第 28 卷第 3 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 28　No. 3
2015 年 6 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Jun. 2015
文章编号:1673-1549(2015)03-0096-05　　DOI:10.11863/j. suse.2015.03.20

广义均值不等式及其简单应用

王　琳[1], 杨　秀[2]

(1. 成都理工大学管理科学学院, 成都　610059; 2. 乐山师范学院数学与信息科学学院, 四川　乐山　614000)

摘　要:将均值不等式从二维空间推广到 n 维空间,并着重研究了利用倒推法和反向归纳法证明广义均值不等式,从而验证了证明不等式的一般方法的有效性;从形式上和理论上提出广义均值不等式的幂次一般形式和积分形式,并结合基本均值不等式性质更进一步研究了均值不等式的积分形式的证明,拓展了均值不等式的理论应用范围。用实例充分体现了均值不等式的性质以及如何结合广义均值不等式与数学建模思想解决问题,由此说明广义均值不等式的重要性。

关键词:广义均值不等式;积分形式;二维空间; n 维空间;基本均值不等式

中图分类号:O178　　**文献标志码**:A

引　言

均值不等式是证明不等式的重要方法,在教学和研究中也占据着不可替代的位置[1]。运用数学方法解决生活中的现实问题是非常必要的,而运用不等式的原理来分析问题是研究一系列问题的重要方法。在解决数学问题上均值不等式的许多性质起到了非常重要的作用,在现实生活中也有着广泛的应用[2]。于是,均值不等式的发现、验证以及应用是当今数学领域研究的主要方向[3-4]。本文着重研究了广义均值不等式定义证明及其应用,并通过广义均值不等式的两种推广形式的研究突出不等式在数学领域的地位,同时以两个实例分别研究了广义均值不等式在理论和实际生活中的应用。

1　广义均值不等式的定义

调和平均数不超过几何平均数,几何平均数不超过算术平均数,算术平均数不超过平方平均数。即:

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant Q_n$$

其中,调和平均数 H_n:

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

几何平均数 G_n:

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

算术平均数 A_n:

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

平方平均数 Q_n:

$$Q_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

2　广义均值不等式的证明

基本均值不等式的证明通常用普通证明不等式的方法即可,但广义均值不等式是在基本均值不等式的基础上幂的推广[5],用简单的比大小的方式去证明往往说服力不够[6-8]。广义均值不等式的证明方法有很多种。例如:数学归纳法(第一数学归纳法或者反向归纳法)、排序不等式法、拉格朗日乘数法和柯西不等式法等。[9-11]

2.1　证明 $A_n \leqslant Q_n$

采用倒推法证明这个不等式,即证:对 $\forall x_i \geqslant 0(i = 1,2,\cdots,n)$ 恒有

收稿日期:2015-04-24

作者简介:王 琳(1989-),女,四川仁寿人,硕士生,主要从事运筹学与控制论方面的研究,(E-mail)1101772777@qq.com

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

且其中的等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立。

要证明不等式

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

即证明

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$$

展开不等式化简可得:

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq$$
$$2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_{n-1}x_n$$

观察可知不等式左边有 $n(n-1)$ 项,不等式右边有 $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ 项,将不等式左右两边对应起来,即不等式右边 $2x_ix_j$ 对应不等式左边 $x_i^2 + x_j^2$, $i \neq j$, $i = 1,2,3,\cdots,n$; $j = 1,2,3,\cdots,n$。又因为在二维空间里有 $x_i^2 + x_j^2 \geq 2x_ix_j$, 其中 $i \neq j$, $i = 1,2,3,\cdots,n$; $j = 1,2,3,\cdots,n$。由此可知

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq$$
$$2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_{n-1}x_n$$

成立,当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时等号成立。

所以对 $\forall x_i \geq 0 (i = 1,2,\cdots,n)$ 恒有

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

其中的等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立。

2.2 证明 $H_n \leq G_n \leq A_n$

采用反向归纳法,即证:对 $\forall x_i \geq 0 (i = 1,2,\cdots,n)$ 恒有

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1}$$

且其中的等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立。

证明 (Ⅰ)先证明命题对一切 $n = 2^k (k = 1,2,\cdots)$ 成立。

由题知

$$\sqrt{x_1x_2} = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{2}$$

当且仅当 $x_1 = x_2$ 时等号成立。

又因为

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} = \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\ \sqrt{x_3x_4}}$$

利用(2)式可得:

$$\sqrt{\sqrt{x_1x_2}\ \sqrt{x_3x_4}} \leq \frac{\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_3x_4}}{2} \leq \frac{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)}{2}$$

整理得:

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ 时等号成立。

类似方法,对 $\forall k \in N$, 重复上述方法 k 次,得:

$$\sqrt[2^k]{x_1x_2\cdots x_{2^k}} \leq \sqrt[2^{k-1}]{\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_3 + x_4}{2} \cdots \frac{x_{2^k-1} + x_{2^k}}{2}} \leq \cdots \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2^k}$ 时等号成立。

(Ⅱ)记 $X = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, 则 $nX = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$。假设不等式对 $n+1$ 成立,则

$$X = \frac{nX + X}{n+1} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + X}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{x_1x_2\cdots x_nX}$$

所以有:

$$X^{n+1} \geq x_1x_2\cdots x_nX$$
$$X^n \geq x_1x_2\cdots x_n$$
$$X \geq (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

这表明不等式对 n 成立。跟 $n+1$ 时一样,当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时等号成立。

由此可知:对 $\forall x_i \geq 0 (i = 1,2,\cdots,n)$ 恒有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

且其中的等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立。

同理对 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \cdots \frac{1}{x_n}$ 使用上面的结论,则可得:

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时等号成立。

综上可知:对 $\forall x_i \geq 0 (i = 1,2,\cdots,n)$ 恒有

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

且其中的等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立。

3 均值不等式的推广形式

3.1 一般推广式

设 $x_i \geqslant 0 (i = 1,2,\cdots,n)$, 记

$$M_r(x) \equiv \left(\frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \equiv$$

$$\left(\frac{x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} (r > 0)$$

称 $M_r(x)$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 r 次幂平均。它与算术平均的关系是:

$$M_1(x) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \equiv A_n(x)$$

$$M_r(x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \equiv \left(\frac{x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \equiv$$

$$(A(x^r))^{\frac{1}{r}}$$

3.2 平均值不等式的积分形式

设 $r > 0, f(x) > 0, p(x) > 0$, 在 $[a,b]$ 上有定义, 且下面的积分有意义,

记:

$$A(f) = \frac{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}$$

$$M_r(f) = \left(\frac{\int_a^b p(x)f^r(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$G(f) = \exp\left(\frac{\int_a^b p(x)\ln f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)$$

则有 $G(f) \leqslant A(f), G(f) \leqslant M_r(f)$, 若用

$$q(x) = \frac{p(x)}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}$$

取代 $p(x)$, 即有

$$e^{\int_a^b q(x)\ln f(x)\mathrm{d}x} \leqslant \left(\int_a^b q(x)f^r(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}$$

($r > 0$, 包括 $r = 1$ 的情况)

证明 $\forall r > 0$,

$$M\frac{r}{2}(f) = \left(\int_a^b q(x)f\frac{r}{2}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{r}} =$$

$$\left(\int_a^b \sqrt{q(x)}\sqrt{q(x)}f^{\frac{r}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{r}}$$

由 Schwarz 不等式可以得到

$$M_{\frac{r}{2}}(f) \leqslant \left(\int_a^b q(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b q(x)f^r(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}$$

因 $\int_a^b q(x)\mathrm{d}x = 1$, 所以有

$$M_{\frac{r}{2}}(f) \leqslant \left(\int_a^b q(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b q(x)f^r(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$\left(\int_a^b q(x)f^r(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} = M_r(f)$$

由此有:

$$M_{\frac{r}{2}}(f) \leqslant M_r(f) \tag{3}$$

因为 $f(x) > 0$, $q(x) > 0$ 且所在区间 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上达到最大值, 即存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得

$$f(x_0) = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) = u$$

于是有

$$\left(\int_a^b q(x)f^r(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\int_a^b q(x)u^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$u\left(\int_a^b q(x)\mathrm{d}x\right) \xrightarrow{r \to +\infty} u$$

另一方面因 $f(x)$ 在 x_0 处连续, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists [\alpha, \beta] \subset [a,b]$ 使得 $f(x) > u - \varepsilon$ (当 $x \subset [\alpha,\beta]$ 时), 有

$$\left(\int_a^b q(x)f^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \geqslant \left(\int_\alpha^\beta q(x)f^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \geqslant$$

$$u - \varepsilon\left(\int_a^b q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \xrightarrow{r \to +\infty} u - \varepsilon$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知

$$\lim_{r\to\infty}\left(\int_a^b q(x)f^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} = u = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$$

且由积分中值定理可知

$$\int_a^b q(x)\ln f(x)\mathrm{d}x \leqslant \ln u\int_a^b q(x)\mathrm{d}x$$

所以有:

$$G(f) = \exp\left(\int_a^b q(x)\ln f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant e^{\ln u\int_a^b q(x)\mathrm{d}x} = u$$

由(1)式证明过程可知

$$M_r(f) \geqslant M_{\frac{r}{2}}(f) \geqslant M_{\frac{r}{4}}(f) \geqslant M_{\frac{r}{2^i}}(f) \geqslant$$

$$\cdots \lim_{r\to 0^+} M_r(f) = u$$

即证

$M_r(f) \geqslant G(f)$ 当 $r = 1$ 时, 即 $A(f) \geqslant G(f)$。证明过

程里“≥”中的等号,当且仅当 $f(x) \equiv c$ 时成立,其中 c 为常数。

4　广义均值不等式的应用

广义均值不等式的应用非常广泛,尤其是在数学领域,在大学数学里广义均值不等式在求极限、证明积分不等式等方面提供了更简易更有说服力的方法。

例 1　设正值函数 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,试证:

$$e^{\int_0^1 \ln g(x)\mathrm{d}x} \leqslant \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

证明　由条件知 $g(x)$, $\ln g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积。将 $[0,1]$ n 等分,作积分和,

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\int_0^1 \ln g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln g\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

所以

$$e^{\int_0^1 \ln g(x)\mathrm{d}x} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

根据几何平均数不超过算术平均数可得:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)$$

所以有:

$$e^{\int_0^1 \ln g(x)\mathrm{d}x} \leqslant \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

例 2　(均值不等式在数学建模的基本应用)平时在洗衣服时,衣服揉搓充分,再拧一拧把衣服中的水拧掉,但不管怎么拧水也不可能拧干。假设每次洗涤污物都能充分均匀地溶于水中,当水量给定时,如何才能洗得干净?用水量如何分配?剩余污物量的表达式是什么。

解　假设洗涤污物均匀分布在衣服上,并且衣服在开始漂洗前含有一定的水量,其含水量与每次漂洗后衣服的含水量相同,在建模过程中忽略水的温度,水质等因素对洗涤结果的影响。

y_0 为衣服上初始污物的含量一定, y_i 为第 i 次漂洗衣服用的水量, Y 为洗衣服总用水量一定, m 为每次漂洗衣服后留下的水的质量一定, n 为漂洗衣服的次数, x_n 为漂洗衣服 n 次后残留的污物量。观察剩余污物 x_n 与每次漂洗衣服的用水量 y_i 的关系,根据题意假设可知第一次放水后,质量为 y_0 的污物均匀分布在质量为 $m + y_1$ 的水中,衣服上剩余的污物量 x_i 与剩余的水量成正比,于是可得:

$$\frac{x_1}{m} = \frac{y_0}{m + y_1}$$

故有:

$$x_1 = \frac{my_0}{m + y_1} = \frac{y_0}{1 + \frac{y_1}{m}}$$

重复这样的步骤,由数学归纳法可得:

$$x_n = \frac{y_0}{\left(1 + \frac{y_1}{m}\right)\left(1 + \frac{y_2}{m}\right)\cdots\left(1 + \frac{y_n}{m}\right)} \tag{4}$$

又根据题意可知:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = Y \tag{5}$$

利用几何平均数不超过算术平均数则有:

$$\left(1 + \frac{y_1}{m}\right)\left(1 + \frac{y_2}{m}\right)\cdots\left(1 + \frac{y_n}{m}\right) \leqslant \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{y_i}{m}\right)}{n}\right]^{n} \tag{6}$$

由(2)式、(3)式和(4)式得:

$$x_n \geqslant \frac{y_0}{\left(1 + \frac{Y}{nm}\right)^{n}}$$

当且仅当 $1 + \frac{y_1}{m} = 1 + \frac{y_2}{m} = \cdots = 1 + \frac{y_n}{m}$ 时等号成立。

由此可知当漂洗衣服的次数一定时,要使衣服洗得最干净就应该让衣服上剩余的污物量 x_n 最小,根据不等式可知当 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$ 时,衣服洗得最干净。此时剩余的污物量为:

$$x_n = \frac{y_0}{\left(1 + \frac{Y}{nm}\right)^{n}}$$

5　结束语

本文主要探究广义均值不等式在理论上和形式上的推广,通过理论证明将均值不等式的核心思想推广开,将二维空间里的均值不等式推广到 n 维空间,用实例表明均值不等式在解决看似复杂的问题上是有明显优势和便利性的。

参 考 文 献:

[1] 沈旭,曾友良.“最近发展区”理论在例题设计中的应用—以“均值不等式求最值”为例[J].当代教育

理论与实践,2013,5(12):14-16.
[2] 刘敏.数学在实际生活中的应用[J].景德镇高专学报,2014,29(3):28-29.
[3] 陈纪修,於崇华,金路.数学分析(上)[M].北京:高等教育出版社,2004.
[4] 陈纪修,於崇华,金路.数学分析(下)[M].北京:高等教育出版社,2004.
[5] 梁巧丽,李胜平.n 元均值不等式的一种新证法[J].思茅师范高等专科学校学报,2005,21(3):50-51.
[6] 秦晓艳.均值不等式的一种简洁证明[J].佳木斯教育学院学报,2011(2):126.
[7] 李培莹.走出均值不等式求最值的误区[J].赤峰学院学报,2014,30(1):4-5.
[8] 黄清明,张江玲,张更容.一类不等式的研究[J].广西大学学报,2006,31:315-318.
[9] 伏春玲,董建德.均值不等式的性质推广及应用[J].甘肃联合大学学报,2010,24(5):26-31.
[10] 王珍娥.均值不等式在一类数列收敛证明中的应用[J].赣南师范学院学报,2007(6):107-109.
[11] 夏立标.均值不等式及其推广[J].宁德师专学报,2010,22(2):125-127.

Generalized Mean Inequality and Its Simple Application

WANG Lin[1], *YANG Xiu*[2]

(1. School of Administrative Science, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China;
2. School of Mathematics and Information Science, Leshan Normal University, Leshan 614000, China)

Abstract: The mean inequality is generalized from two-dimensional space to n-dimensional space, and the generalized mean inequality is proved through the reverse derivation method and reverse induction method, which proves the validity of the general approaches of inequality. The power general form and integral form of generalized mean inequality are presented in form and theory, and the method of proving am-gm inequality in integral is further studied through the combination with properties of basic am-gm inequality, then the theory application scope of mean inequality is expanded. Examples fully reflect the natures of am-gm inequality and how to combine it with mathematical modeling thought to solve problems, which shows that the generalized mean inequality is very important.

Key words: generalized mean inequality; integral form; two-dimensional space; *n*-dimensional space; basic average inequality