

VaR 准确性检验的 T 检验法

唐 宁, 冯长焕

(西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充 637002)

摘 要:根据 VaR 失败率检验法的定义, 通过利用组合的方式获取检验样本和构造服从 T 分布的统计量, 得到检验 VaR 准确性的新方法—— T 检验法。 T 检验法所接受的模型不仅在似然比检验法下能被接受, 且在同一置信度下 T 检验法所接受的模型比似然比检验法所接受的模型的准确性更高。最后通过实证分析进一步说明 T 检验法比似然比检验法能更好地检验 VaR 的准确性。

关键词:失败率检验; VaR; T 检验

中图分类号:F224.7

文献标志码:A

引 言

VaR (value at risk) 字面解释就是“在险价值”, 其含义指: 在市场正常波动下, 在一定概率水平(置信度)下, 某一金融资产或证券组合价值在未来特定时期内的最大可能损失。因 VaR 的大小直接关系着金融投资者的利益, 故关于 VaR 的计算方法也在不断完善。不管是最初的历史模拟法、方差-协方差法和蒙特卡洛法, 还是现在已经完善的极值理论法计算出的 VaR 都是一个估计值, 故对 VaR 准确性的检验就显得尤为重要。而对于 VaR 准确性检验的方法主要有失败率检验法、正态检验法、似然比检验法和贝叶斯检验法^[1-2](其中似然比检验法最常用), 都是通过把检验失败率转化为检验失败次数来检验 VaR 准确性。正态检验法和似然比检验法这两种方法都是以失败次数 N 服从二项分布 $B(T, p)$ (其中 T 为实验总天数, p 为失败率) 为出发点。其中正态性检验是当 T 充分大时, 由中心极限定理得出统计量

$$z = \frac{N - \alpha T}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)T}}$$

服从标准正态分布, 从而得到失败次数 N 的接受域。似然比检验是由统计量^[3]

$$LR = -2\ln[(1 - \alpha)^{T-N}\alpha^N] + 2\ln\left[\left(1 - \frac{N}{T}\right)^{T-N}\left(\frac{N}{T}\right)^N\right]$$

的极限分布, 是自由度为 1 的 χ^2 分布得到失败次数 N 的接受域(α 是置信水平)。从正态检验法和似然比检验法可看出, 两种方法都是在大样本的前提下得出的结果, 且这两种检验方法不可避免的问题是: 虽然总的失败次数落在接受域内, 但是失败是连续出现在一段时间内, 而未失败的 VaR 又连续出现在另一段时间内, 即预测的失败具有前后相关的关系, 那么, 仍不能说相应的 VaR 模型可靠, 而利用正态检验法和似然比检验法都不能拒绝此模型。针对这一问题, 本文直接从失败率的定义出发, 构建了在大样本和小样本情况下均适用的 T 检验法来检验 VaR 准确性。

1 失败率检验法定义

VaR 的准确性通常是利用失败率来衡量。当在置信水平 α 下估计出 VaR 时, 将 t 时刻的损失与 t 时刻的 VaR 进行比较, 如果损失大于 VaR, 则记为失败。若总天数为 T 的实验中, 其失败的天数为 N , 则失败率 p 记为: $p = \frac{N}{T}$, 而失败率检验的定义为: 将失败率 p 与置信水平 α (α

收稿日期:2014-12-11

基金项目:西华师范大学基本科研业务费专项资金项目(14C004);南充市社科规划项目(NC2013B027)

作者简介:唐宁(1991-),女,四川蓬安人,硕士生,主要从事统计学理论及应用方面的研究,(E-mail)422706724@qq.com

$= 1 - c$, c 为置信度) 进行比较, 若 $p = \alpha$, 则说明估计出的 VaR 比较准确, 相应的 VaR 模型较好^[3]。相反, 若 p 值与 α 相差较大, 则说明估计出的 VaR 不可靠, 相应的 VaR 模型存在不足。然而通常情况下, 可能会因为原始数据的选取和随机误差项干扰等因素使得失败率 p 与置信水平 α 不是绝对相等, 就不能说明估计出的 VaR 不可靠, 故需要对 p 与 α 是否具有显著性差异进行检验。

2 T 检验

2.1 T 检验原理

从失败率检验的定义可知, 希望得到的失败率 p 与置信水平 α 不具有显著性的差异。然而, 对所有数据进行样本内检验时, 得到的某个特定的失败率 p 大多情况下与 α 是不同的, 即使 p 与 α 相同, 但又因为预测失败可能存在前后相关关系, 所以不能轻易得出模型是否可靠的结论。为了解决这一问题, 可以选取不同时间段数据作为检验样本或者选取不同的样本容量, 如果得到的 p 值与 α 均无显著性差异, 那么就可以说估计出的 VaR 比较准确。但是因数据选取等偶然性原因, 很难使每个 p 都与 α 均无显著性差异, 所以对于选择 n 个检验样本得到的 n 个 p (这 n 个失败率 p 中有些 p 值相同有些不同), 只要它们的均值 \bar{p} 与 α 没有显著性差异就可以说估计出的 VaR 比较准确。

对于成立时间较长的金融行业, 它具有充足的历史数据, 既可以选择不同时间段的数据作为检验样本也可以改变样本容量获得多个 p 值, 但是对于发展历史较短的行业, 能够利用的历史数据有限, 得到的 p 值数据很少, 这样就会因偶然性得出与实际情况不一致的结果。为了克服小样本数据不足对结果造成的影响, 选取检验样本可按随机抽取的方式进行, 即: 如果共有 n 个历史数据, 那么从中随机抽取适当数据 (记为 m 个, $m < n$), 重复抽取 k 次, 即可得到 k 个 p 值 (这些 p 值可能相同也可能不同), 按照随机抽取的方法, 由组合原理知一共可抽取 C_n^m 个不同的样本, 即可得到 C_n^m 个 p 值, 增加了检验样本。

设 p_1, p_2, \dots, p_n 是由随机抽取的方式得到的 n 个 p 值, \bar{p} 是这 n 个 p 值的均值, 若 \bar{p} 与 α 没有显著性差异, 那么由统计学原理可知统计量

$$T = \frac{\bar{p} - \alpha}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

应该服从自由度为 $(n-1)$ 的 t 分布^[4] (其中 s 为样本 p_1, p_2, \dots, p_n 的标准差), 那么对于给定的假设检验显著性

水平 ξ, \bar{p} 的接受域为:

$$\left[\alpha - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\xi}{2}}(n-1), \alpha + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\xi}{2}}(n-1) \right] \quad (1)$$

故当检验 VaR 准确性时, 只要 \bar{p} 落在该接受域内, 则称 \bar{p} 与 α 无显著性差异, 即估计出的 VaR 具有较高的准确性, 反之, 若 \bar{p} 落在了接受域外, 则说明 \bar{p} 与 α 显著不同, 相应的 VaR 具有高估或低估价值风险的嫌疑, 故估计出 VaR 的 VaR 模型有待进一步改善。通过此方法可以克服预测失败存在相关关系对模型优良判断的影响。因为此检验方法是构造服从 t 分布的统计量 T , 所以将此种方法称为 T 检验法。

2.2 实证分析

选取上证指数 2013 年 1 月 4 日至 2014 年 1 月 28 日的 257 个日收盘价为样本, 经

$$X_t = -R_t = -(\ln P_t - \ln P_{t-1})$$

(P_t 为资产在 t 时刻的价格) 处理后得 256 个数据。利用 *evIEWS6.0* 对序列 X_t 进行一系列相关的分析后建立 *EGARCH* 模型^[5] 为:

$$\log \sigma_t^2 = -0.947846 - 0.092987 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + 0.175391 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 0.888151 \log \sigma_{t-1}^2 \quad (2)$$

由风险价值 VaR 的定义可得 VaR 在统计学上的定义为^[6]:

$$P\{R_t > -VaR_t\} = 1 - \alpha \quad (3)$$

其中, R_t 为资产在第 t 期的收益率, VaR_t 为 t 时刻 α 显著水平下的 VaR , 取值为正。

2.2.1 正态假设下 T 检验法与似然比检验法比较

为了计算 VaR , 假设序列 X_t 服从正态分布, 则 $VaR_t = u_t + \sigma_t Z_{1-\alpha}$, 其中, u_t 和 σ_t 分别是 t 时刻 X_t 序列的均值和标准差。结合已建立的 *EGARCH* 模型得到的 σ_t 可得 99% 置信度下 255 天的 VaR (表 1)。

通过失败率检验, 总天数为 255 天的 VaR 中失败总天数为 5 天, 该值落在 Kupiec 提出的似然比检验法下的接受域 (0, 7) 内, 即似然比检验结果说明在正态假设下计算出的 VaR 可靠。

表 1 正态假设下的部分 VaR 值

日期	VaR
2013/01/8	0.025149757
2013/01/9	0.026959853
2013/01/10	0.026097498
...	...
2014/01/24	0.027133323
2014/01/27	0.026152778
2014/01/28	0.027967768

T 检验法检验:在 255 天中随机抽取 100 天并计算这 100 天内的失败率,重复抽取 30 次,得到 30 个失败率 p ,对这 30 个 p 值进行均值是否为 0.01 的 T 检验^[7],检验结果(表 2)显示 Sig. 值为 0.000,说明这 30 个失败率 p 的均值与 0.01 存在显著性差异。即:T 检验法的检验结果为正态假设下计算出的 VaR 不可靠,还有待改进。

表 2 正态分布下 T 检验结果

t	df	Sig. (双侧)	均值差值	差分 95% 置信区间	
				下限	上限
4.762	29	.000	.01033	.0059	.0148

分析 T 检验法拒绝正态假设下的 VaR 模型的原因:
 (1) 对 X_t 进行统计分析发现 X_t 序列的偏度为 0.327 529,峰度为 5.320 699,且 JB 统计量的伴随概率为 0.000,即 X_t 不服从正态分布,T 检验法拒绝正态假设下的 VaR 模型正好与 X_t 实际不服从正态分布相吻合。
 (2) 从 T 检验法的检验样本获取方法可知,T 检验法是拒绝失败的发生具有前后相关关系的模型,而正态分布下总数为 255 天的 5 次失败主要发生在前 110 天内,所以 T 检验法拒绝相应的 VaR 模型。

2.2.2 极值理论下 T 检验法与似然比检验法比较

首先对收益率序列建立 EGARCH 模型,再对残差建立极值模型,最后根据收益率序列的 VaR_{EGARCH} 与经 EGARCH 模型过滤后得到的残差序列的 VaR_e 之间的关系: $VaR_{EGARCH} = \mu_t + \sigma_t VaR_e$ ^[3],计算到 99% 置信度下 255 天的 VaR,见表 3。

表 3 极值理论下的部分 VaR 值

日期	VaR
2013/01/8	0.030722423
2013/01/9	0.032940609
2013/01/10	0.031883835
...	...
2014/01/24	0.033153188
2014/01/27	0.031951577
2014/01/28	0.034175761

经检验,255 天中共有 3 天失败,该值也落在似然比检验法下的接受域内,说明运用极值理论计算出的 VaR 通过了似然比检验,即极值理论下的 VaR 模型可靠。同样在 255 天中随机抽取 100 天计算失败率,重复 30 次,对得到的 30 个失败率 p 进行均值是否为 0.01 的 t 检验^[7],检验结果(表 4)的 Sig. 值为 0.083,说明这 30 个失败率 p 的均值与 0.01 无显著性差异。故通过 T 检验法检验,表明在极值理论下计算出的 VaR 可靠。

T 检验法接受极值理论下的 VaR 的原因是:(1) VaR 主要研究极值,所以利用极值理论计算结果比正态假设更加准确,且本文不是直接对 X_t 序列建立极值模型,而

表 4 极值理论下 T 检验结果

t	df	Sig. (双侧)	均值差值	差分 95% 置信区间	
				下限	上限
1.795	29	.083	.00300	-.0004	.0064

是对经过 EGARCH 模型过滤后得到的残差序列建立极值模型,这样更能满足极值理论需序列独立同分布这一条件。所以在理论上极值理论的 VaR 模型可靠,而 T 检验结果与此相符。(2) 极值理论下总数为 255 天的 3 次失败分别发生第 29、36 和 108 这 3 个交易日内,可认为失败的发生不具有前后相关关系,所以 T 检验法接受相应的 VaR 模型。

3 结束语

本文根据失败率的定义确定了检验 VaR 准确性的 T 检验法,利用组合的方式获取检验样本和构造统计量得到了失败率均值 \bar{p} 的接受域,通过上证指数的应用比较发现:在 99% 置信度下,T 检验法拒绝了似然比检验法所接受的正态假设下的 VaR 模型,这一结果与序列不服从正态分布相吻合,说明在同一置信度下 T 检验法比似然比检验法对模型的准确性要求更高,且在 99% 置信度下,T 检验法和似然比检验法都接受了极值理论下的 VaR 模型,这说明 T 检验法能接受较好的模型。总之 T 检验既能拒绝有待改进的模型又能接受较好的模型,能达到检验 VaR 准确性的目的。

参考文献:

- [1] 王向翠,董佳慧. VaR 准确性检验的贝叶斯方法[J]. 企业技术开发,2009,28(10):44-45.
- [2] 杨永愉,丁进,杨凡. VaR 模型后验测试的贝叶斯方法[J]. 统计与决策,2005(1):4-7.
- [3] 俞慧琴.基于极值理论 VaR 模型的上市公司行业风险比较研究[D].浙江:浙江大学,2013.
- [4] 茆诗松,程依明.概率论与数理统计教程[M].北京:高等教育出版社,2010.
- [5] 董银霞.上证综指基于 ARCH 模型的 VaR 风险价值测度分析[J].会计之友,2014(11):70-75.
- [6] 余素红,张世英,宋军.基于 GARCH 模型和 SV 模型的 VaR 比较[J].管理科学学报,2004,7(5):61-66.
- [7] 马庆国.应用统计学:数理统计方法数据获取与 SPSS 应用[M].上海:科教出版社,2005.
- [8] 郭玮如. VaR 最适计算方法之选择[D].台湾:国立台湾大学,2011.
- [9] 阳异.风险价值 (VaR) 估计方法的优化改进及其在

- 上证指数上的应用[D].成都:西南财经大学,2011.
- [10] 杨继平,袁璐.基于结构转换非参数 GARCH 模型的 var 估计[J].管理科学学报,2014,17(2):69-80.
- [11] 罗攀攀.基于 EVT 的 ARMA-EGARCH-M 模型的 VaR 研究[D].南昌:南昌大学,2013.

The T-test of VaR Accuracy Test

TANG Ning, FENG Changhuan

(School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637002, China)

Abstract: According to the definition of *VaR* failure test, a new method to test the accuracy of *VaR* is obtained, which using combination method to get testing samples and structure statistics that obey T distribution, that is T-test. The model accepted by the T-test can also accepted by likelihood ratio test, and at the same confidence, it is more accurate. by the end, through the empirical analysis, it is further explained that, compared to the likelihood ratio test, T-test can test the accuracy of the *VaR* preferably.

Key words: failure test; *VaR*; T-test

(上接第 66 页)

参考文献:

- [1] 梅向明,黄敬之.微分几何[M].4版.北京:高等教育出版社出版,2008.
- [2] 陈维桓.微分几何[M].北京:北京大学出版社,2006.
- [3] 彭家贵,陈卿.微分几何[M].北京:高等教育出版社,2002.
- [4] 马力.简明微分几何[M].北京:清华大学出版社,2004.
- [5] 陈维桓.微分几何例题详解和习题汇编[M].北京:高等教育出版社出版,2010.
- [6] 邢家省,张光照.曲面上曲线的测地曲率向量的注记[J].吉首大学学报:自然科学版,2013,34(4):7-10.
- [7] 邢家省,高建全,罗秀华.曲面论基本方程的矩阵推导方法[J].吉首大学学报:自然科学版,2014,35(3):4-10.
- [8] 邢家省,高建全,罗秀华.高斯曲率内蕴公式的几种形式的推导方法[J].四川理工学院学报:自然科学版,2014,27(4):82-89.

Properties of the Geodesic and the Shortest Line on the Curved Surface

XING Jiasheng^{1,2}, GAO Jianquan³, LUO Xiuhua³

(1. School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. LMIB of the Ministry of Education, Beijing 100191, China; 3. Pingdingshan Institute of Education, Pingdingshan 467000, China)

Abstract: In From the geodesic curvature vector and geodesic curvature of curve on the surface, three necessary and sufficient conditions are given based on the definition of geodesic, and new treatment methods for some applications are given; then it is turned out that the three conclusions of necessary conditions of the shortest line on the curved surface exactly correspond to the three equivalent conditions of geodesic.

Key words: geodesic curvature vector; geodesic curvature; geodesics; the shortest line