

基于 Rayleigh 法的简支梁桥自振频率计算

朱谊彪, 李 扬

(长安大学公路学院, 西安 710064)

摘 要:简支梁桥动载试验时,由于激振车辆的存在,通过仪器测得的是桥梁的有载频率,而非自振频率。按照 Rayleigh 法建立理论计算模型,给出有载频率解析计算公式,进一步通过有载频率解析计算公式得到自振频率计算公式。将简支梁桥跳车激励模型简化为单、双轴计算模型,推导了采用正弦函数、跨中有集中力作用下梁的静挠度曲线和均布荷载作用下梁的静挠度曲线分别作为振型函数时单轴和双轴计算模型自振频率计算公式。最后以某简支梁桥为例,通过数值计算比较了三种振型函数的计算精度,并推荐了单轴和双轴计算模型计算时宜采用的振型函数。

关键词:简支梁桥;Rayleigh 法;振型函数;自振频率

中图分类号:U441

文献标志码:A

引 言

随着中国交通基础设施建设的发展与城市化进程的加快,桥梁作为交通系统的重要组成部分发挥着越来越重要的作用。然而在桥梁结构服役年限的增加及交通量的不断增加的情况下,不少桥梁出现了结构损伤、耐久性能下降、疲劳破坏等影响桥梁结构正常使用的病害,使得这些桥梁不能满足目前的交通需求。简支梁桥具有受力明确、施工方便等优点,因此简支梁桥在中小跨径桥梁中占有相当大的比例。桥梁自振频率能在一定程度上反映桥梁结构整体损伤程度^[1],同时也是桥梁结构重要动力特性之一^[2]。

目前,公路桥梁荷载试验方法主要包括静载试验法和动载试验法^[3-4]。动载试验时,可以采用在桥面垫块上跳车对桥梁进行激励,但是振型函数的选取对桥梁自振频率计算有显著的影响,为了能够准确计算桥梁的自振频率,应选择合理的简化的振型函数。

谭国金等^[5]基于单个车辆作用下的桥梁有载频率计算公式得到了计算桥梁自振频率的解析表达式,但表

达式比较复杂,不适用于工程。黄永玉等^[6]采用假设振型法结合 Lagrange 运动方程推导了简支梁的自振频率方程,但仅给出特定振型函数下的自振频率解析表达式。彭献等^[7]采用特征值的方法计算桥梁各阶自振频率,但需写出模态函数。本文将跳车激振模型简化为单轴、双轴计算模型,采用 Rayleigh 法对简支梁桥的有载频率进行计算,基于有载频率计算表达式得到桥梁自振频率表达式,分析采用不同振型函数对自振频率计算结果的影响。

1 理论模型建立

1.1 Rayleigh 法

Rayleigh 法^[8-9]是指当系统做无阻尼固有振动时,系统的动能和位能反复交换,根据能量守恒原理,对于保守系统,可以得到:

$$T + V = \text{常数}$$

式中, T 和 V 分别表示系统的动能和位能。

简支梁桥如图 1 所示。单位长度上的质量为 $m(x)$, 坐标 x_1, x_2, \dots, x_j 处有集中质量 M_1, M_2, \dots, M_j 。对

收稿日期:2015-02-03

基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金资助(CHD2009JC166)

作者简介:朱谊彪(1993-),男,浙江东阳人,硕士生,主要从事桥梁结构理论方面的研究,(E-mail)593847383@qq.com

于无阻尼固有振动,梁的横向位移可以表示为:

$$y(x,t) = \varphi(x) \sin(\omega t + \theta)$$

式中, $\varphi(x)$ 为满足梁的位移边界条件的近似振型函数。

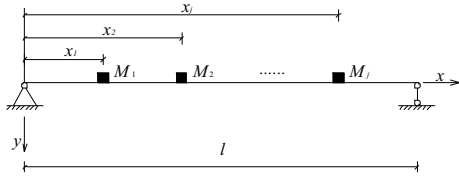


图 1 简支梁桥

梁的动能:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) [\dot{y}(x_i,t)]^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j M_i [\dot{y}(x_i,t)]^2 = \frac{1}{2} \cos^2(\omega t + \theta) \left[\int_0^l m(x) \varphi^2(x) dx + \sum_{i=1}^j M_i \varphi^2(x) \right] \omega^2$$

梁的位能:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sin^2(\omega t + \theta) \int_0^l EI(x) \left[\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right]^2 dx$$

那么,梁振动的解析法有载频率为:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI(x) \left[\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right]^2 dx}{\int_0^l m(x) \varphi^2(x) dx + \sum_{i=1}^j M_i \varphi^2(x_i)} \quad (1)$$

式中, $EI(x)$ 为梁截面抗弯惯性矩; $\varphi(x)$ 为满足位移边界条件的振型函数; $m(x)$ 为单位长度上的质量; M_i 为集中质量; ω 为解析法有载频率。

Rayleigh 指出,要想得到一个较好的解析法有载频率 ω 的近似值,则假定的振型函数必须满足几何边界条件(即梁端转角和位移条件)。若假定的振型函数是系统某一个特定振型,则式(1)计算的解析法有载频率 ω 就是精确值;如果假定的振型函数与精确的振型函数相差一个小量,那么式(1)给出的解析法有载频率 ω 和精确值之间的差值将非常小;此外采用式(1)计算的解析法有载频率将略高于精确值,因为假定的振型函数相当于引进了附加约束。

1.2 自振频率计算公式

通常工程中需要的是桥梁的自振频率,因此需要将实测的有载频率转换为自振频率。

设简支梁为等截面梁,梁截面抗弯惯性矩为 EI , 计算跨径为 l , 单位长度上的质量为 m , 满足位移边界条件的振型函数为 $\varphi(x)$, 集中质量为 M_i , 则简支梁桥的自振频率和实测有载频率之间的转换公式为:

$$\omega'' = \frac{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}}{\omega} \omega' \quad (2)$$

式中, ω'' 为自振频率, ω' 为实测有载频率, ω 为解析法有载频率, n 为振型阶数。

将实测各阶有载频率 ω' 代入式(2)可计算出桥梁的各阶自振频率。通常简支梁桥基频对应的振型占全部振型的 80% ~ 90%, 故下文仅对基频进行计算。

2 简化计算模型

实际工程中通常采用双轴汽车在桥面垫块上跳车来激励桥梁,通过测试此时桥梁的动力特性来推算桥梁的自振频率。双轴汽车落在桥面上近似于在梁上作用了两个集中质量,此时按式(2)计算时需考虑梁上作用两个集中质量情况。文献[10]指出不同跨径简支梁桥,当激振车辆的质量 M 与简支梁质量 ml 小于某一特定值时,可以将双轴计算模型简化成单轴计算模型。故本文在分析时认为不同跨径简支梁桥,当激振车辆的质量 M 与简支梁质量 ml 小于文献[10]对应的特定值,将简支梁桥跳车激励模型简化为单轴计算模型,反之简化为双轴计算模型。简支梁桥跳车激励单轴计算模型如图 2 所示,双轴计算模型如图 3 所示。

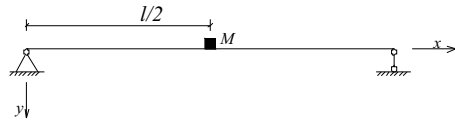


图 2 简支梁桥跳车激励单轴计算模型

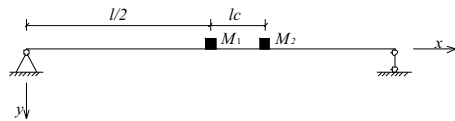


图 3 简支梁桥跳车激励双轴计算模型

3 数值计算

振型函数的选取十分重要,将影响最后自振频率的计算精度。设简支梁为等截面梁,梁截面抗弯惯性矩为 EI , 计算跨径为 l , 单位长度上的质量为 m , 激振车辆总质量为 M , 激振车辆前、后轴质量分别为 M_1, M_2 , 激振车辆后轴作用于简支梁跨中,激振车辆前后轴间距为 l_c 。考虑不同的激振车辆总质量 M 与简支梁质量 ml 比值,分析采用正弦函数:

$$\varphi_1(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}$$

跨中有集中力作用下梁的静挠度曲线:

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} a_2 \left(-x^3 + \frac{3l^2}{4}x \right) & (0 < x < \frac{l}{2}) \\ a_2 \left(x^3 - 3lx^2 + \frac{9l^2}{4}x - \frac{l^3}{4} \right) & (\frac{l}{2} < x < l) \end{cases}$$

均布荷载作用下梁的静挠度曲线:

$$\varphi_3(x) = a_3(x^4 - 2lx^3 + l^3x)$$

作为振型函数对自振频率计算结果的影响。这三种振型函数对应于单、双轴计算模型的解析法有载频率的计

算表达式见表1。

将实测的有载频率 ω' 和计算所得的解析法有载频率 ω 代入式(2)便可解得自振频率 ω'' 。

表1 三种振型函数对应的单、双轴计算模型的解析法有载频率的平方

振型函数	单轴计算模型	双轴计算模型
$\varphi_1(x)$	$\frac{EI\pi^4}{ml^4 + 2Ml^3}$	$\frac{EI\pi^4}{ml^4 + 2M_1l^3 \sin^2\left[\frac{\pi}{l}l'\right] + 2M_2l^3}$
$\varphi_2(x)$	$\frac{3EI}{0.03ml^4 + 0.06Ml^3}$	$\frac{3EI}{0.03ml^7 + M_1\left[l'^3 - 3ll'^2 + 2.25l^2l' - \frac{l^3}{4}\right] + 0.25M_2l^3}$
$\varphi_3(x)$	$\frac{4.8EI}{0.05ml^4 + 0.09Ml^3}$	$\frac{4.8EI^5}{0.05ml^9 + M_1(l'^4 - 2ll'^3 + l^3l') + 0.09M_2l^8}$

注:表中 l' 为激振车辆前轴在梁上的作用位置。

以某16 m简支空心板桥为例,采用上述三种振型函数,对单轴、双轴计算模型给出解析法有载频率的数值解。

某简支空心板桥跨径 L 为16 m,计算跨径 l 为15.6 m,桥面宽11.25 m,横向桥共布置8片梁,采用C50混凝土,梁截面整体抗弯刚度 $EI = 1.32 \times 10^{10} \text{ N}\cdot\text{m}^2$,

梁顺桥向单位长度质量 $m = 12\ 025 \text{ kg/m}$ 。现假设激振车辆轴距为3.7 m,前轴质量与后轴质量之比为1:2,计算激振车辆总质量分别为12 000 kg与激振车辆总质量为36 000 kg时对应的解析法有载频率解与有限元数值解,计算结果见表2~表3。

表2 激振车辆总质量12 000 kg的计算结果

计算模型	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	有限元解	$\varphi_1(x)$ 相对误差	$\varphi_2(x)$ 相对误差	$\varphi_3(x)$ 相对误差
	ω_1/Hz	ω_2/Hz	ω_3/Hz	ω/Hz	$(\omega_1/\omega - 1)\%$	$(\omega_2/\omega - 1)\%$	$(\omega_3/\omega - 1)\%$
单轴计算模型	6.37	6.45	6.36	6.25	1.92	3.20	1.76
双轴计算模型	6.42	6.85	6.47	6.32	1.74	8.55	2.53

表3 激振车辆总质量36 000 kg的计算结果

计算模型	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	有限元解	$\varphi_1(x)$ 相对误差	$\varphi_2(x)$ 相对误差	$\varphi_3(x)$ 相对误差
	ω_1/Hz	ω_2/Hz	ω_3/Hz	ω/Hz	$(\omega_1/\omega - 1)\%$	$(\omega_2/\omega - 1)\%$	$(\omega_3/\omega - 1)\%$
单轴计算模型	5.77	5.82	5.79	5.65	1.77	3.00	2.47
双轴计算模型	5.88	6.85	6.05	5.77	1.91	18.71	4.85

由表2计算结果可知:当激振车辆总质量为12 000 kg,采用正弦函数 $\varphi_1(x)$ 作为振型函数时,单、双轴计算模型的相对误差均不超过2%;采用跨中有集中力作用下梁的静挠度曲线 $\varphi_2(x)$ 作为振型函数时,单轴计算模型相对误差为3.2%,双轴计算模型相对误差为8.55%;采用均布荷载作用下梁的静挠度曲线 $\varphi_3(x)$ 作为振型函数时,单轴计算模型相对误差为1.76%,双轴计算模型相对误差为2.53%。

由表3的计算结果可知:当激振车辆总质量为36 000 kg,采用正弦函数 $\varphi_1(x)$ 作为振型函数时,单、双轴计算模型的相对误差均不超过2%;采用跨中有集中力作用下梁的静挠度曲线 $\varphi_2(x)$ 作为振型函数时,单轴计算模型相对误差为3.0%,双轴计算模型相对误差为19.0%;采用均布荷载作用下梁的静挠度曲线 $\varphi_3(x)$ 作为振型函数时,单轴计算模型相对误差为2.47%,双轴计算模型相对误差为4.85%

4 结论

(1)采用Rayleigh法建立简支梁桥跳车激励理论模型,推导了实测有载频率及自振频率之间的理论计算公式。

(2)给出了采用正弦函数、跨中有集中力作用下梁的静挠度曲线和均布荷载作用下梁的静挠度曲线作为振型函数时的解析法有载频率计算公式。

(3)通过跨径为16 m的简支空心板桥的数值计算,计算结果表明:当按单、双轴计算模型计算简支梁桥自振频率时,采用正弦函数作为振型函数时计算误差小于2%,实际计算时建议采用正弦函数作为振型函数。

参考文献:

- [1] 尚鑫,徐岳,任更锋.受损简支梁固有频率变化规律研究[J].西安建筑科技大学学报:自然科学版,2013,

- 45(5):640-646.
- [2] 王希,任伟新.由车辆响应识别桥梁固有频率[J].华中科技大学学报:城市科学版,2008,25(4):15-26.
- [3] 吴建奇,郑晓,张婷婷.桥梁检测中的静载试验研究[J].铁道建筑,2011(2):42-44.
- [4] 宋一凡.公路桥梁荷载试验与结构评定[M].北京:人民交通出版社,2002.
- [5] 谭国金,宫亚峰,程永春,等.基于有载频率的简支梁桥自振频率计算方法[J].振动工程学报,2011,24(1):31-35.
- [6] 黄永玉,赵永刚,赵伟东.简支梁的固有频率分析[J].青海大学学报:自然科学版,2010,28(6):20-23.
- [7] 彭献,游福贺.车桥耦合系统固有频率的研究[J].动力学与控制学报,2010,8(3):258-262.
- [8] 宋一凡.公路桥梁动力学[M].北京:人民交通出版社,2000.
- [9] 李国豪.桥梁结构稳定与振动[M].北京:中国铁道出版社,2003.
- [10] 申成岳,罗学睿,徐岳.中小跨径简支梁桥跳车激励模型简化计算方法研究[J].中外公路,2014,34(5):119-122.
- [6] 黄永玉,赵永刚,赵伟东.简支梁的固有频率分析[J].

The Calculation of Natural Vibration Frequency of Simply Supported Girder Bridge Based on the Rayleigh Theory

ZHU Yibiao, LI Yang

(School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: When doing the dynamic load test on simply supported beam bridges, because of the existence of excitation vehicle, the frequency measured by instrument is actually not the natural frequency but the one included vehicle load. The analytical formula of loaded frequency was given according to the theory calculation model built by Rayleigh method, furthermore, the formula of natural frequency was deduced through the analytical formula of loaded frequency. In order to deduce the theoretical formula of natural frequency of uniaxial and blaxial based on sine function as well as the beam static deflection curve under both concentrated force and uniform load ware used as vibration function, the vehicle bump incentive model of simply supported girder bridge is simplified to uniaxial and blaxial calculation model. A simply supported beam bridge was set as an example to compare calculation accuracy of three different vibration function through numerical calculation, as a result, the appropriate vibration function of uniaxial and blaxial calculation model was recommended.

Key words: simply supported girder bridge; the Rayleigh theory; vibration model functions; natural vibration frequency