第 28 卷第 1 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 28　No. 1
2015 年 2 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Feb. 2015
文章编号:1673-1549(2015)01-0098-03　　DOI:10.11863/j. suse. 2015. 01. 23

几乎基次亚紧空间的无限乘积

石鹏飞, 何兆容, 张焰杰

(成都理工大学管理科学学院, 成都 610059)

摘　要:为了更好地研究次亚紧空间及其他拓扑空间的覆盖性质,在与几乎基亚紧空间结合后定义了几乎基次亚紧空间,研究了它的遗传性,并获得结果:(1)几乎基次亚紧空间的闭子空间是几乎基次亚紧的;(2)如果 $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 是 $|\Lambda|$ - 仿紧空间,则 X 是几乎基次亚紧空间当且仅当 $\forall F \in [\Lambda]^{<\omega}$, $|\Lambda|$ 是几乎基次亚紧的。

关键词:闭子空间;次亚紧空间; $|\Lambda|$ - 仿紧空间

中图分类号:O189. 11　　**文献标志码**:A

引　言

Poter J E 引入了基仿紧空间的概念,并研究了基仿紧空间的性质[1]。Graner E 首先引入了几乎亚紧空间[2],后又有学者引入了基次亚紧空间的概念,并对它的相关性质进行了研究。本文在此基础上,引入几乎基次亚紧空间的概念,并对其有关性质做初步的探讨。

本文所讨论的拓扑空间以下简称为空间,用 $(\mathscr{U})_A$ 和 $N(A)$ 分别表示集族 $\{U \in \mathscr{U}: U \cap A \neq \phi\}$ 和集合 A 的开邻域系,$\overline{A}$ 表示集合 A 的闭包,$IntA$ 表示集合 A 的内部,$|\Lambda|$ 表示集合 Λ 的基数;ω 表示非负整数集或最小无限基数; $[A]^{<\omega} = \{F \subset A, F$ 是非空有限集$\}$, $ord(x, \mathscr{V}_n) = |\{V: V \in \mathscr{V}_n, x \in V\}|$。本文的基本概念、符号和表示方法都参考文献[3]。

1　预备知识

定义 1[4]　设 $(\Lambda, \leqslant)$ 是一个定向集,称集族 $U = \{U_\alpha \in \Lambda\}$ 是定向上升的,如果对 $\forall \alpha,\beta \in \Lambda$,当 $\alpha \leqslant \beta$ 时有 $U_\alpha \subset U_\beta$。

定义 2[5]　设 k 是一个基数,并且 $k \geqslant 2$,空间 X 称为是 k - 仿紧的,如果 X 的每个基数 $\leqslant k$ 的开覆盖有一个局部有限的开加细。

定义 3[6]　空间 X 称为是基 - 次亚紧的,如果存在 X 的一个基 $\mathscr{B}$, $|\mathscr{B}| = \omega(X)$,对于 X 的每个覆盖 $\mathscr{U}$, 都存在一个开加细序列 $[\mathscr{B}_n]_{n\in\omega}$, 且 $\mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}$, 使得 $\forall x \in X$ 存在 $n \in \omega$,有 $1 \leqslant ord(x, \mathscr{B}_n) < \omega$。

定义 4　空间 X 称为是几乎基 - 次亚紧的,如果存在 X 的一个基 $\mathscr{B}$, $|\mathscr{B}| = \omega(X)$,对于 X 的每个覆盖 $\mathscr{U}$, 都存在 X 的一个稠密子集 D 及 $\mathscr{U}$ 的一个开加细序列 $[\mathscr{B}_n]_{n\in\omega}$, 且 $\mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}$, 使得 $\forall x \in D$ 存在 $n \in \omega$,有 $1 \leqslant ord(x, \mathscr{B}_n) < \omega$。

引理 1[7]　设 λ 是一个基数,若空间 X 是 λ 仿紧的, Λ 是一个定向集, $|\Lambda| = \lambda$,若 $\{H_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ 是 X 定向上升的开覆盖,则存在 X 定向上升的开覆盖 $\{K_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$,使得对 $\alpha \in \Lambda$ 有 $\overline{K_\alpha} \subset H_\alpha$。

引理 2[8]　几乎次亚紧空间的闭子空间是几乎亚紧空间。

引理 3[9]　如果 $X = \Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 是 $|\Lambda|$ - 仿紧空间,则 X 是几乎弱 $\bar{\theta}$ 加细的空间当且仅当 $\forall F \in [\Lambda]^{<\omega}$, $\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 是几乎弱 $\bar{\theta}$ 加细的。

收稿日期:2014-10-25
基金项目:安徽省高等学校省级优秀青年人才基金项目(2010SQRL158)
作者简介:石鹏飞(1990-),男,甘肃武都人,硕士生,主要从事拓扑学方面的研究,(E-mail)1160949117@qq. com

2 主要结果

定理 1 如果空间 X 是几乎基次亚紧的，则 X 的闭子空间 Y 是几乎基次亚紧的。

证明 Y 是 X 的闭子空间，$\mathscr{Y}$ 是 Y 的开覆盖，$\forall U \in \mathscr{Y}$，$\exists G(U)$ 开于 X，使得 $U = G(U) \cap Y$ 从而 $\{G(U): U \in \mathscr{Y}\} \cup \{X - Y\}$ 是 X 的开覆盖，由 X 是几乎基次亚紧空间，$\mathscr{B}$ 是 X 的一个基，故存在 X 的一个稠密子集 D 和 $\{G(U): U \in \mathscr{Y}\} \cup \{X - Y\}$ 的开加细覆盖 $\mathscr{V} = \cup_{n\in\omega}\mathscr{V}_n$，$\mathscr{V}_n \in \mathscr{B}$，使得 $\forall x \in D$ 存在 $n \in \omega$，$1 \leqslant ord(x, \mathscr{V}_n) < \omega$。令 $\mathscr{A} = \mathscr{B} \cap Y$，则 $\mathscr{A}$ 为 Y 的基。令 $\mathscr{H}_n = \mathscr{V} \cap Y = \{Y \cap V_{n\alpha}: \alpha \in \Lambda, V_{n\alpha} \in V, \mathscr{V}_{n\alpha} \cap Y \neq \phi\}$，则 $\mathscr{H}_n$ 是 $\mathscr{Y}$ 的开加细且 $\mathscr{H}_n \in \mathscr{A}$。由 D 是稠密子集，$\overline{D \cap Y} = \overline{D} \cap \overline{Y} = X \cap Y$，所以 $D \cap Y$ 稠密于 Y。$\forall x \in D \cap Y$，$x \in D$ 且 $x \in Y$，而 $1 \leqslant ord(x, \mathscr{V}_n) < \omega$，$\mathscr{H}_n = \mathscr{V} \cap Y$，有 $|\mathscr{V} \cap Y| = |\mathscr{V}_n|$，从而，$1 \leqslant ord(x, \mathscr{H}_n) < \omega$。即 Y 是几乎基次亚紧空间。

定理 2 如果 $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 是 $|\Lambda|$ －仿紧空间，则 X 是几乎基次亚紧空间当且仅当 $\forall F \in [\Lambda]^{<\omega}$，$\prod_{\alpha\in F} X_\alpha$ 是几乎基次亚紧的。

证明 $\forall F \in [\Lambda]^{<\omega}$，令 $Y_F = \prod_{\alpha\in F} X_\alpha$，且 $\pi_F: X \to Y_F$ 表投射，特别地，对 $\alpha \in \Lambda$，令 $\pi_\alpha = \pi_{\{\alpha\}}$，即 π_α 表示 X 到 X_α 的投射映射，并记作 $Z_F = Y_{\Lambda - F}$，设 $U = \{U_\xi: \xi \in \sum\}$ 是 X 的任意开覆盖，$\forall F \in [\Lambda]^{\omega}$，$\forall \xi \in \sum$，令 $U_{F\xi} = U\{V: V$ 开于 Y_F，并且 $V \times Z_F \subset U_\xi\}$，则

(1) $U_{F\xi}$ 开于 Y_F 并且 $U_{F\xi} \times Z_F \subset U\xi$，令 $O_F = (\cup_{\xi\in\sum} U_{F\xi}) \times Z_F$。

(2) $\{O_F: F \in [\Lambda]^{<\omega}\}$ 是 X 的开覆盖，且 $\forall E, F \in [\Lambda]^{\omega}$，如果 $F \subset E$，则有 $O_F \subset O_E$ [10]。

事实上，$\forall x \in X$，存在 $\xi \in \sum$，$x \in U_\xi$，使得 $\forall \alpha \in F$，存在 W_α 开于 X_α 使得 $x \in \cap_{\alpha\in F}\pi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \subset U_\xi$，令 $W = \prod_{\alpha\in F} W_\alpha$，则 $x \in W \times Z_F = \cap_{\alpha\in F}\pi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \subset U_\xi$，对 $x \in U_{F\xi} \times Z_F \subset O_F$，即 $\{O_F: F \in [\Lambda]^{<\omega}\}$ 是 X 的开覆盖，其次，$\forall E, F \in [\Lambda]^{<\omega}$，如果 $F \subset E$，$\forall x \in O_F$，存在 $\xi \in \sum$，使得 $x = (x_\alpha)_{\alpha\in F} \times (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda-F} \in U_{F\xi} \times Z_F = (U_{F\xi} \times \prod_{\alpha\in E-F} X_\alpha) \times Z_E$，又 $U_{F\xi} \times \prod_{\alpha\in E-F} X_\alpha$ 开于 Y_E，故 $x \in U_{F\xi} \times Z_E$，从而(2)真。

因 $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 是 $|\Lambda|$－仿紧空间，由引理 1，X 有一个定向上升的开覆盖 $\{G_F: F \in [\Lambda]^{<\omega}\}$ 使得 $\forall F \in [\Lambda]^{<\omega}$，$\overline{G_F} \subset O_F$，且 $\forall E, F \in [\Lambda]^{<\omega}$，如果 $F \subset E$，则 $G_F \subset G_E$，$\forall F \in [\Lambda]^{<\omega}$，令 $T_F = Y_F - \pi_F(X - \overline{G_F})$，则

(3) $T_F \in \cup_{\xi\in\sum} U_{F\xi}$

事实上，$\forall x \in T_F$，$x \notin \pi_F(X - \overline{G_F})$，则有 $\pi_F^{-1}(x) \cap (X - \overline{G_F}) = \phi$，故 $\pi_F^{-1}(x) \subset \overline{G_F} \subset O_F = (\cup_{\xi\in\sum} U_{F\xi}) \times Z_F$，从而 $x \in \cup_{\xi\in\sum} U_{F\xi}$，$\forall E, F \in [\Lambda]^{<\omega}$，令 $C_F = (IntT_F) \times Z_F$。

(4) $\{C_F: F \in [\Lambda]^{<\omega}\}$ 是 X 的开覆盖。

事实上，$\forall x \in X$，存在 $x \in G_F$，存在 $E \in [\Lambda]^{<\omega}$，使得 $E \in [\Lambda]^{<\omega}$，使得 $\forall \alpha \in E$，有 W_α 开于 X_α 并且 $x \in \cap_{\alpha\in E}\pi_\alpha^{-1}(W_\alpha) = \pi_E^{-1}(W) \subset G_F$，取 $A = E \cup F$，故 $\pi_E^{-1}(W) \subset T_A \times Z_A$，则 $(y_\alpha)_{\alpha\in A} \notin T_A - \pi_A(X - \overline{G_A})$，存在 $z \in (X - \overline{G_A})$，使得 $\pi_A(z) = (y_\alpha)_{\alpha\in A}$，因为 $E \subset A$，$\pi_E(z) = \pi_E\pi_A(z) = \pi((y_\alpha)_{\alpha\in A}) = (y_\alpha)_{\alpha\in E} \in W$，故与 $z \in X - \overline{G_H}$ 矛盾，从而 $\pi_E^{-1}(w) \subset T_A \times Z_A$，故 $\pi_E^{-1}(w) \subset Int(T_A \times Z_A) \subset Int(T_A) \times Z_A \subset G_A$，即(4)真。

其次，由 X 的 $|\Lambda|$－仿紧空间和(4)，对于 X 的开覆盖 $\{C_F: F \in [\Lambda]^{<\omega}\}$ 有局部有限的开加细 $\{K_F: F \in [\Lambda]^{<\omega}\}$，并且对于 $\forall F \in [\Lambda]^{<\omega}$，因 $\pi_F: X \to Y_F$ 是开映射，则 $T_F = Y_F - \pi_F(X - \overline{G_F})$ 闭于 Y_F。

因为 X 是几乎基次亚紧，由题设和定理 1，$\forall F \in [\Lambda]^{<\omega}$，$Y_F$ 的闭子空间 T_F 是几乎基亚紧空间的，则 T_F 有一个基 $\mathscr{B}$，$|\mathscr{B}| = \omega(T_F)$，对 T_F 的每个开覆盖 $\{U_{F\xi}: \xi \in \sum\}$，都存在 T_F 的一个稠密子集 D 和 $\{U_{F\xi}: \xi \in \sum\}$ 的一个开加细序列 $[B_{Fn}] = \{B_{Fn\xi}: \xi \in \sum, n \in \omega\}$，使得 $x \in D$，存在 $n \in \omega$，有 $1 \leqslant ord(x, B_{Fn}) < \omega$，并且对 $\forall \xi \in \sum$，$\forall n \in \omega$，有 $B_{Fn\xi} \subset U_{F\xi}$，对 $\forall n \in \omega$，令 $\mathscr{H}_n = \{\pi_F^{-1}(B_{Fn\xi}) \cap K_F: F \in [\Lambda]^{<\omega}, \xi \in \sum, B_{Fn\xi} \subset B_{Fn}\}$，则 $[\mathscr{H}_n]_{n\in\omega}$ 是 $\mathscr{U} = \{U_\xi: \xi \in \sum\}$ 的开加细序列。

事实上，$\forall x \in X$，因 $\{K_F: F \in [\Lambda]^{<\omega}\}$ 是 X 的开覆盖，故存在 $F \in [\Lambda]^{<\omega}$，使得 $x \in K_F$，并且对 $\forall n \in \omega$，$B_{Fn} = \{B_{Fn\xi}: \xi \in \sum\}$ 是 T_F 的开覆盖，则对 $\forall n \in \omega$，存在 $\xi \in \sum$，使得 $\pi_F(x) = x_F \in B_{Fn\xi}$，故 $x \in \pi_F^{-1}(B_{F\xi}) \cap K_F$，其次 $\forall n \in \omega$，$\xi \in \sum$，因 $B_{Fn\xi} \subset U_{F\xi}$，则 $\pi_F^{-1}(B_{Fn\xi}) \cap K_F \subset \pi_F^{-1}(B_{Fn\xi}) \subset \pi_F^{-1}(U_{F\xi}) \subset U_{F\xi} \times Z_F \subset U_\xi$，故 $[\mathscr{H}_n]_{n\in\omega}$ 是 $\mathscr{U} = \{U_\xi: \xi \in \sum\}$ 的开加细。

$\forall x \in \pi_F^{-1}(D)$，存在 $n \in \omega$，使 $1 \leqslant ord(x, \mathscr{H}_n) < \omega$，事实上，$\forall x \in \pi_F^{-1}(D_F)$，则 $x \in K_F \subset C_F = (IntT_F) \times Z_F$，故 $\forall n \in \omega$，$x_F = \pi_F(x) \in D_F \subset T_F \subset \cup B_{Fn}$，故

存在 $n \in \omega$，使得 $ord(x_F, B_{Fn}) < \omega$，并且 $(\mathscr{H}_n)_x = \{\pi_F^{-1}(B_{F\xi}) \cap K_F : B_{Fn\xi} \in (B_{Fn})_{xF}, F \in [\Lambda]^{<\omega}, \xi \in \sum\}$，即存在 $n \in \omega$，有 $1 \leqslant ord(x, \mathscr{H}_n) < \omega$，从而 X 是几乎基次亚紧空间。

$\Rightarrow$ 设 $X = \prod_{\alpha \in \sum} X_\alpha$ 是几乎基次亚紧，$\forall F \in [\Lambda]^{<\omega}$，$\forall \alpha = \Lambda - F$，取 $x_\alpha \in X_\alpha$，则有定理 1，X 的闭子空间 $Y = (\prod_{\alpha \in F} X_\alpha) \times \{\{X_\alpha\} : \alpha \in \Lambda - F\}$，是几乎基次亚紧的，从而 $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ 是几乎基次亚紧的。

定理 3 如果 $X = \prod_{\alpha \in \omega} X_\alpha$ 是可数仿紧空间，则下列条件等价。

(1) X 是几乎基次亚紧的。

(2) $\forall F \in [\Lambda]^{<\omega}$，$\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ 是几乎基次亚紧空间。

(3) $\forall n \in \omega$，$X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ 是几乎基次亚紧空间。

证明 (1)$\Leftrightarrow$(2) 是定理 3(2) 的直接证明，(2)$\Rightarrow$(3) 是显然的。

证明(3)$\Rightarrow$(2)。事实上，$F \in [\Lambda]^{<\omega}$，因 $F \neq \phi$，故可记 $m = MaxF$，由条件(3) 知 $\prod_{\alpha \leqslant n} X_\alpha$ 是几乎基次亚紧空间，$\forall \alpha \leqslant m$，若 $\alpha \neq F$，则 $\alpha \in \{0, 1, 2, \cdots, m\} - F$，取一个 $x_\alpha \in X_\alpha$，则 $(\prod_{\alpha \in F} X_\alpha) \times \{\{x_\alpha\} : \alpha \in \{0, 1, 2, \cdots, m\} - F\}$ 是闭于 $\prod_{\alpha \leqslant m} X_\alpha$ 的并且与 $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ 同胚，故 $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ 是几乎基次亚紧空间。

参考文献:

[1] Porter J E. Base-paracompact spaces[J]. Topology and its Applications, 2003, 128:145-156.

[2] Grabner E, Grabne G. Nearly metacompact spaces[J]. Topology Appl, 1999, 98:191-201.

[3] 高国士.拓扑空间论[M].北京:科学出版社,2000.

[4] 曹金文.几乎仿紧空间[J].纯粹数学与应用数学,2003(3):57-60.

[5] 蒋继光.一般拓扑学选讲[M].成都:四川教育出版社,1991.

[6] 蔡奇嵘.基-次亚紧空间[J].兰州理工大学学报,2012(12):149-150.

[7] Chiba K. Normality of inverse limits[J]. Math. Japonica, 1990, 35(5):959-970.

[8] 曹金文.几乎次亚紧空间[J].黑龙江大学学报,2003(9):50-51.

[9] 邓小琳.几乎弱 $\bar{\theta}$ 加细空间[J].南昌大学学报,2007(2):128-132.

[10] 曹金文.正规弱次亚紧空 Tychonoff 乘积的刻画[J].成都理工大学学报,2007(8):469-470.

Infinite Product of Near Base Sub-meta Compact Space

SHI Pengfei, HE Zhaorong, ZHANG Yanjie

(School of Management Science, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract: In order to better study the covering properties of sub-meta compact space and other topology spaces, the near base sub-meta compact space is defined on the basis of near base mate compact space, and its heredity is studied. Several main results are obtained as follows: (1) Every closed subspace of nearly base sub-meta compact space is nearly base sub-meta compact. (2) Let $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ be a $|\Lambda|$-paracompact space, then X is near base sub-meta compact space if and only if $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ is nearly base sub - meta compact for each $F \in [\Lambda]^{<\omega}$.

Key words: closed subspace; sub-meta compact spaces; $|\Lambda|$-paracompact spaceords