第 28 卷第 1 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 28 No. 1
2015 年 2 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Feb. 2015
文章编号:1673-1549(2015)01-0092-06 DOI:10.11863/j. suse. 2015. 01. 22

集合约束下的向量拟均衡问题

代乾文

(西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充 637009)

摘 要:运用像空间分析研究更为一般的约束条件下的向量拟均衡问题(记为 $VQEP$)的解,并且通过拟相对内部的概念定义拟相对弱向量拟均衡问题(记为 $qrw-VQEP$),然后利用像的一种合理形式的拟内部和广义拉格朗日函数的鞍点定理表示 $VQEP$ 和 $qrw-VQEP$ 的线性分离,最后得出 $VQEP$ 和 $qrw-VQEP$ 的拉格朗日型最优性条件。

关键词:向量拟均衡问题;线性分离;像空间分析;最优性条件;拟相对内部

中图分类号:O221 **文献标志码**:A

引 言

设 W,Y,Z 是 Hausdorff 局部凸向量空间,$X \subseteq W$ 且 X 是非空凸集。$f:X \times X \rightarrow 2^{Y}$,并且 $f(x,x)=0$ 对 $\forall x \in X$ 都成立,$G:X \times X \rightarrow 2^{Z}$,$C:X \rightarrow 2^{Y}$,$\{C(x):x \in X\}$ 是 Y 中一族闭凸点锥,并且对于 $\forall x \in X$ 都有 $qriC(x) \neq \emptyset$,并且 $D:X \rightarrow 2^{Z}$,$\{D(x):x \in X\}$ 是 Z 中一族闭凸锥。

对于 $\forall x \in X$,定义 $C_0(x)=C(x)\backslash\{0\}$ 或 $qriC(x)$,并且定义 $K:X \rightarrow 2^{X}$ 为 $K(x):=\{y \in X:G(x,y) \cap D(x) \neq \emptyset\}$。

本文主要考虑的是更为一般的集合约束条件下的 $VQEP(qrw-VQEP)$。

$(i)VQEP$:找到 $x \in K(x)$,使得

$$f(x,y) \notin C(x)\backslash\{0\},\ \forall y \in K(x) \tag{1}$$

$(ii)qrw-VQEP$:找到 $x \in K(x)$,使得

$$f(x,y) \notin qriC(x),\ \forall y \in K(x) \tag{2}$$

如果 $G:X \times X \rightarrow Y$,那么(1)式与(2)式将退化到参考文献[1]的相应问题,即:$K(x):=\{y \in X:G(x,y) \in D(x)\}$,有:

$(\tilde{i})VQEP$:找到 $x \in K(x)$,使得

$$f(x,y) \notin C(x)\backslash\{0\},\ \forall y \in K(x) \tag{3}$$

$(\tilde{ii})\mathrm{qrw}-VQEP$:找到 $x \in K(x)$,使得

$$f(x,y) \notin \mathrm{qri}C(x),\ \forall y \in K(x) \tag{4}$$

像空间分析在研究向量变分不等式和向量优化问题中是一种很有效的工具。它最先运用于极值约束问题[2-3]。利用像空间的向量分离定理,Mastroeni[4]得到了一些相关的广义性的结论,并且呈现了 $VQEP$ 的解的向量鞍点优化条件。近来,越来越多的数学工作者在向量优化问题的研究中运用像空间分析,然而,当前像空间分析还较少用于向量拟均衡问题尤其是具有无穷维的像情况。Li 和 Guu 将像空间分析运用到 $VQEP(qrw-VQEP)$[1],并且研究了它的线性分离、鞍点定理以及解集的误差界。本文将探索像空间分析用于更为一般的集合为约束条件下的 $VQEP(qrw-VQEP)$ 的线性分离、鞍点定理及最优性条件。

1 预备知识

设 R^{l} 表示 l 维 Euclidean 空间,其中 l 是正整数。设 W 是 Hausdorff 局部凸拓扑向量空间,定义 W^{*} 是 W 的对偶拓扑,对于非空子集 $P \subseteq W$,若 $tP \subseteq P$ 对于 $\forall t \geqslant 0$ 均

收稿日期:2014-10-12
基金项目:国家自然科学基金项目(11371015);教育部科学技术重点项目(211163);四川省青年科技基金项目(2012JQ0035)
作者简介:代乾文(1989-),男,四川成都人,硕士生,主要从事优化理论及应用方面的研究,(E-mail)544486461@qq.com

成立,称 P 为锥。当 $P \cap (-P) = \{0\}$,称 P 为点锥。定义 P 的正极锥:

$P^*:=\{x^* \in W^*:[x^*,x] \geqslant 0, \forall x \in P\}$,对于任意子集 $P \subseteq W$ 且 $P \backslash \{0\} \neq \varnothing$,那么显然可见 $P^* = (P \backslash \{0\})^*$。

设 $M \subseteq W$,则 M 的凸包、闭包、内部和相对内部分别定义为:$\mathrm{conv}M$、$\mathrm{cl}M$、$\mathrm{int}M$ 和 $\mathrm{ri}M$。

设 $x \in M$,则 M 在 x 处的正规锥定义为:

$N_M(x):=\{x^* \in W^*:[x^*,y-x] \leqslant 0, \forall y \in M\}$

定义在 M 上的支撑函数:

$\delta_M(y):=\sup_{x \in M}[x,y]$

定义 1[5]　设 $M \subseteq W$,W 是 Hausdorff 局部凸向量拓扑空间。

(1)如果 $\mathrm{clcone}(M-x) = W$ 或者 $N_M(x) = \{0\}$,则称 $x \in M$ 是 M 的拟内部点,记为 $x \in \mathrm{qi}M$。

(2)如果 $\mathrm{clcone}(M-x)$ 是 W 的子空间,或者 $N_M(x)$ 是 W^* 的子空间,则称 $x \in M$ 是 M 的拟相对内部,记为 $\mathrm{qri}M$。

对于任何凸集 M,有 $\mathrm{qi}M \subseteq \mathrm{qri}M$,若 $\mathrm{int}M \neq \varnothing$,则有 $\mathrm{int}M = \mathrm{qri}M$[5] 和 $\mathrm{int}M = \mathrm{qi}M$[6],此外,$\mathrm{qri}\{x\} = \{x\}$,$\forall x \in W$,若 $\mathrm{qi}M \neq \varnothing$,则 $\mathrm{qi}M = \mathrm{qri}M$[7-8]。若 W 是有限维空间,则 $\mathrm{qi}M = \mathrm{int}M$[8],$\mathrm{qri}M = \mathrm{ri}M$[5]。

引理 1　设 $M \subseteq W$,W 是 Hausdorff 局部凸向量拓扑空间,$\mathrm{qri}M \neq \varnothing$,则有:

(Ⅰ)$\mathrm{qri}(tM) = t\,\mathrm{qri}M, \forall t \in R$。

(Ⅱ)$t\,\mathrm{qri}M + (1-t)M \subseteq \mathrm{qri}M, \forall t \in (0,1]$,则 $\mathrm{qri}M$ 是凸集。

(Ⅲ)$\mathrm{clqri}M = \mathrm{cl}M$。

(Ⅳ)如果 M 是凸锥,则 $\mathrm{qri}M + M = \mathrm{qri}M$。

证明　结论(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ),(Ⅳ)参见文献[1,5,7-9]。

引理 2[5]　设 W 是 Hausdorff 局部凸向量拓扑空间,$M \subseteq W$,M 是闭凸锥,且 $\mathrm{cl}(M-M) = W$,则 $x \in \mathrm{qri}M \Leftrightarrow x \in \mathrm{qi}M \Leftrightarrow [\lambda^*,x] > 0, \forall \lambda^* \in M^* \backslash \{0\}$。

引理 3[1]　设 W 是 Hausdorff 局部凸向量拓扑空间,设 M 是 W 的非空子集,且 $x_0 \in M$,则有 $N_M(x_0) = N_{convM}(x_0)$。

像空间分析在 $VQEP(qrw-VQEP)$ 的一些性质:

当 $C_0(x) = C(x) \backslash \{0\}$ 时,观察 $x \in K(x)$ 是(1)式的解时,当且仅当下式不成立:

$$f(x,y) \in C(x) \backslash \{0\}, y \in K(x) \tag{5}$$

$C_0(x) = \mathrm{qri}C(x)$ 时,观察 $x \in K(x)$ 是(2)式的解时,当且仅当下式不成立:

$$f(x,y) \in \mathrm{qri}C(x), y \in K(x) \tag{6}$$

定义映射:$A_x:X \to 2^{Y \times Z}$,

$$A_x(y):=(f(x,y),G(x,y)) \tag{7}$$

$$\mathscr{K}_x:=\{(u,v) \in Y \times Z:u=f(x,y), v \in G(x,y), y \in X\} = A_x(X)$$

(1)当 $C_0(x) = C(x) \backslash \{0\}$ 时,定义集合:

$$\mathscr{H}_{C(x) \backslash \{0\}}:=\{(u,v) \in Y \times Z:u \in (C(x) \backslash \{0\}), v \in D(x)\} = (C(x) \backslash \{0\}) \times D(x)$$

(2)当 $C_0(x) = \mathrm{qri}C(x)$ 时,定义集合:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)}:=\{(u,v) \in Y \times Z:u \in (\mathrm{qri}C(x)), v \in D(x)\} = (\mathrm{qri}C(x)) \times D(x)$$

集 $\mathscr{K}_x$ 称为 $VQEP$(或 $qrw-VQEP$)的像,空间 $Y \times Z$ 称为 $VQEP$(或 $qrw-VQEP$)的像空间,显而易见它是无穷维 。

性质 1　若(5)式不成立,那么当且仅当

$$\mathscr{H}_{C(x) \backslash \{0\}} \cap \mathscr{K}_x = \varnothing \tag{8}$$

若(6)式不成立,那么当且仅当

$$\mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)} \cap \mathscr{K}_x = \varnothing \tag{9}$$

那么 $x \in K(x)$ 是(1)式的解当且仅当(8)式成立。$x \in K(x)$ 是(2)式的解当且仅当(9)式成立。

性质 2　当 $C_0(x)$ 分别定义为 $C(x) \backslash \{0\}$ 与 $\mathrm{qri}C(x)$ 时,有 $\mathrm{cl}\mathscr{H}_{C(x) \backslash \{0\}} = cl\mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)}$。

证明　因为 $C(x)$ 是闭凸点锥,根据引理 1 的(Ⅲ),有 $\mathrm{clqri}C(x) = C(x)$,根据 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 的定义有:

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}\mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)} &= \mathrm{cl}[\mathrm{qri}C(x) \times D(x)] = \\ &\mathrm{clqri}C(x) \times \mathrm{cl}D(x) = \\ &\mathrm{cl}C(x) \times \mathrm{cl}D(x) = \\ &C(x) \times D(x) = \\ &\mathrm{cl}\mathscr{H}_{C(x) \backslash \{0\}}\end{aligned}$$

证毕。

由于一般情况下 $\mathscr{K}_x$ 非凸,通过 $cl\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 介绍像 $\mathscr{K}_x$ 的一种合理形式 ε_x:

$$\varepsilon_x:=\mathscr{K}_x - \mathrm{cl}\mathscr{H}_{C_0(x)} = \mathrm{A_x(X)-(C(x) \times D(x))}$$

性质 3　(1)若(5)式不成立或者(1)式成立时,当且仅当有如下关系成立:

$$\mathscr{H}_{C(x) \backslash \{0\}} \cap \varepsilon_x = \varnothing \tag{10}$$

(2)若(6)式不成立或者(2)式成立时,当且仅当有如下关系成立:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)} \cap \varepsilon_x = \varnothing \tag{11}$$

证明　(1)因为 $C(x)$ 是闭凸点锥,有 $\mathrm{cl}(C(x) \backslash \{0\}) =$

$C(x), C(x)\backslash\{0\} + C(x) = C(x)\backslash\{0\}$，所以有

$$\mathscr{H}_{C(x)\backslash\{0\}} + \mathrm{cl}\mathscr{H}_{C(x)\backslash\{0\}} = (C(x)\backslash\{0\} \times D(x)) + (C(x) \times D(x)) = C(x)\backslash\{0\} \times D(x) = \mathscr{H}_{C(x)\backslash\{0\}}$$

根据

$$\varepsilon_x - \mathscr{H}_{C(x)\backslash\{0\}} = \mathscr{K}_x - cl\mathscr{H}_{C(x)\backslash\{0\}} - \mathscr{H}_{C(x)\backslash\{0\}} = \mathscr{K}_x - (cl\mathscr{H}_{C(x)\backslash\{0\}} + \mathscr{H}_{C(x)\backslash\{0\}}) = \mathscr{K}_x - \mathscr{H}_{C(x)\backslash\{0\}}$$

所以，如果 $(0,0) \notin \mathscr{K}_x - \mathscr{H}_{C(x)\backslash\{0\}} \Leftrightarrow (0,0) \notin \varepsilon_x - \mathscr{H}_{C(x)\backslash\{0\}}$，即有 $\mathscr{H}_{C(x)\backslash\{0\}} \cap \mathscr{K}_x = \emptyset \Leftrightarrow \mathscr{H}_{C(x)\backslash\{0\}} \cap \varepsilon_x = \emptyset$。

(2)因为 $C(x)$ 是闭凸点锥，根据引理 1 的(Ⅲ)，有 $\mathrm{clqri}C(x) = C(x)$，又根据引理 1 的(Ⅳ)，有 $\mathrm{qri}C(x) + C(x) = \mathrm{qri}C(x)$，所以有

$$\mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)} + cl\mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)} = (\mathrm{qriC(x)} \times \mathrm{D(x)}) + (C(x) \times D(x)) = \mathrm{qri}C(x) \times D(x) = \mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)}$$

根据

$$\varepsilon_x - \mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)} = \mathscr{K}_x - cl\mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)} - \mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)} = \mathscr{K}_x - (cl\mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)} + \mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)}) = \mathscr{K}_x - \mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)}$$

所以，如果 $(0,0) \notin \mathscr{K}_x - \mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)} \Leftrightarrow (0,0) \notin \varepsilon_x - \mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)}$，即有 $\mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)} \cap \mathscr{K}_x = \emptyset \Leftrightarrow \mathscr{H}_{\mathrm{qri}C(x)} \cap \varepsilon_x = \emptyset$。

证毕 。

为了表示 ε_x 的凸性，需要如下定义：

定义 2 设 $P \subseteq Y$ 是一个闭凸锥，映射 $F:X \to$，如果映射 h 满足关系式：

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subseteq F(tx + (1-t)y) + P \; \forall x, y \in X, \forall t \in (0,1)$$

则称映射 F 在凸集 X 上是 P - 凸的，称映射 F 在凸集 X 上是 P - 似凸当且仅当 $F(X) + P$ 是凸集。

显然，如果映射 F 在凸集 X 上是 P - 凸的，那么它在凸集 X 上是 P - 似凸的。

性质 4 设 $x \in X$，那么集 ε_x 是凸集当且仅当在(7)式中映射 $-A_x$ 在凸集 X 上是 $C(x) \times D(x)$ 似凸的。

证明 参考文献[1]可证。

2 线性分离和鞍点定理

定义 3 设 $x \in X$，

(Ⅰ)如果存在$(\alpha^*, \beta^*) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$ 且$(\alpha^*, \beta^*) \neq (0,0)$，有

$$[\alpha^*, u] + [\beta^*, v] \leqslant 0, \forall (u,v) \in \mathscr{K}_x \quad (12)$$

或者

$$[\alpha^*, f(x,y)] + \delta_{G(x,y)}(\beta^*) \leqslant 0, \forall y \in X \quad (13)$$

那么称集 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 和集 $\mathscr{K}_x$ 线性分离 。

(Ⅱ)如果存在$(\alpha^*, \beta^*) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$ 且 $\alpha^* \neq 0$，有(13)式成立，称集 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 和集 $\mathscr{K}_x$ 正则线性分离。

(Ⅲ)如果存在$(\alpha^*, \beta^*) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$ 且 $\alpha^* \in \mathrm{qri}(C(x))^*$，有(13)式成立，称集 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 和集 $\mathscr{K}_x$ 强正则线性分离。

下面的分析将基于 $\mathrm{qri}(C(x))^*$ 非空的情况下进行。

性质 5 设 $x \in X$，则集合 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 和集合 $\mathscr{K}_x$(正则，强正则)线性分离当且仅当集合 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 和集合 ε_x(正则，强正则)线性分离，即：如果存在 $(\alpha^*, \beta^*) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$，且 $(\alpha^*, \beta^*) \neq (0,0)$ $(\alpha^* \neq 0, \alpha^* \in \mathrm{qri}(C(x))^*)$，有 $[\alpha^*, u] + [\beta^*, v] \leqslant 0$，$\forall (u,v) \in \varepsilon_x$。

证明 因为 $\mathscr{K}_x := \mathrm{A}_x(\mathrm{X}) \subseteq \varepsilon_x := \mathrm{A}_x(\mathrm{X}) - (\mathrm{C}(x))^* \times (\mathrm{D}(x))^*$，设集合 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 和集合 $\mathscr{K}_x$(正则，强正则)线性分离，即存在 $(\alpha^*, \beta^*) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$，且 $(\alpha^*, \beta^*) \neq (0,0)$ $(\alpha^* \neq 0, \alpha^* \in \mathrm{qri}(C(x))^*)$，有 $[\alpha^*, u] + [\beta^*, v] \leqslant 0$，$\forall (u,v) \in \mathscr{K}_x$，那么

$$\begin{aligned}&[(\alpha^*, \beta^*), [(f(x,y), g) - (c,d)]] = \\&[(\alpha^*, \beta^*), [(f(x,y) - c, g - d)]] = \\&[\alpha^*, f(x,y) - c] + [\beta^*, g - d)] = \\&[\alpha^*, f(x,y)] + [\beta^*, g] - ([\alpha^*, c] + [\beta^*, d]) \leqslant \\&0 \; \forall (y,c,d) \in X \times C(x) \times D(x), \forall g \in G(x,y)\end{aligned} \quad (14)$$

显然等价于，

$$[\alpha^*, u] + [\beta^*, v] \leqslant 0, \forall (u,v) \in \varepsilon_x$$

定理 1 设 $x \in X$，则集合 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 和集合 $\mathscr{K}_x$ 线性分离当且仅当 $(0,0) \notin qiconv\varepsilon_x$。

证明 因为 $x \in K(x)$ 和 $f(x,x) = 0$，显然 $(0,0) \in \varepsilon_x$，那么 $(0,0) \in conv\varepsilon_x$。

必要性：假设集合 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 和集合 $\mathscr{K}_x$ 线性分离，即存 $(\alpha^*, \beta^*) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$ $(\alpha^*, \beta^*) \neq (0,0)$，有 $[\alpha^*, u] + [\beta^*, v] \leqslant 0$，$\forall (u,v) \in \mathscr{K}_x$，那么，

$$\begin{aligned}&[(\alpha^*, \beta^*), [(f(x,y), g) - (c,d)] - (0,0)] = \\&[(\alpha^*, \beta^*), [(f(x,y) - c, g - d)]] = \\&[\alpha^*, f(x,y) - c] + [\beta^*, g - d] = \\&[\alpha^*, f(x,y)] + [\beta^*, g] - ([\alpha^*, c] + [\beta^*, d]) \leqslant \\&0 \; \forall (y,c,d) \in X \times C(x) \times D(x), \forall g \in G(x,y)\end{aligned}$$

则根据正规锥的定义有：$(\alpha^*, \beta^*) \in N_{\varepsilon_x}(0,0)$。那么根

据引理 3,得到 $(\alpha^*,\beta^*) \in N_{conv\varepsilon_x}(0,0)$,所以,$(0,0) \notin qiconv\varepsilon_x$。

充分性:假设 $(0,0) \notin qiconv\varepsilon_x$,根据引理 3 得到 $(0,0) \notin \mathrm{qi}\varepsilon_x$,则有 $(\alpha^*,\beta^*) \in N_{\varepsilon_x}(0,0)$ 且 $(\alpha^*,\beta^*) \neq (0,0)$,那么,

$$[\alpha^*,f(x,y)-c]+[\beta^*,g-d] = [(\alpha^*,\beta^*),[(f(x,y),g)-(c,d)]] = [(\alpha^*,\beta^*),[(f(x,y),g)-(c,d)]-(0,0)] \leqslant 0 \ \forall (y,c,d) \in X \times C(x) \times D(x),\ \forall g \in G(x,y) \tag{15}$$

在(14)式中令 $(c,d):=(0,0)$,将得到(13)式。

证明 $(\alpha^*,\beta^*) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$。因为 $x \in K(x)$,有 $G(x,x) \cap D(x) \neq \emptyset$。假设 $\alpha^* \notin (C(x))^*$,那么存在 $c_0 \in C(x)$ 使得 $[\alpha^*,c_0]<0$。又因为 $f(x,x)=0$,设 $\tilde{g} \in G(x,x)$,那么在(15)式中令 $(y,c,d):=(x,c_0,\tilde{g})$,将得到:

$$[\alpha^*,c_0] \geqslant 0 \tag{16}$$

(16)式与假设矛盾,所以 $\alpha^* \in (C(x))^*$。又由于 $D(x)$ 是闭凸锥,取任意 $\tilde{d} \in D(x)$,在(15)式中令 $(y,c,d):=(x,0,\tilde{g}+\tilde{d})$,得到:

$$[\beta^*,\tilde{d}] \geqslant 0,\ \forall \tilde{d} \in D \tag{17}$$

根据(17)式得到:$\beta^* \in (D(x))^*$。综上所述:集合 $\mathscr{H}_0(x)$ 和集合 $\mathscr{K}_x$ 线性分离。

证毕。

设 $x \in K(x)$,根据式(13)式考虑广义拉格朗日函数:

$$L:X \times (C(x))^* \times (D(x))^* \to R,L(x;y,\alpha,\beta):= -[[\alpha,f(x,y)]+\delta_{G(x,y)}(\beta)],\forall (y,\alpha,\beta) \in X \times (C(x))^* \times (D(x))^*$$

定义 4 如果如下不等式成立:

$$L(x;x,\alpha,\beta) \leqslant L(x;x,\alpha^*,\beta^*) \leqslant L(x;y,\alpha^*,\beta^*),\ \forall (y,\alpha,\beta) \in X \times (C(x))^* \times (D(x))^*$$

则称点

$(x,\alpha^*,\beta^*) \in X \times (C(x))^* \times (D(x))^*$ 为 $L(x;y,\alpha,\beta)$ 在 $X \times (C(x))^* \times (D(x))^*$ 处的鞍点。

定理 2 设 $W=R^n,Y=R^m,Z=R^s,X \subseteq W=R^n$。假设对 $\forall x \in X,y \mapsto G(x,y)$ 在 X 上的 $-D(x)-$凸的并且 $G(x,y)$ 对于 $\forall x,y \in X$ 是紧集,集合 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 和集合 $\mathscr{K}_x$ 线性分离当且仅当存在 $(\alpha^*,\beta^*) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$,且 $(\alpha^*,\beta^*) \neq (0,0)$ 使得点 $(x,\alpha^*,\beta^*) \in X \times (C(x))^* \times (D(x))^*$ 为广义拉格朗日函数 $L(x;y,\alpha,\beta)$ 在 $X \times (C(x))^* \times (D(x))^*$ 处的鞍点。

证明 必要性:假设集合 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 和集合 $\mathscr{K}_x$ 线性分离,存在 $(\alpha^*,\beta^*) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$,$(\alpha^*,\beta^*) \neq (0,0)$,使得(13)式成立,即 $[\alpha^*,f(x,y)]+\delta_{G(x,y)}(\beta^*) \leqslant 0,\ \forall y \in X$ 成立。因为 $f(x,x)=0$,则在(13)式中令 $y:=x$ 得到:$\delta_{G(x,x)}(\beta^*) \leqslant 0$。又因为 $y \in K(x):=\{y \in X:G(x,y) \cap D(x) \neq \emptyset\}$,根据 $\beta^* \in (D(x))^*$,则 $[\beta^*,d] \geqslant 0,\forall d \in D$,那么当 $y:=x$ 时,显然 $G(x,x) \cap D(x) \neq \emptyset$,则 $\delta_{G(x,x)}(\beta^*) \geqslant 0$,所以得到 $\delta_{G(x,x)}(\beta^*)=0$。有:

$$L(x;x,\alpha^*,\beta^*) = -[[\alpha^*,f(x,x)]+\delta_{G(x,x)}(\beta^*)] = 0 \leqslant -[[\alpha^*,f(x,y)]+\delta_{G(x,y)}(\beta^*)] = L(x;y,\alpha^*,\beta^*)\ \forall y \in X$$

此外,有:

$$L(x;x,\alpha,\beta) = -[[\alpha,f(x,x)]+\delta_{G(x,x)}(\beta)] = -\delta_{G(x,x)}(\beta) \leqslant 0,\ \forall (\alpha,\beta) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$$

综上 (x,α^*,β^*) 是广义拉格朗日函数 $L(x;y,\alpha,\beta)$ 在 $X \times (C(x))^* \times (D(x))^*$ 的鞍点。

充分性:设 $(\alpha^*,\beta^*) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$ 且 $(\alpha^*,\beta^*) \neq (0,0)$,使得 (x,α^*,β^*) 为广义拉格朗日函数 $L(x;y,\alpha,\beta)$ 在 $X \times (C(x))^* \times D^*$ 的鞍点,即对 $\forall (y,\alpha,\beta) \in X \times (C(x))^* \times D^*$ 有

$$-\delta_{G(x,x)}(\beta) \leqslant -\delta_{G(x,x)}(\beta^*) \leqslant -[[\alpha^*,f(x,y)]+\delta_{G(x,y)}(\beta^*)] \tag{18}$$

在(18)式中令 $\beta:=0$ 得到:$\delta_{G(x,x)}(\beta^*) \leqslant 0$。

$x \in K(x):=\{y \in X:G(x,y) \cap D(x) \neq \emptyset\}$ 的证明与文献[10]中证明类似。

假设 $G(x,y) \cap D(x)=\emptyset$,有 $(G(x,y)-D(x)) \cap D(x)=\emptyset$,如果 $(G(x,y)-D(x)) \cap D(x) \neq \emptyset$,且 $D(x)$ 是闭凸锥,那么存在 $\bar{g} \in G(x,y)$ 和 $\bar{d} \in D(x)$ 使得 $\bar{g} \in D(x)+\bar{d} \subseteq D(x)$,显然与 $G(x,y) \cap D(x)=\emptyset$ 矛盾,因为 $G(x,y)$ 是 $-D(x)-$凸的,那么 $G(x,y)-D(x)$ 是凸集,又因为 $G(x,y)$ 是紧集的且 $D(x)$ 是闭的,所以 $G(x,y)-D(x)$ 是闭的,因为 $D(x)$ 是闭凸锥,有

$$(G(x,y)-D(x))-D(x) = G(x,y)-D(x) = cl(G(x,y)-D(x)) = cl[(G(x,y)-D(x))-D(x)]$$

因为 $(G(x,y)-D(x)) \cap D(x)=\emptyset$,有

$$0 \notin (G(x,y)-D(x))-D(x) = cl[(G(x,y)-D(x))-D(x)]$$

根据参考文献[11],存在分离超平面使得 $G(x,y)-$

$D(x)$ 与 $D(x)$ 强分离,即存在 $a \in R^s$ 且 $a \neq 0$, 有

$$\sup_{e \in G(x,y)-D(x)} < a,e > < \inf_{d \in D(x)} < a,d > \quad (19)$$

假设 $a \notin (D(x))^*$, 那么存在 $d_0 \in D(x)$ 使得 $[a,d_0] < 0$, 由于 $D(x)$ 是闭凸锥,那么 $td_0 \in D(x)$ 对 $\forall t > 0$ 成立。显然,当 $t \to +\infty$, $t[a,d_0] \to -\infty$, 与(19)式矛盾,既有 $a \in (D(x))^*$。

因为 $a \in (D(x))^*$, 有 $\min_{d \in D(x)}[a,d] = 0$, 根据参考文献[11],有

$$\sup_{e \in G(x,y)-D(x)} < a,e > < \frac{1}{2} \sup_{e \in G(x,y)-D(x)} < a,e > := r_0 < 0$$

那么 $\delta_{G(x,y)}(a) = \max_{g \in G(x,y)} < a,g > \leqslant < a,d > + r_0, \forall d \in D(x)$, 所以有

$$\delta_{G(x,y)}(a) \leqslant \inf_{d \in D(x)} < a,d > + r_0 = r_0 < 0$$

因为 $(D(x))^*$ 是锥,那么 $ta \in (D(x))^*$ 对 $\forall t > 0$ 成立。又因为 $\delta_{G(x,y)}(a) < 0$, 那么当 $t \to +\infty$ 时 $-\delta_{G(x,y)}(ta) = -t\delta_{G(x,y)}(a) \to +\infty$, 显然与(18)式中第一个不等式矛盾,所以 $G(x,x) \cap D(x) \neq \emptyset$, 即有 $x \in K(x)$。所以 $x \in K(x)$ 时, $\delta_{G(x,x)}(\beta^*) \geqslant 0$, 即得到 $\delta_{G(x,x)}(\beta^*) = 0$, 那么在(18)式得到

$$[\alpha^*, f(x,y)] + \delta_{G(x,y)}(\beta^*) \leqslant 0$$

即集 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 和集 $\mathscr{K}_x$ 线性分离。

证毕。

3 最优性条件

定理3 设 $x \in X$, 假设 $intC(x) \neq \emptyset$, $intD(x) \neq \emptyset$,并且在(7)式所定义的映射 $-A_x$ 在 X 上是 $C(x) \times D(x)$ - 似凸。

(Ⅰ) 当 $C_0(x) = C(x)\backslash\{0\}$ 时,如果 x 是 $VQEP$ 的一个解,那么集 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 和集 $\mathscr{K}_x$ 线性分离。

(Ⅱ) 当 $C_0(x) = \text{qri}C(x)$ 时,如果 x 是 qrw - VQEP 的一个解,那么集 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 和集 $\mathscr{K}_x$ 线性分离。

证明 (Ⅰ) 与(Ⅱ) 的证明类似,在此证明(Ⅱ),(Ⅰ) 可类似证明。因为 $x \in X$ 且在(7) 式所定义的映射 $-A_x$ 在 X 上是 $C(x) \times D(x)$ - 似凸,所以根据性质4可得 ε_x 是凸集,用这个结论可证(Ⅱ)。

如果 x 是 qrw - VQEP 的一个解,那么 $x \in K(x)$, $(0,0) \in \varepsilon_x$, 根据性质2有 $\mathscr{H}_{\text{qri}C(x)} \cap \varepsilon_x = \emptyset$,因为 $\text{int}C(x) \neq \emptyset$,则有 $\text{int}C(x) = \text{qri}C(x)$, 那么 $\mathscr{H}_{\text{int}C(x)} = \mathscr{H}_{\text{qri}C(x)}$, 所以有 $\mathscr{H}_{\text{int}C(x)} \cap \varepsilon_x = \emptyset$,因为 $\text{int}C(x) \neq \emptyset$, $\text{int}D(x) \neq \emptyset$,有

$$\text{int}\mathscr{H}_{\text{qri}C(x)} = \text{int}(\text{qri}C(x) \times D(x)) = \text{intqri}C(x) \times \text{int}D(x) \neq \emptyset$$

很显然 $\text{int}\mathscr{H}_{\text{qri}C(x)}$ 是凸集,因为 $\text{int}\mathscr{H}_{\text{qri}C(x)} \subseteq \mathscr{H}_{\text{int}C(x)}$,并且 $\mathscr{H}_{\text{int}C(x)} \cap \varepsilon_x = \emptyset$,所以 $\text{int}\mathscr{H}_{\text{qri}C(x)} \cap \varepsilon_x = \emptyset$。又由于 ε_x 与 $\text{int}\mathscr{H}_{\text{qri}C(x)}$ 均是凸集,所以 $\mathscr{H}_{\text{qri}C(x)}$ 与 ε_x 线性分离。

证毕。

定理4 设 $x \in K(x)$。

(Ⅰ) 假设 $\text{cl}(C(x) - C(x)) := Y$。如果 $(\alpha^*, \beta^*) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$, 且 $\alpha^* \in \text{qri}(C(x))^*$, 使得(13)式成立,即 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 与 $\mathscr{K}_x$ 强正则线性分离,那么 x 是 $VQEP$ 的一个解。

(Ⅱ) 假设 $\text{cl}(C(x) - C(x)) := Y$。如果 $(\alpha^*, \beta^*) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$, 且 $\alpha^* \neq 0$, 使得(13)式成立,即 $\mathscr{H}_{C_0(x)}$ 与 $\mathscr{K}_x$ 正则线性分离,那么 x 是 $qrw - VQEP$ 的一个解 。

证明 (Ⅰ) 由于 $x \in K(x)$, 假设 x 不是 $VQEP$ 的解,那么对于 $y \in X$, 使得 $f(x,y) \in C_0(x)$, 并且 $G(x,y) \cap D(x) \neq \emptyset$,因为 $D(x)$ 是 Hausdorff 局部凸向量空间 Z 中的闭凸锥,有 $D(x) = ((D(x))^*)^*$,因为 $(\alpha^*, \beta^*) \in (C(x))^* \times (D(x))^*$,且 $\alpha^* \in qri(C(x))^*$,根据引理2,有 $[\alpha^*, f(x,y)] \geqslant 0$, 所以 $[\alpha^*, f(x,y)] + \delta_{G(x,y)}(\beta^*) > 0$ 与(13)式矛盾,则 x 是 $VQEP$ 的解 。

(Ⅱ) 的证明过程类似(Ⅰ)。

在所得结论中,如果 $G: X \times X \to Y$, 那么结论将退化到(3)式与(4)式的情形下的相关结论。

推论1 若 $G: X \times X \to Y$, 那么有 $K(x) := \{y \in X: G(x,y) \in D(x)\}$。即本文结论退化到参考文献[1]的相关线性分离、鞍点定理以及最优性条件的结论。

文献[1]的研究是建立在 $G: X \times X \to Y$, 即 $K(x) := \{y \in X: G(x,y) \in D(x)\}$ 的条件下,而本文是在更为一般的集合条件 $K(x) := \{y \in X: G(x,y) \cap D(x) \neq \emptyset\}$ 下进行研究,进而将相关的线性分离、鞍点定理以及最优性条件的应用范围扩大化。

参 考 文 献:

[1] Guu S M,Li J.Vector quasi-equilibrium problems:separation,saddle points and error bounds for the solution set[J].Global Optim,2014,58:751-767.

[2] Giannessi F.Theorems of the alternative and optimality conditions[J].Optim.Theory Appl,1984,60:331-365.

[3] Giannessi F.Semidifferentiable functions and necessary

optimality condition[J].Optim.Theory Appl,1989,60:191-241.

[4] Zalinescu C.Convex analysis in general vector spaces [M].River Edge,Nj:World Scientific Publishing Co.,Inc., 2002.

[5] Borwein J M,Lewis A S.Partially finite convex programming,part I:quasi-relative interior and duality theory [J].Math.Program.Ser.B,1992,57:15-48.

[6] Limber M A,Goodrich R K.Quasi interior Lagrange multipliers and L^P spectral estimation with lattice bounds [J].Optim.Theory Appl,1993,78:143-161.

[7] Bot R I,Csetnek E R,Wanka G.Regularity conditions via quasirelative interior in convex programming.SIAM[J]. Optim,2008,19:217-233.

[8] Mastroeni G.On the image space analysis for vector quasi-equlibrium problems with a variable ordering relation[J].Global Optim,2012,53:203-214.

[9] Borwein J M,Goebel R.Notions of relative interior in Banach spaces[J].Math.Sci,2003,115:2542-2553.

[10] Li J,Feng S Q,Zhang Z.A Unified Approach for constrained extremum problems:Image Space Analysis[J]. Optim Theory Appl,2013,159:69-92.

[11] Rockafellar R T.Convex analysis[M].Princeton:Princeton University Press,1970.

Vector Quasi-equilibrium Problems with Sets Constraints

DAI Qianwen

(School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637009, China)

Abstract: The solutions of vector quasi-equilibrium problems(for short, *VQEP*) under general constraints conditions are studied by using the image space analysis. The quasi relatively weak VQEP(for short, *qrw-VQEP*) are defined by introducing the notion of the quasi relative interior. Next, the linear separation for *VQEP* and *qrw-VQEP* are characterized by utilizing the quasi interior of a regularization of the image and the saddle points of generalized Lagrangian functions. Finally, the Lagrangian type optimality conditions for *VQEP* and *qrw-VQEP* are obtained.

Key words: vector quasi-equilibrium problems; linear separation; image space analysis; optimality conditions; quasi relative interior