第 28 卷第 3 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 28　No. 3
2015 年 6 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Jun. 2015
文章编号:1673-1549(2015)03-0090-06　　DOI:10.11863/j.suse.2015.03.19

Robin 型无穷多点边值问题正解的存在性

覃仕霞[1], 罗　圆[2]

(1. 成都信息工程学院应用数学学院, 成都　610225;2. 西南交通大学土木工程学院, 成都　610031)

摘　要:通过利用锥上不动点定理,讨论了二阶 Robin 型无穷多点边值问题正解的存在性。首先利用一个线性方程的特解构造新的 Green 函数,进而证明了 Robin 型无穷多点边值问题的微分方程等价于一个简单的积分方程;最后利用不动点定理研究此积分方程,并推导出原 Robin 型无穷多点边值问题在满足条件 $0 \leqslant f_0^+ < M_1, m_1 < f_\infty^- \leqslant \infty$ 或 $0 \leqslant f_\infty^+ < M_1, m_1 < f_0^- \leqslant \infty$ 时,至少存在一个正解。主要结果改进和推广了无穷多点边值问题的相关结论。

关键词:常微分方程;Robin 型无穷多点边值问题;等价积分方程;正解;不动点定理

中图分类号:O29　　**文献标志码**:A

引　言

常微分方程多点边值问题对应用数学、流体力学及弹性理论等领域的发展都具有非常重要的作用,关于其正解存在性的讨论,已成为该领域的一个研究热点[1-9]。2009 年,马如云[10]等研究无穷多点边值问题:

$$\begin{cases} u''(t) + g(t)f(u(t)) = 0, t \in (0,1) \\ u(0) = 0, ''(1) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i u(\xi_i) \end{cases}$$

并且得到了 f 在超线性或次线性增长条件下的正解存在性结果。2010 年,Luo Y[11] 等又证明了 f 在更一般的条件下,上述二阶非线性无穷多点边值问题至少存在一个正解。但关于 Robin 型无穷多点边值问题可解性的讨论,还未见相关报道。

本文运用锥上不动点定理,讨论了 Robin 型无穷多点边值问题:

$$\begin{cases} u'' + a(t)u' + b(t)u + h(t)f(t) = 0 \\ u'(0) = 0, u(1) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i u(\xi_i) \end{cases} \tag{1}$$

在条件

$$\begin{cases} 0 \leqslant f_0^+ = \lim\limits_{u->0^+} \dfrac{f(u)}{u} < M_1, m_1 < f_\infty^- = \lim\limits_{u->\infty^-} \dfrac{f(u)}{u} \leqslant \infty \text{ 或者} \\ 0 \leqslant f_\infty^+ = \lim\limits_{u->\infty^+} \dfrac{f(u)}{u} < M_1, m_1 < f_0^- = \lim\limits_{u->0^-} \dfrac{f(u)}{u} \leqslant \infty \end{cases} \tag{2}$$

下正解的情况。通过借助线性方程

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0 \tag{3}$$

的特解构造新的 Green 函数,进而证明了问题(1)等价于一个简单积分方程,然后通过研究此积分方程讨论原边值问题是否存在正解。本文的主要结果改进和推广了 Robin 型边值问题以及无穷多点边值问题的相关结果。

1　相关引理

本文假设:

(H1) $\xi_i \in (0,1), \alpha_i \in (0,\infty)$ 均为给定常数,并且满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_1(\xi_i) < 1$, 其中 $\varphi_1(\xi_i)$ 为线性边值问题:

收稿日期:2015-05-14

基金项目:国家自然科学基金项目(11171046)

作者简介:覃仕霞(1985-),女,湖南常德人,助教,硕士,主要从事应用数学方面的研究,(E-mail)shixiaq@cuit.edu.cn

$$\begin{cases}u''+a(t)u'+b(t)u=0\\u'(0)=0,u(1)=1\end{cases}$$

的唯一正解。

(H2) $f:[0,\infty)->[0,\infty)$ 是连续函数, $h\in C([0,1],[0,\infty))$ 并且存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $h(x_0)>0$。

(H3) $a\in C[0,1],b\in C([0,1],(-\infty,0))$。

本文的主要工具是锥上不动点定理。设 K 是实 Banach 空间,并且

$$K_r=\{x\in K,\|x\|\leqslant r\},\partial K_r=\{x\in K,\|x\|=r\}$$

$$\bar{K}_{r,R}=\{x\in K,r\leqslant x\leqslant R\}$$

其中, $0<r<R<\infty$。

引理 1[12] 令 K 是实 Banach 空间, $T:\bar{K}_R->K$ 是全连续算子。如同时满足条件:(1) $\|Ax\|\leqslant\|x\|,\forall x\in\partial K_R$,(2)存在 $e\in\partial K_1$, 使得 $x\neq Tx+\lambda e,x\in\partial K_r,\lambda>0$。那么, T 在 $K_{r,R}$ 上至少有一个不动点。如果(1)在 ∂K_r、(2)在 ∂K_R 上成立,那么结论依然成立。

引理 2[13] 假设(H3)成立,设 φ_1 和 φ_2 分别是线性问题

$$\begin{cases}\varphi''_1(t)+a(t)\varphi_1'(t)+b(t)\varphi_1(t)=0\\\varphi_1'(0)=0,\quad\varphi_1(1)=1\end{cases}\tag{4}$$

和

$$\begin{cases}\varphi''_2(t)+a(t)\varphi_2'(t)+b(t)\varphi_2(t)=0\\\varphi_2(0)=1,\quad\varphi_2(1)=0\end{cases}\tag{5}$$

的解,则

(1) φ_1 为$[0,1]$上的不减函数,且 $\varphi_1>0$ 在$[0,1]$上。

(2) φ_2 为$[0,1]$上的严格减函数。

(3) $\varphi_2'(0)<0$。

并且问题(4)和(5)均有唯一解。

引理 3[14] 设 $x_1(t),x_2(t),\cdots x_{n-1}(t),x_n(t)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=0$$

的任意 n 个解。其中,系数 $a_i(t),i=1,\cdots n$ 在区间 $a<t<b$ 上连续。$W(t)$ 是它的 Wronskiom 行列式,则对(a,b)上任意一点 t_0,都有 $W(t)=W(t_0)=\exp(-\int_t^b a_1(s)\mathrm{d}s)$。

引理 4 设(H1)~(H3)成立,则问题(1)等价于积分方程

$$u(t)=\int_0^1G(t,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+A\varphi_1(t)\tag{6}$$

其中

$$A=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_0^1G(\xi_i,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s}{1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_1(\xi_i)}\tag{7}$$

$$p(t)=\exp(\int_0^ta(s)\mathrm{d}s)\tag{8}$$

$$G(t,s)=\frac{1}{\rho}\begin{cases}\varphi_1(t)\varphi_2(s),&0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\\\varphi_1(s)\varphi_2(t),&0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\end{cases}\tag{9}$$

$$\rho=-\varphi_1(0)\varphi_2'(0)\tag{10}$$

证明 为了方便,令 $y(t)=h(t)f(u(t))$。首先,设 $u(t)$ 是方程(1)的一个解,验证它可以由(6)式表示。由引理 2 可知,线性方程 $u''+a(t)u'+b(t)u=0$ 有两个线性无关的解 φ_1 和 φ_2, 因为

$$\begin{vmatrix}\varphi_1(0)&\varphi_2(0)\\\varphi_1'(0)&\varphi_2'(0)\end{vmatrix}=\varphi_1(0)\varphi_2'(0)\neq 0$$

所以可以采用常系数变易法,令

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1(t)&\varphi_2(t)\\\varphi_1'(t)&\varphi_2'(t)\end{vmatrix}$$

再利用引理 3 得到

$$W(t)=W(0)\frac{1}{p(t)}=\frac{1}{p(t)}\begin{vmatrix}\varphi_1(0)&\varphi_2(0)\\\varphi_1'(0)&\varphi_2'(0)\end{vmatrix}\tag{11}$$

于是将方程(1)的通解表示为:

$$\begin{aligned}u(t)&=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\int_0^t\frac{\varphi_2(s)y(s)}{W(s)}\mathrm{d}s+\varphi_2(t)\int_0^t\frac{\varphi_1(s)y(s)}{W(s)}\mathrm{d}s=\\&c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\int_0^t\frac{\varphi_2(s)y(s)p(s)}{W(0)}\mathrm{d}s+\varphi_2(t)\int_0^t\frac{\varphi_1(s)y(s)p(s)}{W(0)}\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{12}$$

其中, c_1 和 c_2 为常数。

把方程(1)的边界条件 $u'(0)=0,u(1)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_iu(\xi_i)$ 代入公式(12),解出

$$c_1=u(1)-\int_0^1\frac{\varphi_2(s)y(s)p(s)}{w(0)}\mathrm{d}s,c_2=0$$

再把 c_1 和 c_2 代入(12)式并注意到 $u(1) = A, \rho = -W(0)$, 化解即可得到

$$u(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \varphi_1(t)\int_0^t \frac{\varphi_2(s)y(s)p(s)}{W(0)}ds -$$

$$\varphi_2(t)\int_0^t \frac{\varphi_1(s)y(s)p(s)}{W(0)}ds =$$

$$u(1)\varphi_1(t) - \varphi_1(t)\int_0^1 \frac{\varphi_2(s)y(s)p(s)}{W(0)}ds +$$

$$\varphi_1(t)\int_0^t \frac{\varphi_2(s)y(s)p(s)}{W(0)}ds -$$

$$\varphi_2(t)\int_0^t \frac{\varphi_1(s)y(s)p(s)}{W(0)}ds =$$

$$A\varphi_1(t) + \frac{1}{\rho}\int_t^1 \varphi_1(t)\varphi_2(s)y(s)p(s)ds +$$

$$\frac{1}{\rho}\int_0^t \varphi_2(t)\varphi_1(s)y(s)p(s)ds =$$

$$\int_0^1 G(t,s)y(s)p(s)ds + A\varphi_1(t)$$

其次,验证由式(6)定义的 $u(t)$ 是问题(1)的解。由于

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)p(s)y(s)ds + A\varphi_1(t) =$$

$$\frac{1}{\rho}[\int_0^t \varphi_1(s)\varphi_2(t)p(s)y(s)ds +$$

$$\int_t^1 \varphi_1(t)\varphi_2(s)p(s)y(s)ds] + A\varphi_1(t)$$

对式两边分别对 t 求导,可推出

$$u'(t) = \frac{1}{\rho}[\varphi_2{}'(t)\int_0^t \varphi_1(s)p(s)y(s)ds +$$

$$\varphi_1(t)\varphi_2(t)p(s)y(s) +$$

$$\varphi_1{}'(t)\int_t^1 \varphi_2(s)p(s)y(s)ds -$$

$$\varphi_1(t)\varphi_2(t)p(s)y(s)] + A\varphi_1{}'(t) =$$

$$\frac{1}{\rho}[\varphi_2{}'(t)\int_0^t \varphi_1(s)p(s)y(s)ds +$$

$$\varphi_1{}'(t)\int_t^1 \varphi_2(s)p(s)y(s)ds] + A\varphi_1{}'(t)$$

$$u''(t) = \frac{1}{\rho}[\varphi''_2(t)\int_0^t \varphi_1(s)p(s)y(s)ds +$$

$$\varphi_2{}'(t)\varphi_1(t)p(t)y(t) +$$

$$\varphi''_1(t)\int_t^1 \varphi_2(s)p(s)y(s)ds -$$

$$\varphi_1{}'(t)\varphi_2(t)p(t)y(t)] + A\varphi''_1(t)$$

把 $u(t)$、$u'(t)$ 和 $u''(t)$ 的表达式以及等式(11)代入 $u'' + a(t)u' + b(t)u$ 中,并利用引理 3 有

$$u'' + a(t)u' + b(t)u =$$

$$\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1{}'(t) & \varphi_2{}'(t) \end{vmatrix} p(t)y(t) + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$A(\varphi''_1(t) + a(t)\varphi_1{}'(t) + b(t)u(t)) =$$

$$\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \varphi_1{}'(0) & \varphi_2{}'(0) \end{vmatrix} \exp(-\int_0^t a(s)ds)p(t)y(t) +$$

$$A(\varphi''_1(t) + a(t)\varphi_1{}'(t) + b(t)u(t)) =$$

$$-y(t) + A(\varphi''_1(t) + a(t)\varphi_1{}'(t) +$$

$$b(t)u(t)) = y(t)$$

验证 $u(t)$ 满足问题(1)的边界条件。由于

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)p(s)h(s)f(u(s))ds + A\varphi_1(t)$$

那么

$$u(\xi_i) = \int_0^1 G(\xi_i,s)p(s)y(s)ds + A\varphi_1(\xi_i) =$$

$$\int_0^1 G(\xi_i,s)p(s)y(s)ds +$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_0^1 G(\xi_i,s)p(s)y(s)ds}{1 - \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_1(\xi_i)}\varphi_1(\xi_i) =$$

$$\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_1(\xi_i)}\int_0^1 G(\xi_i,s)p(s)y(s)ds$$

将上式两边同时乘以 α_i 再从 1 到 ∞ 求和,可得 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i u(\xi_i) = A$。由式(6)能够得到 $u(1) = A$。故, $u(1) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i u(\xi_i)$。

由于 $\varphi'_1(0) = 0$, 所以

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{\rho}\varphi_2{}'(t)\int_0^t \varphi_1(s)p(s)y(s)ds + \\ \qquad \frac{1}{\rho}\varphi_1{}'(t)\int_t^1 \varphi_2(s)p(s)y(s)ds + A\varphi_1{}'(t) \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

综上所述,(6)式定义的 $u(t)$ 是问题(1)的解,证毕。

由(H2),存在 $t_0 \in (0,1)$ 使得 $h(t_0) > 0$。因此,存在 $a,b \in (0,1), a < b$ 使得 $\int_a^b G(s,s)p(s)h(s)ds > 0$, 并且有 $\int_a^b G(t,s)p(s)h(s)ds > 0, a \leqslant t \leqslant b$。由于

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)}=\begin{cases}\dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_1(s)}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\\ \dfrac{\varphi_2(t)}{\varphi_2(s)}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\end{cases}\tag{13}$$

令

$$M_0=\min_{a\leqslant t\leqslant b}\left\{\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_1(s)},\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_2(s)}\right\}$$

由引理 2 知, $\varphi_1(t)$ 是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的不减函数, $\varphi_2(t)$ 是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的严格减函数,所以有

$$0<M_0\leqslant\min\left\{\frac{\varphi_1(b)}{\varphi_1(a)},\frac{\varphi_2(a)}{\varphi_2(b)}\right\}$$

令 $M=\min\{M_0,\varphi_1(a)\}$, 那么

$$G(t,s)\geqslant MG(s,s),a\leqslant t\leqslant b,0\leqslant s\leqslant 1\tag{14}$$

因此,构造由非负函数构成的锥

$$K=\{u(t)\in[0,1]\mid u(t)\geqslant 0,\ \min_{a\leqslant t\leqslant b}u(t)\geqslant M\|u\|\}\tag{15}$$

定义算子 $T:C[0,1]\to C[0,1]$:

$$T(t)=\int_0^1 G(t,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+A\varphi_1(t)\tag{16}$$

由引理 4,边值问题(1)有解当且仅当 T 在[0,1]上至少有一个不动点。

引理 5　(ⅰ) $TK\subset K$;(ⅱ) T 是全连续算子。

证明　引理 5(ⅰ)由式(13)和引理 2 可得, $G(t,s)\leqslant G(s,s)$。因为

$$T(t)=\int_0^1 G(t,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+A\varphi_1(t)\leqslant\int_0^1 G(s,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+A\varphi_1(t)$$

所以,

$$\|T(t)\|\leqslant\int_0^1 G(s,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+A\varphi_1(1)$$

又由式(14)可知

$$\int_0^1 G(t,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant M\int_0^1 G(s,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

因此 $\forall u\in K$, 再结合 M 的定义,可得

$$\min_{a\leqslant t\leqslant b}T(t)=\min_{a\leqslant t\leqslant b}\left\{\int_0^1 G(t,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+A\varphi_1(t)\right\}\geqslant$$
$$M\min_{a\leqslant t\leqslant b}\left\{\int_0^1 G(s,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+A\frac{\varphi_1(t)}{M}\right\}\geqslant$$
$$M\left\{\int_0^1 G(s,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+A\frac{\varphi_1(a)}{M}\right\}\geqslant$$
$$\left\{\int_0^1 G(s,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+A\right\}\geqslant M\|Tu\|$$

故, $Tu\in K$ 并且 $TK\subset K$。

(ⅱ)不难验证 $T:K\to K$ 是全连续的,这里不再赘述。

2　主要结果

定理 1　如果(H1)、(H2)和(H3)成立,并且 f 满足下面两个条件之一

(ⅰ) $0\leqslant f_0^+\leqslant M_1,m_1<f_\infty^-\leqslant\infty$

(ⅱ) $0\leqslant f_\infty^+\leqslant M_1,m_1<f_0^-\leqslant\infty$

其中

$$M_1=\left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left(\int_0^1 G(t,s)p(s)h(s)\mathrm{d}s+\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_0^1 G(\xi_i,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s}{1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_1(\xi_i)}\right)\right]^{-1}$$

$$m_1=\left[\min_{a\leqslant t\leqslant b}\left(\int_a^b G(t,s)p(s)h(s)\mathrm{d}s\right)\right]^{-1}$$

$$f_0^+=\overline{\lim_{u\to 0^+}}\frac{f(u)}{u},f_0^-=\underline{\lim}_{u\to 0^-}\frac{f(u)}{u}$$

$$f_\infty^+=\overline{\lim_{u\to\infty^+}}\frac{f(u)}{u},f_\infty^-=\underline{\lim}_{u\to\infty^-}\frac{f(u)}{u}。$$

则,问题(1)至少有一个正解。

证明　由引理 4,只需证明 T 在[0,1]上有一个不动点,再根据引理 5, $T:K\to K$ 是全连续的。证明 T 满足引理 1 的其余部分:

假设定理 1(ⅰ)成立。由 $0\leqslant f_0^+\leqslant M_1$, 存在 $0<r<1$ 使得 $f(u)<M_1u,0<u\leqslant r$。那么 $\forall u\in\partial K_r$ 即 $\|u\|=r$, 注意到 $\varphi_1(1)=1$, 所以

$$T(t)=\int_0^1 G(t,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_0^1 G(\xi_i,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s}{1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_1(\xi_i)}\varphi_1(t)\leqslant$$
$$M_1\left[\int_0^1 G(s,s)p(s)h(s)u(s)\mathrm{d}s+\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_0^1 G(\xi_i,s)p(s)h(s)u(s)\mathrm{d}s}{1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_1(\xi_i)}\varphi_1(1)\right]\leqslant$$

$$\mathrm{M}_1\left[\int_0^1 \mathrm{G}(\mathrm{s},\mathrm{s})\mathrm{p}(\mathrm{s})\mathrm{h}(\mathrm{s})ds + \frac{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_0^1 \mathrm{G}(\xi_i,\mathrm{s})\mathrm{p}(\mathrm{s})\mathrm{h}(\mathrm{s})ds}{1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_1(\xi_i)}\right]\|\mathrm{u}\|\leqslant$$

$$\mathrm{r} = \|\mathrm{u}\|$$

因此，$\|Tu\|\leqslant\|u\|, \forall u\in\partial K_r$。

另一方面，由于 $f_\infty^- > m_1$，可知存在 $\eta > M$ 使得 $f(u)\geqslant m_1u, \forall u\geqslant\eta$。令 $R = M^{-1}\eta$，那么 $R>1>r$，并且

$$\min\{u(t):a\leqslant t\leqslant b\}\geqslant M\|u\| = \eta \quad (17)$$

令 $\varphi(t) = 1, \forall t\in[0,1]$，那么 $\varphi\in\partial K_1$。证明

$$u\neq Tu+\lambda\varphi, u\in\partial K_R, \lambda>0 \quad (18)$$

假设式(18)不成立，那么存在 λ_0 使得 $u_0 = Tu_0+\lambda_0\varphi$。令 $\delta = \min\{u_0(t):a\leqslant t\leqslant b\}$，由式(17)可知，$\delta\geqslant\eta$，并且

$$u_0 = Tu_0+\lambda_0\varphi = \int_0^1 G(t,s)p(s)h(s)f(u_0(s))\mathrm{d}s + \frac{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_0^1 G(\xi_i,s)p(s)h(s)f(u_0(s))\mathrm{d}s}{1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_1(\xi_i)}\varphi_1(t)+\lambda_0\geqslant$$

$$m_1\int_0^1 G(t,s)p(s)h(s)u_0(s)\mathrm{d}s+\lambda_0\geqslant\delta+\lambda_0$$

即 $\delta\geqslant\delta+\lambda_0$，矛盾。

假设定理 1(ⅱ)成立。由于 $f_\infty^+ < M_1$，可以选 $\tau\in(f_\infty^+, M_1)$ 并且存在 $R_1>0$ 使得 $f(x)<\tau x, \forall x\geqslant R_1$。由 f 的连续性可知 $0\leqslant f(x)\leqslant N_4+\tau x, 0\leqslant x<\infty$，其中，$N_4 = \max\{f(x):0\leqslant x\leqslant R_1\}<\infty$。令 $R = N_4(M_1-\tau)^{-1}$，那么对任意的 $u(t)\in\partial K_R, t\in[0,1]$，有

$$|Tu|\leqslant(N_4+\tau\|u\|)\left[\int_0^1 G(t,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s + \frac{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_0^1 G(\xi_i,s)p(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s}{1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_1(\xi_i)}\right]\leqslant$$

$$\frac{(N_4+\tau\|u\|)}{M_1} = R = \|u\|$$

因此，对任意的 $u\in\partial K_R$ 有 $\|Tu\|\leqslant\|u\|$。

其次，由于 $\mathrm{f}_0^- > \mathrm{m}_1$，存在 $r\in(0,R)$ 使得 $f(x)>m_1x, 0\leqslant x\leqslant r$。相仿，可令 $\varphi(t) = 1, \forall t\in[0,1]$，那么 $\varphi\in\partial K_1$。证明

$$u\neq Tu+\lambda\varphi, u\in\partial K_R, \lambda>0$$

假设该式不成立，那么存在 λ_0 和 $u_0\in\partial K_R$ 使得 $u_0 = Tu_0+\lambda_0\varphi$。令 $\delta = \min\{u_0(t):a\leqslant t\leqslant b\}$，则可以推出

$$u_0 = Tu_0+\lambda_0\varphi = \int_0^1 G(t,s)p(s)h(s)f(u_0(s))\mathrm{d}s + \frac{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_0^1 G(\xi_i,s)p(s)h(s)f(u_0(s))\mathrm{d}s}{1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_1(\xi_i)}\varphi_1(t)+\lambda_0\geqslant$$

$$m_1\int_0^1 G(t,s)p(s)h(s)u_0(s)\mathrm{d}s+\lambda_0\geqslant\delta+\lambda_0$$

即 $\delta\geqslant\delta+\lambda_0$，矛盾。证毕。

参 考 文 献:

[1] Ming H H.Problem of the periodic welding of anisotropic elastic plane with different materials[J].Applied Mathematics and Mechanics,1999,20(7):761-766.

[2] Zhan N M,Hong Y M,Dong T L.Application of two-dimensional boundary element method to resonant frequency problem of accelerator cavity[J].Atomic Energy Scinece and Technology,2004,38(1):10-13.

[3] Zhang T.A finite element method for pricing American option in bonds[J].Mathematica Numerica Sinica,2004,26(3):277-282.

[4] 高洁,周玮.一类非线性分数阶微分方程边值解的存在性和唯一性[J].应用数学学报,2014,37(3):470-486.

[5] 陆心怡,张兴秋,王林.一类分数阶微分方程 m 点边值问题正解的存在性[J].系统科学与数学,2014,34(2):218-230.

[6] 林红绪,杨李凡,胡雨欣.一类带不连续源项的二阶半线性奇摄动 Robin 型边值问题[J].应用数学,2015,28(1):47-56.

[7] Feng W,Webb J R.Solvability of m-point boundary value problems with non-linear growth[J].J.Math.Anal.Appl,1997,212:467-480.

[8] 许丁,谢公南.基于不动点方法求解非线性 Falkner-Skan 流动方程[J].应用数学和力学,2015,36(1):78-86.

[9] Gupta C P,Trofimchuk S I.Sovability of a mult-point boundary value problem and related a priori estimates

[J].Canada.Appl.Math.Quart,1998,6(1):45-60.

[10] 马如云,范虹霞,韩晓玲.二阶常微分方程无穷多点边值问题的正解[J].数学物理学报,2009,29A(3):699-706.

[11] Luo Y,Wu Z G,Du C.On the positive solutions of some-point boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis Forum,2010,15:121-128.

[12] 郭大均.非线性泛函分析[M].济南:山东科学技术出版社,1985.

[13] 马如云.一类非线性 m-点边值问题正解的存在性[J].数学学报,2003,46:279-292.

[14] 周义仓,勒祯,秦军林.常微分方程及其应用[M].北京:科学出版社,2003.

Beingness of the Positive Solutions for ∞-Point Boundary Value Problems of Robin Type

QIN Shixia[1], *LUO Yuan*[2]

(1. College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China;
2. School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: The existence of positive solutions for the second order ∞-point boundary value problems of Robin type was discussed through using the fixed point theorem in cone. Firstly, the special solution of a linear equation was used to construct a new Green function, and then, the differential equation of the ∞-point boundary value problems of Robin type was proved that it is equivalent to a simple integral equation. Finally, the integral equation was studied through using the fixed point theorem and the ∞-point boundary value problems of Robin type mentioned above was derived that there at least exists one positive solution if the condition of $0 \leqslant f_0^+ < M_1, m_1 < f_\infty^- \leqslant \infty$ or $0 \leqslant f_\infty^+ < M_1, m_1 < f^{-}0 \leqslant \infty$ is met. The main results presented in this paper improved and generalized some relevant results of ∞ -point boundary value problems of Robin type.

Key words: ordinary differential equation; ∞-point boundary value problems of Robin type; equivalence integral equation; positive solutions; fixed-point theory