多学者的兴趣,运用多种方法给予推导简化。文献[1]利用曲面论基本方程给出推导过程,文献[6]给出了直接的推导方法,计算量大,过程复杂。文献[3-5]在曲面正交曲线坐标网下,给出测地曲率计算 Liouville 公式<sup>[1-6]</sup>的简化证明。文献[2]在曲面正交曲线坐标网下,给出测地曲率计算公式的直接推导过程,给出了求解曲面上测地线方程的方法例题。文献[10]介绍了测地曲率和测地线在物理上的应用。文献[7,11]介绍了测地线的性质。本文将现有文献中的推导方法给予系统整理,在正交曲线坐标网下,给出了测地曲率计算公式的推导过程,并指出 Liouville 公式来源的简化过程,利用直接方法给出了测地线方程的最终形式。

## 1 曲面上曲线的测地曲率的定义

设曲面  $\Sigma$  的参数方程为  $\Sigma: \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Delta$ 。如果  $\vec{r}(u, v)$  具有二阶连续偏导数,且  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ , 称曲面  $\Sigma$  为  $C^2$  类的正则曲面。

在任固定曲面  $\Sigma$  上一点  $P(u, v)$ , 并设  $T_p$  为曲面  $\Sigma$  在  $P$  点的切平面。曲线  $\Gamma: \vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s))$  是  $\Sigma$  上过  $P$  点的一曲线,其中  $s$  是曲线的自然参数。

设  $\vec{n}$  为曲面  $\Sigma$  在  $P$  点的单位法向量,以  $\vec{\alpha}$  表示曲线  $\Gamma$  上  $P$  点处的单位切向量;以  $\vec{\beta}$  表示曲线  $\Gamma$  上  $P$  点处的主法向量,  $\vec{\gamma}$  是副法向量。

**定义 1**<sup>[1-7]</sup> 曲面  $\Sigma$  上曲线  $\Gamma$  在  $P$  点的单位切向量的导向量  $\vec{\alpha}'(s)$  在切平面  $T_p$  上的投影向量  $\vec{\tau}_p = \vec{\alpha}'(s) - (\vec{\alpha}'(s) \cdot \vec{n})\vec{n}$ , 称为曲线  $\Gamma$  在  $P$  点的测地曲率向量。

称  $D\vec{\alpha} = d\vec{\alpha} - (d\vec{\alpha} \cdot \vec{n})\vec{n}$  为切向量场  $\vec{\alpha}(s)$  沿曲线  $\Gamma$  的绝对微分。由于  $\vec{\alpha}'(s) = \vec{r}''(s)$ , 故有  $\vec{\tau}_p = \vec{r}''(s) - (\vec{r}''(s) \cdot \vec{n})\vec{n}$ 。

显然  $\vec{\alpha}'(s) - (\vec{\alpha}'(s) \cdot \vec{n})\vec{n}$  与  $\vec{n}, \vec{\alpha}$  都垂直, 命  $\vec{\varepsilon} = \vec{n} \times \vec{\alpha}$ , 则  $\vec{\alpha}, \vec{\varepsilon}, \vec{n}$  是彼此正交的单位向量, 并且构成一右手系,  $\vec{\alpha}'(s) - (\vec{\alpha}'(s) \cdot \vec{n})\vec{n}$  平行于  $\vec{\varepsilon}$ 。  $\vec{\alpha}'(s)$  在切平面  $T_p$  上的投影向量就是  $\vec{\alpha}'(s)$  在  $\vec{\varepsilon}$  上的投影向量。

**定义 2**<sup>[1-5]</sup> 曲面  $\Sigma$  上曲线  $\Gamma$  的切向量的导向量  $\vec{\alpha}'(s)$  在  $\vec{\varepsilon}$  上的投影向量  $\vec{\tau}_p = (\vec{\alpha}'(s) \cdot \vec{\varepsilon})\vec{\varepsilon}$ , 称为曲线  $\Gamma$  在  $P$  点的测地曲率向量。

显然有

收稿日期: 2015-05-26

基金项目: 国家自然科学基金项目(11201020); 北京航空航天大学校级重大教改项目(201401)

作者简介: 邢家省(1964-), 男, 河南沁阳人, 副教授, 博士, 主要从事偏微分方程、微分几何方面的研究, (E-mail): xjsh@buaa.edu.cn

$$\vec{r}_p = \vec{\alpha}'(s) - (\vec{\alpha}'(s) \cdot \vec{n})\vec{n}$$

$$\vec{r}_p = (\vec{\alpha}'(s) \cdot \vec{e})\vec{e}$$

$$\vec{r}_p = (\vec{r}''(s) \cdot \vec{e})\vec{e}$$

定义3<sup>[1-9]</sup> 将 $\vec{r}''(s) \cdot \vec{e}$ 称为曲线 $\Gamma$ 在 $P$ 点的测地曲率,记作 $k_g$ ,  $k_g = \vec{r}''(s) \cdot \vec{e}$ 。

显然

$$k_g = (\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{n}(s))$$

$$k_g \vec{e} = \vec{r}''(s) - (\vec{r}''(s) \cdot \vec{n})\vec{n}$$

## 2 曲面正交网下测地曲率计算公式的直接推导过程

定理1<sup>[12,6]</sup> 设曲面 $\Sigma: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ 上的坐标曲线构成正交网,  $\Gamma$ 是曲面 $\Sigma$ 上的一条曲线,其方程为 $\vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s))$ ,这里 $s$ 是该曲线的自然参数。则曲线 $\Gamma$ 的测地曲率为

$$k_g = \sqrt{g} \left\{ \frac{du}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{E_v}{2G} \left( \frac{du}{ds} \right)^3 + \frac{G_u}{G} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 \frac{dv}{ds} + \frac{G_v}{2G} \frac{du}{ds} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 - \frac{dv}{ds} \frac{d^2u}{ds^2} - \frac{E_u}{2E} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{E} \frac{du}{ds} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{G_u}{2E} \left( \frac{dv}{ds} \right)^3 \right\} \quad (1)$$

证明 记 $\vec{\alpha}_1 = \frac{\vec{r}_u}{\sqrt{E}}, \vec{\alpha}_2 = \frac{\vec{r}_v}{\sqrt{G}}$ ,单位法向量 $\vec{n} = \vec{\alpha}_1 \times \vec{\alpha}_2$ ,显然 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{n}$ 构成右手正交系。对 $\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(u(s), v(s))$ 直接求导,得

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\alpha} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} &= \left( \vec{r}_{uu} \frac{du}{ds} + \vec{r}_{uv} \frac{dv}{ds} \right) \frac{du}{ds} + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \\ &\left( \vec{r}_{vu} \frac{du}{ds} + \vec{r}_{vv} \frac{dv}{ds} \right) \frac{dv}{ds} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2} = \vec{r}_{uu} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + \\ &2\vec{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\alpha} = \sqrt{E}\vec{\alpha}_1 \frac{du}{ds} + \sqrt{G}\vec{\alpha}_2 \frac{dv}{ds}$$

注意到

$$\begin{aligned} \vec{n}(s) \times \vec{r}'(s) &= \vec{n}(s) \times \left( \sqrt{E}\vec{\alpha}_1 \frac{du}{ds} + \sqrt{G}\vec{\alpha}_2 \frac{dv}{ds} \right) = \\ &\sqrt{E}\vec{\alpha}_2 \frac{du}{ds} - \sqrt{G}\vec{\alpha}_1 \frac{dv}{ds} = \\ &\sqrt{E} \frac{1}{\sqrt{G}} \vec{r}_v \frac{du}{ds} - \sqrt{G} \frac{1}{\sqrt{E}} \vec{r}_u \frac{dv}{ds} = \\ &\frac{1}{\sqrt{EG}} \left( E\vec{r}_v \frac{du}{ds} - G\vec{r}_u \frac{dv}{ds} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

将(3)式、(4)式代入测地曲率的计算公式,得到

$$k_g = (\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{n}(s)) = (\vec{n}(s) \times \vec{r}'(s)) \cdot \vec{r}''(s) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{EG}} \left( E\vec{r}_v \frac{du}{ds} - G\vec{r}_u \frac{dv}{ds} \right) \cdot \vec{r}''(s) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{EG}} \left( E\vec{r}_v \cdot \vec{r}''(s) \frac{du}{ds} - G\vec{r}_u \cdot \vec{r}''(s) \frac{dv}{ds} \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[ E \frac{du}{ds} \left( Gv'' - \frac{E_v}{2}(u')^2 + G_u u'v' + \frac{G_v}{2}(v')^2 \right) - G \frac{dv}{ds} \left( Eu'' + \frac{E_u}{2}(u')^2 + E_v u'v' - \frac{G_u}{2}(v')^2 \right) \right] \quad (5)$$

其中用到第一类基本量的关系

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = E$$

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$$

$$\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = G$$

(6)

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uu} = \frac{1}{2}E_u$$

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uv} = \frac{1}{2}E_v$$

$$\vec{r}_v \cdot \vec{r}_{vu} = \frac{1}{2}G_u$$

$$\vec{r}_v \cdot \vec{r}_{vv} = \frac{1}{2}G_v$$

$$\vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uv} = -\frac{1}{2}E_v$$

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{vv} = -\frac{1}{2}G_u$$

(7)

容易看出(5)式正是(1)式的结果<sup>[2]</sup>。

文献[1]利用曲面基本方程给出了曲线的测地曲率的计算公式,由此在曲面正交网下给出了(1)式,由于计算过程要倒回去,计算量将很繁琐。文献[2]为推导出(1)式,充分利用正交性的几何条件,给出了直接的推导方法。

## 3 正交坐标曲线网下测地曲率的 Liouville 公式

设曲面 $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ 上的坐标曲线构成正交网。令曲面上曲线 $\vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s))$ 的切方向与 $\vec{r}_u$ 的夹角为 $\theta$ ,则有

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\alpha} = \frac{\vec{r}_u}{\sqrt{E}} \cos\theta + \frac{\vec{r}_v}{\sqrt{G}} \sin\theta$$

又

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\alpha} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}$$

比较两式,得

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cos\theta, \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}} \sin\theta \quad (8)$$

所以有

$$\begin{aligned} \sqrt{Eu'} &= \cos\theta, \sqrt{Gv'} = \sin\theta \\ \sqrt{Eu''} + \frac{E_u u' + E_v v'}{2\sqrt{E}} u' &= -\sin\theta \frac{d\theta}{ds} - \\ \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{u''}{v'} - \frac{E_u}{2\sqrt{EG}} \frac{(u')^2}{v'} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} u' &= \frac{d\theta}{ds} \quad (9) \\ \sqrt{Gv''} + \frac{G_u u' + G_v v'}{2\sqrt{G}} v' &= \cos\theta \frac{d\theta}{ds} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{G}{E}} \frac{v''}{u'} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} v' + \frac{G_v}{2\sqrt{EG}} \frac{(v')^2}{u'} = \frac{d\theta}{ds} \quad (10)$$

将(8)式~(10)式代入(5)式,整理后,得

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} \cos\theta + \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} \sin\theta \quad (11)$$

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} \quad (12)$$

公式(11)式、(12)式称为 Liouville 公式<sup>[1-5]</sup>,可用于计算测地曲率和求解面上的测地线方程<sup>[1-9]</sup>,推导高斯-波涅公式<sup>[3-5]</sup>用(12)式,是高斯曲率简化公式的来源。

**定理 2**<sup>[1,9]</sup> 如果在曲面上引进半测地坐标网: $(ds)^2 = (du)^2 + G(u,v)(dv)^2$ ,则有

$$k_g ds = d\left[\arctan\left(\sqrt{G} \frac{dv}{du}\right)\right] + \frac{G_u}{2\sqrt{G}} dv \quad (13)$$

**证明** 由条件知  $E = 1, F = 0, G = G(u; v)$ ,代入(12)式,得到

$$\begin{aligned} k_g &= \frac{d\theta}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} = \\ &\frac{d\theta}{ds} + \frac{G_u}{2\sqrt{G}} \frac{dv}{ds} \quad (14) \end{aligned}$$

另一方面,由  $\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cos\theta, \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}} \sin\theta$ ,得  $\sqrt{G} \frac{dv}{du} = \sqrt{E} \tan\theta$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \arctan\left(\sqrt{G} \frac{dv}{du}\right) \right] &= \frac{d}{ds} \left[ \arctan(\sqrt{E} \tan\theta) \right] = \\ &\frac{1}{\cos^2\theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \end{aligned}$$

所以

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} + \frac{G_u}{2\sqrt{G}} \frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds} \left[ \arctan\left(\sqrt{G} \frac{dv}{du}\right) \right] + \frac{G_u}{2\sqrt{G}} \frac{dv}{ds}$$

即

$$k_g ds = d\left[\arctan\left(\sqrt{G} \frac{dv}{du}\right)\right] + \frac{G_u}{2\sqrt{G}} dv$$

文献[1]给出的高斯-波涅公式<sup>[3-5]</sup>证明过程中,先是引用(13)式,然后又转回利用(14)式,非常的繁琐,实际上直接利用(14)式就可以给出高斯-波涅公式的证明过程<sup>[3-5]</sup>。文献[10]给出了(14)式的直接使用过程。

#### 4 正交坐标曲线网下测地曲率的 Liouville 公式的直接推导过程

**定理 3**<sup>[3-5]</sup> 设曲面  $\Sigma: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$  上的坐标曲线构成正交网,  $\Gamma$  是曲面  $\Sigma$  上的一条曲线,其参数方程为  $u = u(s), v = v(s)$ , 或  $\vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s)) = \vec{r}(s)$ , 这里  $s$  是该曲线的自然参数。

令曲线的切方向与  $\vec{r}_u$  的夹角为  $\theta$ , 则曲线  $\Gamma$  的测地曲率为

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} \cos\theta + \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} \sin\theta \quad (15)$$

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} \quad (16)$$

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \frac{du}{ds} + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds} \quad (17)$$

其中  $E, F, G$  是曲面  $\Sigma$  上的第一类基本量。

**证明** 记  $\vec{\alpha}_1 = \frac{\vec{r}_u}{\sqrt{E}}, \vec{\alpha}_2 = \frac{\vec{r}_v}{\sqrt{G}}$ , 由所设条件可知  $\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2 = 0$ , 易知成立

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\alpha} &= \frac{\vec{r}_u}{\sqrt{E}} \cos\theta + \frac{\vec{r}_v}{\sqrt{G}} \sin\theta = \\ &\vec{\alpha}_1 \cos\theta + \vec{\alpha}_2 \sin\theta \quad (18) \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\alpha} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} \quad (19)$$

于是比较(18)式和(19)式,得

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cos\theta, \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}} \sin\theta \quad (20)$$

单位法向量  $\vec{n} = \vec{\alpha}_1 \times \vec{\alpha}_2$ , 由于  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{n}$  构成右手正交系,因此

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} = \vec{n} \times \vec{\alpha} &= \vec{n} \times (\vec{\alpha}_1 \cos\theta + \vec{\alpha}_2 \sin\theta) = \\ &-\vec{\alpha}_1 \sin\theta + \vec{\alpha}_2 \cos\theta \quad (21) \end{aligned}$$

对(18)式两边求导,得

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} &= (-\vec{\alpha}_1 \sin\theta + \vec{\alpha}_2 \cos\theta) \frac{d\theta}{ds} + \\ &\frac{d\vec{\alpha}_1}{ds} \cos\theta + \frac{d\vec{\alpha}_2}{ds} \sin\theta \quad (22) \end{aligned}$$

利用(21)式和(22)式,得

$$\begin{aligned} k_g = \vec{r}''(s) \cdot \vec{\varepsilon} &= \\ \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\vec{\alpha}_1}{ds} \cdot \vec{\varepsilon} \cos\theta + \frac{d\vec{\alpha}_2}{ds} \cdot \vec{\varepsilon} \sin\theta \quad (23) \end{aligned}$$

由于

$$\frac{d\vec{\alpha}_1}{ds} \cdot \vec{\alpha}_1 = 0, \frac{d\vec{\alpha}_2}{ds} \cdot \vec{\alpha}_2 = 0, \frac{d\vec{\alpha}_1}{ds} \cdot \vec{\alpha}_2 = -\frac{d\vec{\alpha}_2}{ds} \cdot \vec{\alpha}_1$$

因此

$$\begin{aligned}
k_g &= \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\tilde{\alpha}_1}{ds} \cdot (-\tilde{\alpha}_1 \sin\theta + \tilde{\alpha}_2 \cos\theta) \cos\theta + \\
&\frac{d\tilde{\alpha}_2}{ds} \cdot (-\tilde{\alpha}_1 \sin\theta + \tilde{\alpha}_2 \cos\theta) \sin\theta = \\
\frac{d\theta}{ds} + \frac{d\tilde{\alpha}_1}{ds} \cdot \tilde{\alpha}_2 \cos^2\theta - \frac{d\tilde{\alpha}_2}{ds} \cdot \tilde{\alpha}_1 \sin^2\theta &= \\
\frac{d\theta}{ds} + \frac{d\tilde{\alpha}_1}{ds} \cdot \tilde{\alpha}_2 & \quad (24)
\end{aligned}$$

由于

$$\frac{d\tilde{\alpha}_1}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \right) \dot{r}_u + \frac{1}{\sqrt{E}} \left( \dot{r}_{uu} \frac{du}{ds} + \dot{r}_{uv} \frac{dv}{ds} \right)$$

所以

$$\frac{d\tilde{\alpha}_1}{ds} \cdot \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \dot{r}_{uu} \cdot \dot{r}_v \frac{du}{ds} + \dot{r}_{uv} \cdot \dot{r}_v \frac{dv}{ds} \right) \quad (25)$$

利用

$$\dot{r}_u \cdot \dot{r}_u = E, \dot{r}_u \cdot \dot{r}_v = 0, \dot{r}_v \cdot \dot{r}_v = G$$

可得

$$\begin{aligned}
\dot{r}_u \cdot \dot{r}_{uu} &= \frac{1}{2} E_u, \dot{r}_u \cdot \dot{r}_{uv} = \frac{1}{2} E_v, \dot{r}_v \cdot \dot{r}_{uv} = \\
\frac{1}{2} G_u, \dot{r}_v \cdot \dot{r}_{vv} &= -\frac{1}{2} E_v
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\alpha}_1}{ds} \cdot \tilde{\alpha}_2 &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \dot{r}_{uu} \cdot \dot{r}_v \frac{du}{ds} + \dot{r}_{uv} \cdot \dot{r}_v \frac{dv}{ds} \right) = \\
\frac{1}{\sqrt{EG}} \left( -\frac{1}{2} E_v \frac{du}{ds} + G_u \frac{dv}{ds} \right) &= \\
\frac{1}{\sqrt{EG}} \left( -\frac{1}{2} E_v \frac{1}{\sqrt{E}} \cos\theta + G_u \frac{1}{\sqrt{G}} \sin\theta \right) & \quad (26)
\end{aligned}$$

将(26)式代入(24)式,得

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} \cos\theta + \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} \sin\theta \quad (27)$$

将(20)式代入(27)式,得

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} \quad (28)$$

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \frac{du}{ds} + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds} \quad (29)$$

(27)式、(28)式和(29)式是曲面正交网下曲面上曲线的测地曲率 Liouville 公式。

利用(20)式、(27)式,可求解曲面上的测地线方程<sup>[1,3,8,9]</sup>。

## 5 测地线方程显式形式的直接推导方法

对曲面  $\Sigma: \hat{r} = \hat{r}(u, v)$ , 设  $\Gamma: \hat{r} = \hat{r}(s) = \hat{r}(u(s), v(s))$  是曲面  $\Sigma$  上的测地线,  $s$  是曲线的自然参数。

曲线  $\Gamma: \hat{r} = \hat{r}(s) = \hat{r}(u(s), v(s))$  是测地线的充分必要条件为<sup>[1-9]</sup>:  $\hat{\alpha}'(s) \cdot \dot{r}_u = 0, \hat{\alpha}'(s) \cdot \dot{r}_v = 0$ 。由于

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}'(s) &= \frac{d^2 \hat{r}}{ds^2} = \dot{r}_u \frac{d^2 u}{ds^2} + \dot{r}_v \frac{d^2 v}{ds^2} + \dot{r}_{uu} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + \\
&2 \dot{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \dot{r}_{vv} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 \quad (30)
\end{aligned}$$

将(30)式分别与  $\dot{r}_u, \dot{r}_v$  作内积,得

$$\dot{r}_u \cdot \dot{r}_u \frac{d^2 u}{ds^2} + \dot{r}_u \cdot \dot{r}_v \frac{d^2 v}{ds^2} + \dot{r}_u \cdot \dot{r}_{uu} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 +$$

$$2 \dot{r}_u \cdot \dot{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \dot{r}_u \cdot \dot{r}_{vv} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = 0$$

$$\dot{r}_v \cdot \dot{r}_u \frac{d^2 u}{ds^2} + \dot{r}_v \cdot \dot{r}_v \frac{d^2 v}{ds^2} + \dot{r}_v \cdot \dot{r}_{uu} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 +$$

$$2 \dot{r}_v \cdot \dot{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \dot{r}_v \cdot \dot{r}_{vv} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = 0$$

利用  $\dot{r}_u \cdot \dot{r}_u = E, \dot{r}_u \cdot \dot{r}_v = F, \dot{r}_v \cdot \dot{r}_v = G$ , 可得

$$\dot{r}_u \cdot \dot{r}_{uu} = \frac{1}{2} E_u$$

$$\dot{r}_u \cdot \dot{r}_{uv} = \frac{1}{2} E_v$$

$$\dot{r}_v \cdot \dot{r}_{uu} = \frac{1}{2} G_u$$

$$\dot{r}_v \cdot \dot{r}_{vv} = \frac{1}{2} G_v$$

$$\dot{r}_v \cdot \dot{r}_{uv} = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$\dot{r}_u \cdot \dot{r}_{vv} = F_v - \frac{1}{2} G_u$$

于是有

$$E \frac{d^2 u}{ds^2} + F \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{E_u}{2} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + E_v \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} +$$

$$\left( F_v - \frac{G_u}{2} \right) \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = 0$$

$$F \frac{d^2 u}{ds^2} + G \frac{d^2 v}{ds^2} + \left( F_u - \frac{E_v}{2} \right) \left( \frac{du}{ds} \right)^2 +$$

$$G_u \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{G_v}{2} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = 0 \quad (31)$$

(31)式的等价形式

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 u}{ds^2} \\ \frac{d^2 v}{ds^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{E_u}{2} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + E_v \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \left( F_v - \frac{G_u}{2} \right) \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 \\ \left( F_u - \frac{E_v}{2} \right) \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + G_u \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{G_v}{2} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (32)$$

(32)式就是一般参数曲面上的测地线的方程,这里给出

了直接的推导过程。利用(32)式可证明曲面上测地线存在唯一性定理<sup>[1-5]</sup>,求解曲面上测地线方程及理论推导。

特别地,当曲面 $\hat{r} = \hat{r}(u, v)$ 上的坐标曲线构成正交网时,有 $\hat{r}_u \cdot \hat{r}_v = F = 0$ ,此时曲面上的曲线为测地线的充分必要条件为<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{E_u}{2E} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + \frac{E_v}{E} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} - \frac{G_u}{2E} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{E_v}{2G} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{G_u}{G} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{G_v}{2G} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 &= 0 \quad (33) \end{aligned}$$

(33)式可用于求解曲面正交网下曲面上测地线方程<sup>[2]</sup>。

#### 参考文献:

- [1] 梅向明,黄敬之.微分几何[M].4版.北京:高等教育出版社出版,2008.
- [2] Oprea J. Differential Geometry and Its Applications[M].北京:机械工业出版社,2005.
- [3] 陈维桓.微分几何[M].北京:北京大学出版社,2006.
- [4] 苏步青,胡和生,沈纯理,等.微分几何[M].北京:人民

教育出版社,1980.

- [5] 王幼宁,刘继志.微分几何讲义[M].北京:北京师范大学出版社,2003.
- [6] 邢家省,张光照.曲面上曲线的测地曲率向量的注记[J].吉首大学学报:自然科学版,2013,34(4):7-10.
- [7] 邢家省,高建全,罗秀华.曲面上测地线和短程线的性质[J].四川理工学院学报:自然科学版,2015,28(1):63-66.
- [8] 陈维桓.微分几何例题详解和习题汇编[M].北京:高等教育出版社出版,2010.
- [9] 梅向明,王汇淳.微分几何学习指导与习题选解[M].北京:高等教育出版社,2007.
- [10] 邓崇林,萧先雄.指南车在物理学中几何相位的应用[J].物理与工程,2014(2):1-8.
- [11] 张立新.测地线及其应用[J].鞍山师范学院学报,2005,7(4):3-4.

## Derivation of Calculation Formula of Geodesic Curvature Under the Coordinate Grid of the Orthogonal Curve

XING Jiasheng<sup>1,2</sup>, BAI Lu<sup>1,2</sup>, GAO Jianquan<sup>3</sup>

(1. School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. LMIB of the Ministry of Education, Beijing 100191, China; 3. Pingdingshan Institute of Education, Pingdingshan 467000, China)

**Abstract:** The derivation method of calculation formula of curve geodesic curvature on the curved surface was considered in the paper. Based on the coordinate grid of the orthogonal curve, the parametric equation form of the calculation formula of geodesic curvature on the surface was put forward, and thus a derivation method of Liouville formula to calculate the geodesic curvature was obtained. Taking good use of the orthogonal condition of curvilinear coordinate grid, a direct method for deriving the Liouville formula was introduced, which can figure out the internal links of these two derivation methods. Under the common parametric coordinate grid of curved surface, the form of differential equation set that parameter equation of geodesic curve meets was put forward directly, with which the geodesic curve differential equation set under coordinate grid of the orthogonal curve was derived.

**Key words:** geodesic curvature; coordinate grid of the orthogonal curve; Liouville formula; equation of geodesic curve